ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

E COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XIX. - ANNO XIX.

(1865-66)

ROMA

1866

TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI

Piazza Poli n. 91.

ELENCO DEI SOCI ATTUALI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

DAL 3 LUGLIO 1847, EPOCA DEL SUO RISORGIMENTO, FINO A TUTTO DICEMBRE DEL 1865.

SOCI ORDINARI

EPOCA DELLA ELEZIONE	
9 *gennaio* 1853	ASTOLFI abate OTTAVIANO, professore d'introduzione al calcolo sublime nella università di Roma , e di fisico-matematica nel collegio Urbano.
2 *febbraio* 1862	AZZARELLI cav. MATTIA, professore di meccanica e idraulica nella università di Roma.
3 *luglio* 1847	BONCOMPAGNI D. BALDASSARRE dei principi di PIOMBINO.
4 *gennaio* 1863	CADET dott. SOCRATE, professore di fisiologia umana nell'università di Roma.
3 *luglio* 1847	CALANDRELLI D. IGNAZIO, professore di ottica e di astronomia nell'università di Roma.
» »	CAVALIERI SAN BERTOLO Comm. NICOLA, professore emerito di architettura statica e idraulica nell'università di Roma.
» »	CHELINI rev. p. DOMENICO delle Scuole Pie, già professore di meccanica e idraulica nell'università di Bologna.
5 *gennaio* 1862	CIALDI Comm. ALESSANDRO.
3 *luglio* 1847	COPPI cav. ANTONIO.
1 *febbraio* 1863	DIORIO dott. cav. VINCENZO, professore di zoologia nell'università di Roma.

EPOCA DELLA ELEZIONE	
2 *marzo* 1856	FIORINI-MAZZANTI contessa ELISABETTA, botanica.
7 *maggio* 1863	FOLCHI comm. CLEMENTE, ispettore d'acque e strade, e membro emerito del consiglio d'arte.
3 *aprile* 1864	JACOBINI LUIGI, professore di agraria nella università di Roma.
3 *luglio* 1847	MASSIMO duca D. MARIO.
» »	MAZZANI canonico D. TOMMASO, professore emerito di meccanica, e idraulica nell'università di Roma.
6 *febbraio* 1859	NARDI monsignor FRANCESCO, geografo fisico.
3 *luglio* 1847	PIERI dott. GIULIANO, professore emerito d' introduzione al calcolo sublime nell'università di Roma.
3 *aprile* 1864	POLETTI comm. LUIGI, ispettore di acque e strade, e membro del consiglio d' arte.
11 *maggio* 1848	PONZI dott. cav. GIUSEPPE, professore di geologia, e mineralogia nell'università di Roma.
22 *aprile* 1849	PROJA D. SALVATORE, nominato professore di elementi di matematica nell' università di Roma.
3 *aprile* 1864	ROLLI dottor ETTORE, direttore del giardino botanico dell'università di Roma.
22 *febbraio* 1852	SANGUINETTI dott. PIETRO, professore di botanica nell'università di Roma.
30 *giugno* 1850	SECCHI rev. p. ANGELO, d. C. d. G., direttore dell'osservatorio astronomico nel collegio romano.

EPOCA DELLA ELEZIONE	
3 *luglio* 1847	SERENI CARLO, professore di geometria descrittiva, e d' idrometria nell' università di Roma.
» »	TORTOLINI canonico D. BARNABA, professore di calcolo sublime nell'università di Roma.
3 *dicembre* 1854	VIALE dott. cav. BENEDETTO, professore emerito di clinica medica nell' università di Roma.
3 *luglio* 1847	VOLPICELLI dott. PAOLO, professore di fisica sperimentale nell'università di Roma.

PRESIDENTE

4 *gennaio* 1863 Comm. prof. NICOLA CAVALIERI SAN BERTOLO.

TESORIERE

1 *febbraio* 1863 Duca D. MARIO MASSIMO.

EPOCA DELLA ELEZIONE

MEMBRI DEL COMITATO ACCADEMICO

1 *marzo* 1863	Prof. D. SALVATORE PROJA.
» »	Prof. D. IGNAZIO CALANDRELLI.
8 *Gennaro* 1865	Prof. cav. VINCENZO DIORIO.
» »	Monsignor FRANCESCO NARDI.

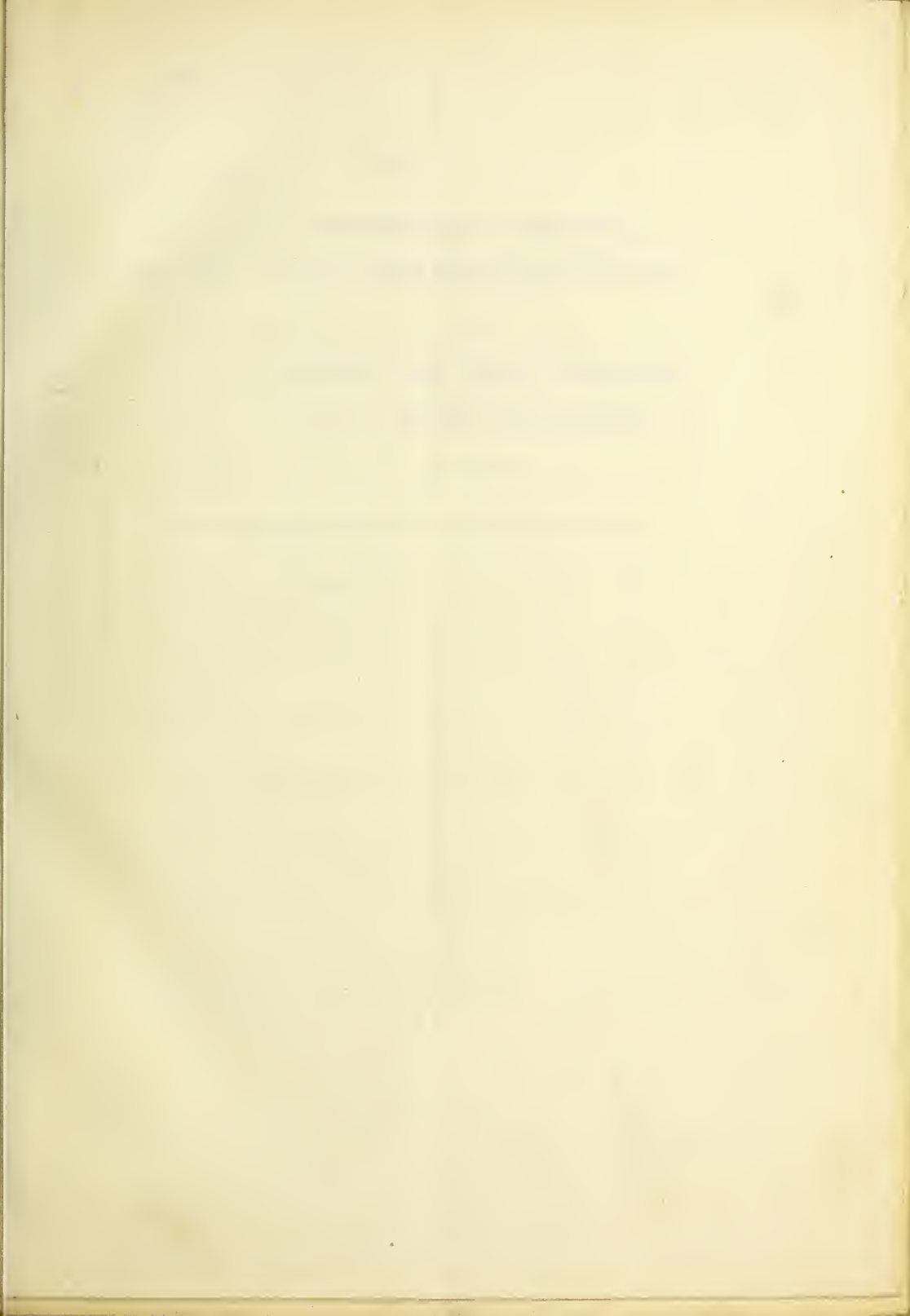
MEMBRI DELLA COMMISSIONE DI CENSURA

10 *dicembre* 1864	Prof. D. IGNAZIO CALANDRELLI.
» »	Prof. dott. GIUSEPPE cav. PONZI.
» »	Prof. CARLO SERENI.
» »	Prof. D. SALVATORE PROJA.

SEGRETARIO

3 *luglio* 1847	Prof. PAOLO dott. VOLPICELLI. (*Confermato nella carica di segretario pel secondo decennio, nel* 7 *giugno* 1857).

VICE-SEGRETARIO

7 *giugno* 1857	Prof. GIUSEPPE dott. cav. PONZI.

EPOCA DELLA ELEZIONE	SOCI CORRISPONDENTI ITALIANI
3 *dicembre* 1854	BELLAVITIS GIUSTO, professore di matematiche superiori nell'università di Padova.
» »	BERTOLONI cav. ANTONIO, professore di botanica nell'università di Bologna.
11 *maggio* 1851	BETTI ENRICO, professore di matematica nel Liceo di Firenze.
5 *ottobre* 1848	BIANCHI cav. GIUSEPPE, già direttore del R. osservatorio astronomico di Modena.
4 *febbraio* 1849	BRIGHENTI MAURIZIO, giá professore di geometria descrittiva nella scuola degl' ingegneri di Roma, ispettore emerito di acque, e strade, ec. in Bologna.
2 *maggio* 1858	DE-GASPARIS professore ANNIBALE, astronomo a Napoli.
6 *maggio* 1860	LOMBARDINI ELIA, ingegnere idraulico in Milano.
11 *maggio* 1851	MAINARDI GASPARE, professore di calcolo sublime nella R. università di Pavia.
5 *ottobre* 1848	MARIANINI cav. STEFANO, professore di fisica sperimentale nella università di Modena.
4 *febbraio* 1849	MATTEUCCI comm. CARLO, professore di fisica nella R. università di Pisa.
» »	MENABREA LUIGI FEDERICO, membro della R. accademia delle scienze di Torino.
1 *aprile* 1860	MENEGHINI GIUSEPPE geologo in Pisa.

EPOCA DELLA ELEZIONE	
11 *maggio* 1851	MINICH SERAFINO, professore di matematiche superiori nell'università di Padova.
4 *febbraio* 1849	PARLATORE FILIPPO, professore di botanica, e di fisiologia vegetale, nel museo di fisica e storia naturale in Firenze.
4 *febbraio* 1849	PURGOTTI dott. SEBASTIANO, professore di chimica nell'università di Perugia.
» »	SANTINI comm. GIOVANNI, direttore dell' I. R. osservatorio astronomico di Padova.
6 *maggio* 1860	SAVI PAOLO geologo in Pisa.
4 *febbraio* 1849	SCACCHI ARCANGELO, professore di mineralogia nella R. università di Napoli.
» »	SISMONDA cav. ANGELO, professore di geologia, e di mineralogia nella R. università di Torino.
6 *maggio* 1860	SISMONDA EUGENIO, geologo in Torino.
4 *febbraio* 1849	TARDY PLACIDO, professore di matematiche in Genova.
1 *aprile* 1860	VILLA ANTONIO, geologo in Milano.
4 *febbraio* 1849	ZANTEDESCHI abate cav. D. FRANCESCO, già professore di fisica nell' I. R. università di Padova.

EPOCA DELLA ELEZIONE

SOCI CORRISPONDENTI STRANIERI

10 *luglio* 1853	AGASSIZ L., professore di storia naturale a Boston.
17 *novembre* 1850	AIRY G. B., direttore del R. osservatorio astronomico di Greenwich.
2 *febbrajo* 1862	BECQUEREL ANTONIO CESARE, membro dell' accademia delle scienze dell' I. Istituto di Francia.
17 *novembre* 1850	CHASLES MICHELE, membro dell'accademia delle scienze dell' I. istituto di Francia.
11 *giugno* 1865	DE CALIGNY marchese ANATOLIO.
10 *giugno* 1860	DE CANDOLLE ALFONSO, botanico in Ginevra.
11 *giugno* 1865	DE HAUER prof. FRANCESCO in Vienna.
17 *novembre* 1850	DE LA RIVE AUGUSTO, professore di fisica in Ginevra.
11 *giugno* 1865	DE WALTHERSHAUSEN bar. SARTORIUS in Gottinga.
10 *luglio* 1853	DU BOIS REYMOND E., fisiologo in Berlino.
10 *luglio* 1853	ÉLIE DE BEAUMONT GIAMBATTISTA, segretario perpetuo dell'accademia delle scienze dell' I. istituto di Francia.
17 *novembre* 1850	FARADAY MICHELE, membro della R. società di Londra.

EPOCA DELLA ELEZIONE	
17 *novembre* 1850	FLOURENS, G. P., segretario perpetuo dell'accademia delle scienze dell' I. istituto di Francia.
» »	FORBES G., professore di fisica in Edimburgo.
» »	FOUCAULT LEONE, fisico nell' osservatorio astronomico di Parigi.
» »	FORCHHAMMER GIORGIO, segretario della società delle scienze in Copenaghen. *defunto nel 14 dicembre del 1865*
» »	FRIES ELIAS, segretario della R. accademia delle scienze di Upsala.
» »	GROVE G. R., professore di fisica in Londra.
» »	HANSEN P. A., direttore dell' osservatorio astronomico di Gotha.
» «	HENRY, segretario dell' istituto Smitsoniano in Washington.
10 *luglio* 1853	IACOBI, professore di chimica in Pietroburgo.
» »	KUMMER, professore di matematica nell'università di Breslavia.
17 *novembre* 1850	LAMÉ G., membro dell'accademia delle scienze dell' I. istituto di Francia.
1 *dicembre* 1861	LE VERRIER U. G., direttore dell' I. osservatorio di Parigi.
10 *luglio* 1853	LIAIS E., già nell' I. osservatorio di Parigi astronomo aggiunto.
» »	LIEBIG barone GIUSTO, professore di chimica in Monaco.
» »	LITROW, direttore dell' I. e R. osservatorio astronomico in Vienna.

EPOCA DELLA ELEZIONE	
4 *febbraio* 1849	MALAGUTI M. J., professore di chimica in Rennes.
10 *luglio* 1853	MALMSTEN dott. C. G., professore di matematica nell'università di Upsala.
30 *luglio* 1865	MORIN, generale, ARTURO GIULIO, membro dell' accademia delle scienze dell' I. Istituto di Francia.
10 *luglio* 1853	MURCHISON cav. R., presidente della società geologica in Londra.
» »	NEUMANN, dott. professore di matematiche, e fisica nell'università di Könisberg.
» »	OHM dott. M., professore di matematiche nell'università di Berlino.
» »	POUILLET C., membro dell'accademia delle scienze dell' I. istituto di Francia.
17 *novembre* 1850	QUETELET cav. A., segretario perpetuo della R. accademia delle scienze, lettere, e belle arti del Belgio in Brusselle.
10 *luglio* 1853	REGNAULT V., membro dell'accademia delle scienze dell' I. istituto di Francia.
» »	REMON ZARCO DEL VALLE dott. ANTONIO, presidente della R. accademia delle scienze in Madrid.
» »	ROBERTS G., professore di matematica nel collegio della Trinità in Dublino.
2 *maggio* 1858	SABINE, fisico e membro della R. Società di Londra.
3 *aprile* 1864	SALDANHA (Duca di).
10 *giugno* 1860	SORET LUIGI, fisico in Ginevra.
2 *maggio* 1858	THOMSON G., professore di filosofia naturale nell'università di Glasgow.

EPOCA DELLA ELEZIONE

30 *luglio* 1865	**VAILLANT**, maresciallo conte **GIOVANNI BATTISTA FILIBERTO** membro dell'accademia delle scienze dell'I. Istituto di Francia.
2 *maggio* 1858	**WEHLBERG**, segretario della R. accademia delle scienze di Stockolm.
17 *novembre* 1850	**WHEATSTONE**, membro della R. società di Londra.

Soci corrispondenti stranieri di recentissima aggregazione

6 marzo 1866. De Saint Venant ..... ingegnere idraulico, in Parigi.
" " Dausse Battista, item
" " Le Joli Augusto, naturalista a Cherbourg
8 aprile 1866. Bertrand Giuseppe Luigi, matematico, membro dell'accademia delle scienze in Parigi
" " Duhamel Giammaria, item
" " Fizeau Armando Ippolito, item

6 giugno 1866

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE Iª DEL 3 DICEMBRE 1865.
PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

Biographie d'Ibn Albannâ mathématicien du XIIIe siècle extraite du Tekmilet Ed-Bibadj d' Ahmed Baba, traduite et annotée par M. Aristide Marre, Professeur, Officier de l'Instruction publique, Membre de la Société Asiatique de Paris.

NOTICE
SUR AHMED BABA,
LE BIOGRAPHE D'IBN ALBANNA.

Ahmed ben Ahmed ben Ahmed ben Omar ben Mohammed Aqhyt, plus connu sous le nom de Ahmed Bâbâ Al Timboktouy, naquit à Arawân, au N. de Timbouktou, le 21 du mois de d'houl–hidja en l'année 963 (ou de N. S. J. C. 1556). Berbère d'origine, puisqu' il descendait de la tribu des Sanhadjas, ou Senagas suivant la prononciation égyptienne, qui bâtit la ville de Tekra sur les frontières du Soudan et donna son nom au Sénégal, Ahmed Bâbâ appartenait à une famille qui avait produit un grand nombre de célèbres eulémas. Plusieurs de ses ancêtres, son grand-père, son père, son oncle paternel s'étaient distingués avant lui dans la carrière de l'enseignement, la plupart d'entre eux remplissant en même temps les fonctions d'imâm ou celles de kâdi dans la ville de Timbouktou.

Dans son enfance, il avait connu Ahmed ben Mohammed ben Saïd né à Timboukton en 1524 de J. C., professeur du code musulman en 1553 et mort en 1568; il avait même assisté à ses cours. Mais son premier maître de grammaire et de rhétorique fut son oncle paternel Abou Bekr ben Ahmed ben Omar ben Mohammed ben Aqbyt, né à Timbouktou en 1526 et mort à Médine en 1583. C'est

dans le cours de cette même année 1583, que Ahmed Bâbâ perdit l' un de ses maîtres vénérés , le docteur Al Aaqyb ben Mohammed, kâdi de Timbouktou , issu de la tribu des Sanhadjas, et son père bien aimé Ahmed ben Ahmed ben Omar ben Mohammed Aqhyt, l'un des jurisconsultes les plus célèbres de son temps. Ahmed ben Ahmed était né dans le pays des Nègres, au commencement de moharrem, l'an de J. C. 1522. Pendant plus de vingt ans , mais seulement pendant trois mois de chaque année, il avait enseigné publiquement les deux Sahyh ou recueils authentiques des actes du prophète, celui de Bokhary et celui de Moslim. L'avant–veille de sa mort, il expliquait encore le Sahyh de Moslim à de nombreux disciples , parmi lesquels ou remarquait Mohammed ben Abou Bekr Baghygou, le fils de son frère.

Pendant dix années Ahmed Bâbâ fréquenta assidûment les leçons de son cousin Mohammed Baghygou, dont le caractère, les vertus et le talent sont loués magnifiquement dans le Tekmilet ed dibadj; il fut guidé par lui dans la carrière des lettres et reçut de ses mains son diplôme ou edjâzeh, pour qu'il pût enseigner à son tour tout ce qu'il avait appris de ses différents maîtres. Le jour où les deux cousins se virent pour la dernière fois, ce fut le jour même de la prise de Timbouktou par les Marocains, dans l'année 1002 de l'hégire (de J. C. 1593–94). En cette année doublement néfaste pour lui, Ahmed Bâbâ fut emmené en captivité loin de son pays et la mort lui enleva son meilleur ami, son précepteur, celui–là dont il a dit : « nul autre n' a pu le remplacer et personne » ne lui a été semblable. » A cette date mémorable pour l'histoire du Soudan, le général Mahmoud Zerqoûn, à la tête d'une armée marocaine, s'empara de Timbouktou et y fit reconnaître la souveraineté du Sultan son maître, malgré l'opposition de notre Ahmed Bâbâ. Celui-ci demanda à ses concitoyens quel était le monarque auquel ils venaient de jurer soumission. – C'est, lui répondirent-ils le Sultan du Maroc. – Je ne connais point d' autre souverain en Occident que le roi de Tunis, répliqua Ahmed-Bâbâ. Pour lui le droit du plus fort n'était pas nécessairement le meilleur. L' infortuné et courageux savant fut transporté les fers aux pieds dans la ville de Maroc, avec une partie de sa famille. Là , pendant quatre longues années, il se livra constamment à l'étude et à la prière, étonnant ses gardiens eux mêmes par la profondeur et l'étendue de ses connaissances, aussi bien que par sa grandeur d'ame.

Enfin au bout de ce temps, un dimanche, le vingt-sixième jour du mois de ramadhan, l'heure de la délivrance sonna pour lui, et ce fut aussi l'heure du plus beau triomphe. Au rapport d'Ibn-Yakoub al Marâkeschi, l'un de ses élèves, et son biographe, la joie que fit éclater sa délivrance fut unanime. Il fut sollicité par les hommes instruits de Maroc d'ouvrir des cours publics , il refusa

d'abord; mais vaincu par l'insistance de leurs prières, il fut conduit à la mosquée des chérifs, et là, au milieu d' une affluence extraordinaire de thâlebs et d'eulémas, il inaugura son enseignement par la lecture du Mokhtessar ou Précis de Sidi Khalil sur la jurisprudence musulmane, expliquant le texte par des scolies, des citations et des exemples tirés des meilleurs jurisconsultes. Bien plus, pendant qu'une multitude avide d'entendre sa voix éloquente recueillait ses leçons de rhétorique, de théologie et de droit, l'autorité souveraine du pays admettait comme arrêts sans appel, les décisions qu'elle réclamait de lui sur les points de jurisprudence qui avaient embarrassé les hommes de loi les plus expérimentés. La réputation de son nom s'étendit alors depuis Sous-al-Aksa, c'est-à-dire de l'extrémité occidentale du Sahara, jusqu'à Alger, Bougie et encore par delà.

Ahmed Bâbâ composa de nombreux ouvrages de droit, de morale, de théologie, d'histoire, de grammaire, voire même d'astronomie, dont on trouvera la liste dans le travail, mince en volume mais gros de renseignements curieux, que M. A. Cherbonneau a intitulé: « Essai sur la littérature arabe au Soudan, » d'après le Tékmilet ed dibadj d' Ahmed Bâbâ le Tombouctien ; Constantine » et Paris 1856. (1) » Malheureusement de tous les écrits d'Ahmed Bâbâ, deux seulement nous sont connus aujourd' hui : le Tekmilet ed dibadj et le Kefâyat al mohtadj qui n'est, comme on le verra tout à l'heure, qu'un résumé du premier. Espérons que ses autres ouvrages enfouis sans doute dans quelque bibliothèque inconnue du Maroc ou de la Tunisie, finiront par être découverts et mis au grand jour ! Le Tekmilet ed dibadj (2) est un recueil de biographies des docteurs les plus célèbres du rite mâlékite, composé à l'aide de nombreux manuscrits presque introuvables aujourd'hui, mais dont les titres nous ont été transmis. Parmi ces manuscrits dont les titres ont été reproduits littéralement par M. Cherbonneau, nous mentionnerons seulement les suivants, dûs à des écrivains dont nous avons déjà rencontré les noms dans la notice biographique sur Ibn Albannâ: L'Index ou tables bibliographique d'Abou Abdallah Al Hadhrâmi, les voyages d'Al Tedjibi, et le Tauchyh eddibadj (l'addition de l'écharpe au dibadj) par le Kâdi Bedr-Eddin Al Karafi, ouvrage qui a pu inspirer à Ahmed Bâbâ l'idée de son Tekmilet ed-dibadj.

En ce qui concerce le Kefâyat al mohtadj, voici comment se trouve expliquée la composition de cette œuvre par Ahmed Bâbâ lui-même dans un fragment

(1) A qui serait désireux d'avoir de plus amples renseignements sur la vie et les ouvrages d'Ahmed Bâbâ, nous conseillerions la lecture de cette intéressante brochure à la quelle nous avons pour notre part emprunté cette brève notice.

(2) Tekmilet ed dibadj signifie: complément du Dibadj. Par le mot *dibadj* on entend proprement une sorte de vêtement en soie brodé d'or.

copié par M. Cherbonneau sur un exemplaire appartenant au thâleb Moustapha Ben Djelloul de Constantine (fol. 1, *verso*, après l'invocation), et dont une transcription, faite à Rome par M. Enrico Narducci, nous a été communiquée par la bienveillante attention de M. le Prince Don Balthasar Boncompagni:

« Ce livre est un abrégé que j'ai fait de l' appendice joint au dibadj doré
» sur la connaissance des principaux docteurs de la secte (Mâlékite), de l'Imâm
» Borhan Eddin Ibn Ferhoun, lequel est nommé Neyl al ebtehadj bi tettharyz
» ed dibadj (celui qui donne l' embellissement et la grâce à la broderie du
» dibàdj.) Cet appendice comprend une foule de personnages, car il ne cite pas
» seulement ceux de son temps, mais d'autres encore, et il mentionne ceux qui
» postérieurement sont venus grossir la foule des interprètes. Il est parvenu
» jusqu'à dix-huit cahiers environ du grand format, et a été achevé dans l'an-
» née 1005 (ou de J. C. 1596 , c' est-à-dire pendant la captivité à Maroc) ; on
» en a tiré des copies. Ensuite j'ai fait choix de la quintessence de cet ouvrage,
» pour en composer le présent abrégé , sur les imâms les plus fameux et les
» livres qu'ils écrivirent à l'exclusion des autres; visant surtout à simplifier et
» à bien coordonner les matériaux choisis. Et je lui ai donné le nom de *Ke-*
» *fâyat al Mohtadj li ma'réféh min leys fy'l dibadj*, c'est-à-dire " Suffisance
» pour qui a besoin de connaître ce qui ne se trouve pas dans le dibadj. „
» Dieu le Très-haut l'a accueilli en sa pure présence par Mohammed et sa fa-
» mille, que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur lui ! Amen. »

A. Marre.

BIOGRAPHIE
D'IBN ALBANNÂ

EXTRAITE DU *TEKMILET ED-DIBADJ* (1) D' AHMED BÂBÂ.

Voir le texte arabe de cette Biographie dans les quatre dernières pages de cet opuscule).

Ahmed ben Mohammed Othmân Alâzadi Abou'l Abbas Al Marâkeschi (2), connu sous le nom d'*Ibn Albannâ* (fils de l'architecte) à cause de la profession de son père, fut l'un des princes de la science; aussi *Hafiz ben Reschid* a-t-il dit que dans le Maghreb on ne vit jamais deux hommes plus savants qu'*Ibn Albannâ Al Marâkeschi* et *Ibn al Châtt*. Un autre a dit que c'était un imâm révéré des rois, qu'il était très-versé dans la jurisprudence et possédait à fond les sciences de l'antiquité. Al Bedjâï, son élève, a dit (3): qu'il était grave, de

(1) La découverte de ce passage du *Tekmilet ed dibadj*, relatif à notre auteur *Ibn Albannâ*, est due à M. A. Cherbonneau; ce savant arabiste en prit une copie qu'il envoya à M. le Prince Don Balthasar Boncompagni, et c'est sur une transcription de cette copie faite par M. Enrico Narducci de Rome, que j'ai entrepris ma traduction.

(2) Presque tous les ouvrages qui ont mentionné l'auteur du Talkhys, lui donnent la qualification d'*Al Marâkeschi* (le Marocain) et le surnom de *Ibn Albannâ* (le fils de l'architecte). Le *Tekmilet ed dibadj*, le premier, déclare expressément (voir les dernières lignes de cette notice) que *Ibn Albannâ naquit à Maroc.* C'est pourquoi la dénomination d'*Al Garnâti* (le Grenadin), ou *Granatensis*, qu'on lit tome Ier, page 369, de la *Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis* de Michaël Casiri, doit s'appliquer non pas à notre auteur, mais à son père. *Ibn Albannâ al Garnâti* signifie le fils de l'architecte de Grenade, c'est-à dire que le fils était de Maroc, et le père de Grenade; l' auteur du Talkhys naquit, vécut, professa et s'illustra à Maroc, parmi les Arabes du Maghreb, tandis que le père se distingua sans doute comme architecte parmi les Arabes d'Andalousie, dans cette ville de Grenade, célèbre dans le monde entier par ses chefs-d'œuvre d'architecture mauresque.

(3) Nous connaissions déjà l'un des élèves d'Ibn Albannâ, Abd al Aziz al Mesrâni, l'auteur d'un commentaire sur le Talkhys.

mœurs irréprochables, ferme dans ses promesses, généreux, beau, d' une taille bien prise, distingué dans sa mise, délicat dans sa nourriture; qu'il saluait tous ceux qui le rencontraient et les congédiait d' une parole gracieuse, qu'il était aimé des savants et des gens de bien, qu'il portait la lumière en peu de mots dans les discussions obscures, qu'il ne parlait jamais sans connaître, et que tout le monde écoutait en silence sa parole juste et vraie.

Ibn Châtt a dit qu' il était profondément versé dans les doctrines sunnites et dans la science de l'astrologie. *Ibn Albannâ* vécut familièrement avec *Abou Zeïd Al Hazmiri*, il entra avec lui dans un lieu de retraite et y demeura un an. Il lui dit: « Dieu t'a rendu habile dans les sciences du ciel, comme il t'a » rendu habile dans les sciences de la terre. » Une nuit Abou Zeïd Al Hazmiri lui fit connaître une partie de la voûte céleste, jusqu'à ce qu'il l'eût bien examinée, et il lui fit observer l' orbite du soleil. Il en fut étonné. *Al Hazmiri* lui dit: « persévère jusqu'à ce que tu aies bien observé, déjà tu as été favo- » risé dans ce que tu as vu. » Or la fin de son temps d'études astronomiques arriva, et il n'avait cessé d'observer le jeûne dans sa retraite consacrée à l'examen et à la vérification de la voûte céleste, et voici la vision qu' il eut une fois. — Il tenait entre ses mains une *qoubbah* de cuivre, sans pareille, suspendue prisonnière dans l' air, et au milieu de cette *qoubbah* se trouvait un dévot personnage. Cette vue l' effraya et il ne persévéra pas. Il entendit alors des voix menaçantes qui l' appelaient et lui criaient : « Loin de nous , *Ibn* » *Albannâ* ! » — Et il tomba évanoui. — *Abou Zeïd Al Hazmiri* l'entendit, vint à lui et lui frictionnant la poitrine lui fit recouvrer l'usage de ses sens: alors il lui dit: « Cet homme qui était dans la *qoubbah*, c'était moi! Je voulais t'in- » struire, mais tu n'as pas pu. » Puis il lui fit connaître ce qu'il avait demandé (1).

Ibn Châtt rapporte qu'un jour un homme vint à *Ibn Albannâ*, et lui dit: « Mon père est mort, il n'a pas déclaré sa fortune et l'on dit qu'il l'a enterrée dans sa maison. Je recevrai ton avis comme venant du Très-Haut. » Et il se tut. Alors *Ibn Albannâ* lui dit: « figure-moi sur le sable le plan de la maison. Cela fait, il lui répéta le même commandement trois fois. Alors il dit: « ta for-

Le Tekmilet ed-dibadj nous fournit le nom d'un second élève d'Ibn Albannâ, et quelques lignes trop courtes de cet élève sur son maître vénéré. Chaque mot d'Al Bedjaï, en effet, est comme un coup de pinceau qui nous donne un trait de cette noble figure d'Ibn Albannâ, demeurée jusqu' à présent complètement inconnue.

(1) Ce passage est très-obscur dans le texte, et la traduction m'en a paru si peu satisfaisante, que j'ai été tenté plus d'une fois de ne pas la donner ici. Un jeune Arabe d'Egypte , intelligent et instruit, *Hassan Effendi Mahmoud*, élève de la Faculté de médecine de Paris, et un savant prêtre arménien, natif de Mardyn, consultés par moi sur ce passage, ne l'ont pas mieux compris que moi-même. Mettant de côté tout amour-propre exagéré, je me suis décidé à donner quand même la traduction qu'on vient de lire, dans l'espoir qu'elle ne tarderait pas à être corrigée par de plus habiles.

وڢانون ڢي عيوب الشعر

وڢانون ڢي الڢرف بين الحكمة والشعر

وشرح لغزابن الڢارض

ورسالة ڢي ذكر العلوم الثمانية

وجزء ڢي تسمية الحروڢ وخاصيتها ڢي اوائل السور

ورسالة ڢي طبايع الحروڢ

واخري ڢي الاسماء الحسنى

واخري ڢي الڢرف بين المعجزة والكرامة والسحر

وجزء ڢي الاوڢاڢ

وجزء ڢي العزائم والرڢي

وجزء ڢي عمل الطلسمات

وجزء ڢي المناسبات

وكلام ڢي الرجز والڢال والكهانة

وجزء ڢي خطّ الرمل وغيرها .·.

ولد رحمه اللّه تعالى بمرّاكش يوم عروة عام اربعة وخمسين وڢيل تسعة واربعين وستّمائة .·. ڢال الحضرمى ڢي ڢهرسته كان وڢوراً صموتاً متواضعاً ڢاضلاً متڢنّناً ڢي العلوم مصنّڢاً ڢيها حسن الالڢاء لها ڢال ولى تاليڢ ڢي سيره واخباره .·.

Errata		Corrige
page 1, lig. 5	الدجاًي	الدجاي
— » — 6	مهذًبا حسن	مهذ باحسن
— 2 — 5	المغياي	المغيابى
— 4 — 3	لغزابن	لغز ابن

ورسالة في الرّد علي مسايُل فقهية ونجومية

والرّد علي مَن يقول يعلم الوقت بغروب قرص الشمس

عن بصر القايُم المقابل لها وبيّن انه لا يصحّ مطلقا

وكليات في العربية

والروض المربع في البريع

وتواليف في الفرايُض

كشرح الحوفي

وجزوُ في الاقرار

واُخر في المدبر

والتلخيص في الحساب وشرحه

والمقدمة في اقليدس

والمقالات الاربع والقوانين والاصول والمقدمات

وجزوُ في ذوات الاسماء والمنفصلات

واُخر في العمل بالرومى

ومقالة في مكاييل الشرع

وجزوُ في المساحات

ومنهاج الطالب في تعداد الكواكب

ومقالة في الاسطرلاب

وجزوُ العمل بالصفيحة الشكارية وبالزرقاليت

وجزوُ في ذكر الجهاب في بيان القبلة والنهى عن تغييرها

وجزوُ في الانواُ وصور الكواكب

وجزوُ في الفلاحة

وجزوُ في الجمل الست بجدول

الرمل فيجعل ثمّ امره به ثلاث مرّات فقال له مالكَ في هذا الموضع منها فمشى وبحث في الموضع فوجد المال واخباره في مثل ذلك كثيرة.·. قرأ كتاب سيبويه على القاضى الشريف محمّد بن علي بن يحيى ولازمه فيه وفي اقليدس و عن ابى اسحاف العطّار الجزولى والعروض على القللوسى والحديث على عبد الله بن عبد الملك واخيه وانتفع به كثيرا .·. وتفقّه بابى عمران موسى الزناتى اخذ عنه شرحه للموطّا و على القاضى المغيلي الإرشاد وعلى ابن حجاج المستصفى والحوفية والتهذيب.·. وعلم السنن على القاضى ابى الحجاج يوسف التجيبى ويعقوب الجزولى وابى محمد البستانى.·. وعلم الطبّ على الحكيم ابن حجلة.·. والنجوم على ابن مخلوف السجلماسى.·. وألّف تواليف كثيرة منها

تفسير في البسملة

وحاشية على الكشّاف

وكتاب في مناسبة الأبواب

وأخر في مرسوم خطّ التنزيل

وجزء في تفسير سورتى العصر والكوثر

والتقريب في اصول الدين

ومنتهى السؤل في الاصول

وتنبيه المفهوم في مدارك العلوم

وشرح تنقيح القرافي

ومراسم الطريقة في علم الحقيقة

وشرحه لم يسبق لمثله

ومختصر الاحياء للغزالى

وكليات في المنطق وشرحها

وجزؤ في الجداول وشرحه

ابن البنّا مراكش

احمد بن محمّد بن عثمان الازدي ابو العبّاس المرّاكشي عُرِفَ بابن البنّا لحرفة ابيه من ايمة العلم حتى قال الحافظ ابن رشيد ما رايتُ عالماً بالمغرب الا رجلين ابن البنّا بمراكش وابن الشاط حسبتة وقال غيره كان اماماً معظّماً عند الملوك له حظّ وافر في علوم الشريعة مع الغاية القصوى في العلوم القديمة.·. قال تلميذه البجاي كان وقورا حسن السيرة قوي العهد فاضلا مهذّبا حسن الهيئة معتدل القد رفيع الثياب طيّب المأكل يسلّم على من لقيه ينصرف عنه من كلمه راضيا محببا عند العلماء والصلحاء ذا جادة مع قلة الكلام جدا لا يغدر ولا يتكلم بغير علم يسكت جميع الناس لكلامه محققا بلا خطا.·. وقال ابن شاط له حظ وافر في علوم السنة والنجوم لازمَ الولى ابا زيد الهزميري فاعطاه ذكراً دخل به في الخلوة عاماً وقال له مكنك اللّه من علوم السماء كما مكنك من علوم الارض واطلعه ليلة علي دارة الفلك حتى شاهدها وعاين مجري الشمس فهاله ذالك فقال له الهزميري اثبت حتى تشفَ في رويته ثم قال له قد فتح عليك فيما رايت فوصل من وقته الغاية في الهيئة والنجوم وكان يداوم الصوم في الخلوة لتصحيح امر الفلك حتى راى مرّة وهو مصل بين يديه قبّة نحاس محبوسة في الهوي لا مثل لها و في وسطها شخص متعبد فهاله ما راى ولم يثبت لذلك وسمع اصوا تاهايلة تناديه ادن منّا يا ابن البنّا فغشى عليه فسمع به ابو زيد الهزميري فجاءه ومسح علي صدره فرجع الرحسّه في وقته ثمّ قال له انا ذاك الرجل الذي في القبّة امرت ان اخبرك فيها فلم تقدر ثمّ اخبره بما طلب.·. قال ابن شاط جاءه رجل يوماً فقال مات والدي ولم نصب ماله وقيل انه دفنه بداره فنحب خاطرك لوجهه تعالى فسكت ثمّ قال له صوّر لى صورة الدار في

tune est dans cet endroit de la maison. » L'homme s'en alla, creusa dans l'endroit et trouva la fortune. Il y a bon nombre d'histoires de ce genre racontées sur *Ibn Albannâ*.

Il reçut des leçons du Kâdi Chérif Mohammed ben Ali ben Yahya sur le livre de *Sibouyeh* (1), il s'attacha assidûment à cette étude et à celle d'Euclide d'après Abou Ishak Alattâr Al Djezouli; il apprit les latitudes des lieux (la géographie) sous Al Kalloussi, et le hadits (tradition) sous Abdallah ben Abd al Malek et son frère, et il en tira une grande utilité. Il étudia la jurisprudence sous Abou Amrân Moussa Al Zenâti, il reçut de lui son commentaire du « *Mouwatta* » (2), et du Kâdi El Meghiabi l'*Irchâd*, et d'Ibn Hedjadj El Moustasfi le *Haoufiéh ou el tehèzib*. Il acquit la science du Sunna sous le Kâdi Ibn Al Hedjadj Youssouf Al Tedjibi, et Yakoub Al Djezouli et Abou Mohammed Al Bostâni, la science de la médecine sous le médecin Ibn Hedjlett, et l'astrologie sous Ibn Mokhlouf Al Sedjalmassi. Il composa de nombreux ouvrages, entre autres:

Explication sur le *Bism'illah* (3).
Notice marginale sur la révélation.
Livre sur la cognation des conjoints (4).
Un autre sur les traces de l'écriture révélée.
Sur l'explication des deux sourates: *El a'sr* et *el kothr*.
Introduction aux dogmes religieux.
Fin de la chose demandée sur les dogmes.
Avis intelligible pour ceux qui atteignent les sciences.
Commentaire sur le Tenqyyh d'Al Karafi.
Les traces de la voie dans la science de la vérité.
Commentaire du livre précédent.
Abrégé du traité d'*Al Gazâli*, intitulé: *El-Hiya*.
Des universaux en logique, avec commentaire.
Les syllogismes, avec commentaire.
Dissertation sur la réponse aux questions de droit et d'astronomie.
Réponse à celui qui dit qu'il connaît le temps du coucher du disque du soleil par la vue d'une verticale qui lui est opposée, et démonstration qu'il ne trouve pas absolument juste.

(1) *Sibouyeh* est le nom d'un grammairien arabe très-célèbre. Ce nom dérivé d'un mot persan, signifie odeur d'abricot (*odor mali armeniaci*) — Kamous — page 381 du *Lexicon arabico-latinum* de Freytag.

(2) Ou aplanissement des difficultés da droit musulman par le docteur Malek, fondateur de la Secte Malékite.

(3) Sur la formule de prière commençant par les mots: *Bism'illah*.... (Au nom de Dieu).

(4) Les conjoints dont il s'agit ici, sont sans doute *Fâtmeh*, la fille du prophète *Mohammed*, son époux *Ali*, et ses deux fils *Hassân* et *Hosseïn*.

Traité complet de la langue arabe savante.
Le verger fertile en fruits excellents.
Composition de livres *El Feràïdh* (1).
Commentaire sur *El Haoufi* (2).
De l'aveu des obligations ou servitudes.
De l'affranchissement après la mort du maître.
Le *Talkhys* sur le calcul, avec commentaire (3).
Introduction à *Euclide* (4).
Les quatre discours (5), les règles, les principes et les préliminaires.
Fragment sur *Dzouât el isma ou el monfeselât* (6).
Un autre sur l'opération d'après le procédé grec.
Discours sur les mesures de capacité légales.
Sur l'art de mesurer la terre, ou géodésie (7).

(1) Proprement « les statuts de la loi sacrée » et plus particulièrement « le règlement d'après le *Koran* des portions des héritages » cette expression pourrait se traduire simplement ici par le « partage des successions. » C'est une partie de la science du Nombre, c'est une branche des mathématiques appliquées à la jurisprudence musulmane.

(2) Selon *Ibn Khaldoûn* il faut placer *Al Haoufi* au premier rang des auteurs de *Féràïdh*, et regarder son traité comme supérieur à tous les autres. Dans notre préface au *Talkhys*, nous avons dit que ce traité du Kâdi *Abou'l Kâcim Al Haoufi*, intitulé *Kitab ab Haoufi fy'l ferâïdh*, formait les 98 premiers feuillets du ms. de la Bibliothèque Bodléyenne d'Oxford, n° CCXVII de la première partie du catalogue latin dressé par Jean Uri, et que sur le dos de cuir se trouvait imprimé en lettres d'or un seul nom « *Al Hufi* », tandis que le volume contenait quatre traités différents parmi lesquels le *Talkhys* d'*Ibn Albannâ*.

(3) Parmi les ouvrages mathématiques d'*Ibn Albannâ* mentionnés dans la liste bibliographique donnée par le *Tekmilet ed dibadj*, ne figurent ni le *Raf'ou'l hidjâb* (soulèvement du rideau) cité par *Ibn Khaldoûn*, lequel est un commentaire d'un ouvrage fort étendu sur le calcul « *Al hiçârou' l saghyr* », ni l'abrégé du même ouvrage composé par *Ibn Albannâ*, abrégé qui renferme les règles des opérations du calcul. Selon toute vraisemblance cet abrégé n'est autre que le *Talkhys fi hissâb* ou *Talkhys amâli al hissâb*, comme le porte le titre même du manuscrit.

(4) Selon *Ibn Khaldoûn*, le traité d'*Euclide*, intitulé « le livre des éléments et des fondements » est le premier ouvrage qui ait été traduit du grec en arabe. Cela eut lieu du temps d'*Abou Djàfar Almansour*. Il renferme quatre livres sur les nombres, et l'ouvrage d'*Ibn Albannâ* intitulé les « *Quatre discours* » pourrait bien se rapporter à cette partie du traité d'Euclide, relative aux nombres.

(5) *Al Kalçâdi*, dans son commentaire du *Talkhys*, parlant du cas où la sommation des carrés et des cubes des nombres pairs ou impairs se fait à partir d'un terme de rang quelconque, s'exprime ainsi: «L'auteur n'a pas signalé ce cas dans le présent ouvrage, mais il l'a signalé dans les « *Discours* ». Et sur ce dernier mot, M. Woepcke fait cette observation (page 10, note ** de sa brochure: *Passages relatifs à des sommations de séries des cubes, extraits de deux ms. arabes inédits, Rome*, 1864): « Cela » peut signifier que l'auteur, *Ibn Albannâ*, a exposé ces règles verbalement, ou qu'il les a exposées » dans un ouvrage intitulé « *les discours* » ou dans un ouvrage divisé en « discours » c'est-à-dire en » « livres » ». La liste des ouvrages d'*Ibn Albannâ* produite par le *Tekmilet ed dibadj* fait voir que des trois hypothèses de M. Woepcke, c'est la seconde qu'il faut maintenant adopter.

(6) Nous avons vu page 25 du *Talkhys* que cette division était celle d'un nombre par un binôme de la forme $a + \sqrt{b}$.

(7) La géodésie est considérée comme une branche du calcul appliqué à la géométrie. *Ibn Khaldoûn*

Grande route de l'étudiant, ou chemin frayé pour le calcul astronomique (1).
Discours sur l'astrolabe.
De l'opération par la tablette, la pique, etc.
Du *Kiblah*. Mention des côtés dans la détermination du *Kiblah,* et interdiction de les changer.
Sur le noyau central et la figure des astres.
De l'agriculture.
Sur les six sommes ou totaux avec le *djedoul.*
Règle sur les défauts du savoir.
Règle sur la distinction entre la science et le savoir.
Commentaire de l'énigme d'*Ibn el Faradh.*
Lettre sur la description des huit sciences.
De la dénomination des lettres et de leurs propriétés en tête des Sourates.
Lettre sur la nature des caractères de l'alphabet.
Lettre sur les noms des attributs de Dieu.
Différences entre le miracle surnaturel, le prodige naturel et la magie.
Fragment sur leurs conformités.
Sur les enchantements et les exorcismes.
Sur la manière de faire les talismans.
Fragment sur les rapports.

dans ses Prolégomènes, n'a nommé aucun auteur de traité de géodésie. Voici en quels termes il s'exprime sur la science elle-même :

« On a besoin de cette science pour mesurer le sol, et son nom signifie la détermination de » la quantité du sol; cette quantité est exprimée en empans ou coudées ou autres mesures, ou bien par » le rapport de deux quantités de terrain, lorsqu'on en compare une à une autre semblable. On a be- » soin de ces déterminations pour fixer les impôts sur les champs ensemencés, sur les terres labourables » et sur les plantations, pour partager des enclos et des terres entre des associés ou des héritiers, ou » d'autres buts semblables. On a écrit sur cette science de bons et nombreux ouvrages. » (Woepcke, page 12 des « Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. Rome, 1856.) » L'un des plus anciens traités sans contredit doit être celui qui contenu dans l'Algèbre de *Mohammed ben Moussa Alkhowârezmi*, et dont nous avons donné la traduction en français, en 1846, d'après la version anglaise de Rosen, sous le titre de « Partie géo- » métrique de l'Algèbre de *Mohammed ben Moussa.* »

(1) *Ibn Khaldoun* (Prolégomènes, p. 14 de la traduction déjà citée de M. Woepcke) nous fournit un passage intéressant relatif à cet ouvrage d'*Ibn Albannâ.*

« Dans l'Occident, dit—il, les modernes, jusqu'au jour présent, s'en sont rapportés aux tables » astronomiques attribuées à *Ibn Ishâk*. Les savants de l'Occident ont fait beaucoup de cas de ces Ta- » bles à cause de la solidité des bases sur lesquelles elles sont fondées, à ce qu'on prétend. Plus tard » *Ibn Albannâ* a fait un résumé de ces Tables qu'il appela Alminhâdj (la grande route, le chemin ou- » vert, le chemin frayé). Cet ouvrage est très—recherché à cause de la facilité qu'il donne aux opé- » rations. »

Discours sur le culte du démon, l'horoscope et l'art du devin.
De l'écriture sur le sable et autres genres d'horoscope (1).

Ibn Albannâ (que Dieu le Très-Haut lui soit clément!) naquit à Maroc le jour d'Arafat (2) en l'année 654 ou 649. *Al Hadhrâmi* a dit, dans son Index, qu'il était grave, discret, humble, vertueux, habile dans diverses sciences, auteur d'ouvrages qui ont embelli l'éclat de chacune d'elles. Il a dit qu'il avait écrit avec plus de détails sur les histoires et chroniques relatives à *Ibn Albannâ.*

(1) L'astrologie, d'après *Ibn Khaldoûn*, est une science qui « consiste dans la connaissance des » indices d'après lesquels arrive, suivant les positions des astres, ce qui se passe dans le monde des» hommes en fait de règnes, de dynasties, de nativités humaines, d'accidents extraordinaires.» (Traduction de M. Woepcke, p. 15 de la brochure déjà citée.)

(2) *Arafat* est le nom d'une montagne dans le voisinage de la Mecque, et l'on appelle *jour* d'*Arafat* le jour solennel, où les pélerins y vont accomplir leurs devoirs religieux; c'est le 9.e jour du mois de dou'l hidjâ. Des deux dates indiquées si l'on adoptait la seconde, Ibn Albannâ serait né en 1252 de l'ère chrétienne, c'est-à-dire l'année de la mort de Blanche de Castille, régente de France pendant l'absence du glorieux roi St. Louis, son fils, et de l'avènement au trône de Castille d'Alphonse X, le Sage ou le Savant, l'auteur de livres astronomiques et spécialement des Tables dites Alphonsines.

A. Marre

FIN.

Considerazioni sulla tensione, tanto in elettrostatica, quanto in elettrodinamica, e sulla elettrica influenza.
Undecima comunicazione del prof. P. Volpicelli (1).

La presente comunicazione ha per fine principale, di rettificare quanto dal ch. sig. Gaugain si è pubblicato nel 1865 sul proposto argomento, nei Comptes Rendus (t. 49, p. 729, e p. 1097), nell'Institut (N.ⁱ 1609, 1617), e negli Annales de chimie et de physique (4.ª serie, t. 4.°, p. 214).

PARTE PRIMA

ELETTROSTATICA

1.° Ciascun fisico ha giustamente ritenuto fin ora, essere la *elettrica tensione* una forza repulsiva, fra le molecole della elettricità di egual nome. Deve però aggiungersi, che la forza medesima possiede ad un tempo la virtù influente, cioè quella di decomporre l'elettrico naturale, attraendo l'*eteronomo*, e respingendo l'*omonomo*. Perciò l'attuale divergenza di opinioni sullo stato della elettricità indotta, non dipende affatto, contro quello che si pretende (2), nè da confusione di linguaggio, nè da veruna discordanza sul significato della *elettrica tensione*. Questa divergenza, come già dicemmo (3), dipende unicamente dal non avere la maggior parte dei fisici veduto, che su quell' estremo dell' indotto isolato, il più prossimo all' inducente, si trovano insieme le due contrarie elettricità, senza potersi neutralizzare fra loro, perchè una di esse trovasi priva di tensione. La esistenza della forza repulsiva fra le molecole dell'elettrico libero, e di egual nome, nè si può contestare, nè si lega punto ad idee sistematiche. La forza medesima è un fatto, che si può chiamare come si vuole ; ma che i fisici tutti, da Poisson (4) in poi, ragionevolmente la dissero *elettrica tensione*, o

(1) Per le precedenti comunicazioni, V. questi Atti, t. XVIII, p. 59. — La presente comunicazione fu pubblicata per estratto nei Comptes Rendus, t. 61, pag. 548, an. 1865, e riportata nell'Institut, num. 1661: fu poi pubblicata per intero nel giornale Les Mondes, t. 9. pag. 238.

(2) L'Institut N.° 1609, p. 349, prima colonna, li. 31.

(3) V. questi atti, t. XVIII, pag. 60.

(4) Mém. de l' Institut Imp. de France, année 1811, p. 5 et 6.

repulsione, ed anche *forza elettroscopica*, nè poteva meglio nominarsi. Vero è che la natura intima di questo fatto non si conosce; ma ciò nulla ostante gli effetti suoi sono manifesti, e possono formularsi *algebricamente*.

2.° Non esiste sull' indotto isolato una parte dissimulata di elettricità omologa della inducente, contro quanto si asserisce (5): se questa vi fosse, dovrebbe la nota sperienza di Wilcke (6) manifestarla. Invece colla medesima sperienza si dimostra il contrario; nè riescirà mai dimostrare *sperimentalmente* tale pretesa esistenza; perchè, come ora vedremo, la tensione o forza repulsiva si confonde coll' attitudine a produrre corrente; nè si debbono questi due fatti, cioè la tensione, e l'attitudine indicata, ricevere in senso fra loro diverso, perchè in sostanza esprimono l'uno e l'altro la stessa cosa.

3.° La quistione attuale sulla influenza elettrica, deve discutersi, dando alla voce *tensione* il significato, che fino ad ora tutto il mondo le dette; vale a dire quello di una *forza repulsiva* fra le molecole di un medesimo elettrico: altramente la quistione, che riguarda un fatto indubitato, e non un nome, perderebbe molto di sua chiarezza.

4.° La tensione, ossia forza repulsiva elettrica, cagiona l'attitudine a produrre corrente ; quindi ambedue crescono e diminuiscono insieme , potendo ciascuna di esse rappresentare l'altra, ma solo in astratto, e non sperimentalmente. Dunque il distinguere la tensione dall'attitudine indicata, non è necessario, nè giova punto nella quistione sulla elettricità indotta. Quello che importa è, che niuna di queste due facoltà può misurarsi per mezzo della corrente, come ora vedremo; salvo in un solo caso. Per tanto se volesse chiamarsi attitudine a produrre corrente, ciò che fu detto tensione, sarebbe quanto introdurre un altro nome per la stessa cosa, contro l'uso comune. Perciò noi diciamo col sig. Quet « Quant au mot tension électrique, Laplace et Poisson » l'ont employé dans un sens précis, et il me semble qu'il serait bon que l'on » employât ce mot uniquement à la manière de ces deux grand géometres (7)».

5.° La misura della elettrica forza repulsiva o *tensione*, non può farsi mediante l'effetto da essa prodotto sul galvanometro, salvo in un solo caso. In fatti *primieramente*, quando la tensione sia tanto debole, da non potersi manifestare altro che pel condensatore, come il più sovente accade per la

---

(5) L'Institut, N.° 1609, p. 350, prima colonna, li. 3.
(6) Gehler's phys. Wört vol. 3, an. 1827, p. 302. — Comptes R. t. 39, p. 178, li. 2.
(7) Révue de l' instruction publique, N.° 18, du 3 aöut 1854, p. 276, terza colonna.

elettricità dell'atmosfera, *presa coll'asta fissa*; non è possibile allora ottenere corrente che agisca sull' ago del galvanometro. *Secondariamente* a misurare per mezzo della corrente la elettrica tensione di un punto, fa d'uopo mettere un filo metallico in comunicazione col punto medesimo; però senza che in questo cangi menomamente nè la elettrica *accumulazione*, nè la *influenza repulsiva* sul medesimo, procedente dagli altri punti ad esso circostanti. Ma ciò, salvo in un solo caso di elettricità voltaica, è sempre impossibile; poichè, trattandosi di elettrostatica, la induzione sul filo, per l'avvicinamento di questo a quel punto, cangia subito la elettrica tensione sul medesimo. Dunque, sebbene non vi fossero altre difficoltà, già per questa sola, non potrebbe la corrente misurare la tensione di un punto appartenente ad un corpo elettrizzato; e perciò neppure l'attitudine del punto stesso a produrre quella corrente. Inoltre se, dopo stabilita la comunicazione di quel punto col suolo, fosse possibile mantenere la elettrica distribuzione com'era un *istante* prima del contatto col filo, potrebbe almeno la corrente misurare quest' ultima tensione ; che per altro neppure sarebbe quella cercata. Ma il mantenere questa ultima distribuzione precedente per un istante al contatto, neppure può in elettrostatica effettuarsi; perciò in questo secondo caso la corrente non misurerà veruna delle indicate due tensioni , quindi veruna delle due corrispondenti facoltà del punto a produrla : ma invece dalla corrente si misurerà la tensione del punto, dopo che il flusso elettrico fu stabilito *costantemente*.

Per meglio dichiarare questo secondo caso, poniamo che un conduttore elettrizzato ed isolato, si scarichi mediante un filo di lunghezza finita; la durata, sebbene piccolissima, della corrente non può considerarsi a rigore istantanea; nè possiamo supporre che la corrente medesima sia costante. Quindi è che la tensione del punto messo in comunicazione col suolo , e perciò anche la intensità della corrente, decrescerà per gradi. Chiaro dunque apparisce che , nel caso medesimo , le indicazioni galvanometriche non avranno quel significato che avrebbero, quando si trattasse di correnti costanti. Per trovare nel caso medesimo il vero significato galvanometrico, la sola ipotesi è di ammettere, che la forza viva dp ricevuta dall'ago in un tempuscolo dt, sia proporzionale tanto alla intensità i della corrente, quanto alla durata del tempuscolo. Vero è che l' impulso ricevuto dall'ago in un determinato tempuscolo, per effetto della corrente, dipenderebbe anche dalla posizione dell'ago stesso, nell' istante che si considera. Ma possiamo ritenere tale posizione come sensibilmente la stessa, nel brevissimo tempo in cui dura la corrente della sca-

rica elettrica. Per tanto avremo

$$dp = aidt\,, \qquad \text{ovvero} \qquad p = a\int idt\,,$$

essendo a una costante. I limiti di questo integrale sono evidentemente quelli, nei quali è compresa la durata t della corrente. Il differenziale idt, è proporzionale alla quantità di elettrico, passato nel tempuscolo dt, per una qualunque sezione del filo. Quindi l' integrale

$$\int idt\,,$$

esprime proporzionalmente il totale di elettrico, passato nel tempo t pel filo stesso; cioè rappresenta la carica del conduttore, che si è fatta comunicare col filo. Da ciò dobbiamo concludere, che la forza viva ricevuta dall'ago magnetico, è proporzionale alla carica del conduttore stesso; quindi le indicazioni galvanometriche daranno in questo caso la misura della carica totale, non già della tensione o forza repulsiva del punto, purchè però l' istromento sia prima graduato all' uopo.

6.° Certamente il dotto fisico Ohm, ha considerato come una sola e medesima cosa la forza repulsiva, chiamata da esso *elettroscopica*, e la *forza o attitudine* a produrre corrente (8); lo che si accorda coi nostri concetti precedenti; ma non ha egli misurato mai la forza repulsiva od elettroscopica, per mezzo della corrente che ne deriva; e per misurare la forza colla quale l'elettrico respinge se stesso, adoperò tanto l'elettroscopio, quanto il piano di prova (9). La tensione (spannung) di una coppia, che comunemente chiamasi *forza elettromotrice*, fu dal citato autore chiamata *differenza elettrica* (10), vale a dire, differenza delle due forze elettroscopiche manifestate fra due contigui dei tre elementi di una coppia. Ohm e Coulomb sono perfettamente in accordo, per la misura della tensione in un punto; perchè ambedue l' hanno misurata col piano di prova (11) ; ma il primo ha misurato col galvanometro la sola *intensità* di una corrente (12), non già la elettrostatica tensione. Dunque Ohm non si è ingannato, perchè non ha egli « *identifié la proprieté, nouvelle dont il a introduit la considération, avec la propriété qui était déjà connue sous le*

---

(8) L'Institut, N. 1609, p. 349, li. 9 salendo, prima colonna.

(9) Théorie mathématique des constants électriques traduite par M.r Gaugain. Paris 1860, p. 72.

(10) Grundzüge der Physik. Nürnberg 1853, p. 328.

(11) Mém. de l'Institut 1811, note (12).

(12) Grundzüge, p. 372.

nom de tension (13). Quindi mi sembra non potersi ammettere, che per misurare la tensione *de l'électricité, on a employé tour a tour les deux méthodes essentielment différentes* (14); poichè, come ora vedemmo, fu impiegato l'elettroscopio per la forza repulsiva , ed il galvanometro per la intensità della corrente.

7.° Rigorosamente parlando, non può la tensione, o forza repulsiva, chiamarsi *épaisseur de la couche électrique accusé par le plan d'épreuve* (15); perchè non conviene dare alla causa, il nome di una soltanto delle varie quantità da cui la causa stessa dipende. In fatti adottando il principio, dimostrato prima da Laplace, poi riprodotto da Poisson, cioè che: alla *superficie* di ogni corpo elettrizzato, la forza repulsiva, o tensione del fluido, è per tutto *proporzionale* alla ertezza del medesimo (16) ; ne viene , alquanto riflettendo , che la forza repulsiva *elementare*, in un punto qualunque, contenuto nella ertezza ρ, appartenente allo strato elettrico , sia proporzionale a quella parte y della ertezza stessa , che si trova sotto al medesimo punto. Quindi con facile calcolo si ha la formula

$$R = H\delta^2\omega\int_0^\rho y dy = \frac{H\delta^2\omega}{2}\rho^2 ,$$

nella quale rappresenta R la forza repulsiva totale, corrispondente alla ertezza ρ, forza che Poisson ha chiamato anche *pressione contro l'aria* (17), H un coefficiente costante, δ la densità costante dell'elettrico per tutta la ertezza stessa, ed ω la uniforme sua sezione (18). Per tanto mi sembra, come già dissi, non potersi

(13) L'Institut, N.° 1617, p. 414, prima colonna, li. 8.

(14) L'Institut, N.° 1609, p. 349, prima colonna, li. 34; e N.° 1617, p. 413, seconda colonna, li. 5 salendo.

(15) Ibidem, li. 12 salendo.

(16) Mem. cit. di Poisson, pag. 6, li. 1; e pag. 34, li. 14.

(17) Mém. cit. di Poisson pag. 6, li. 3.

(18) In un punto qualunque della superficie di un corpo eletrizzato, s' immagini una colonnetta, presa nell' elettrico strato corrispondente a quel punto del corpo, la quale, alta quanto l'ertezza ρ dello strato medesimo nello stesso punto, sia normale alla superficie , e possegga costante la sua densità δ, e la sua sezione ω. Si divida questa colonnetta in tanti prismetti elementari; sarà il volume appartenente ad uno qualunque di questi, espresso da ωdy, e la sua massa da $\delta\omega dy$. Ma la forza repulsiva che possiede ciascuna molecola di questa massa, per l' adottato principio, dev' essere proporzionale alla ertezza y, che al prismetto elementare medesimo è sottoposta; dunque la forza repulsiva dR del prismetto stesso, avrà per espressione

$$dR = H\delta\omega y dy .$$

ammettere, che ad R sia dato il nome di ρ; potrà soltanto dirsi con Poisson, che la forza repulsiva o tensione, in *un punto qualunque* dello strato elettrico, è direttamente proporzionale alla sottoposta ertezza di esso. Laonde concludiamo che l'analisi fornisce una formula, esprimente la elettrica tensione o forza repulsiva, rappresentante ancora l' attitudine a produrre corrente; ma che la sperienza non possiede fino ad ora verun mezzo, per giungere allo stesso fine, salvo in un solo caso di elettricità voltaica: nè la sperienza ci potrà mai fornire numericamente le quantità, da cui dipende il valore di R, nella formula sopra espressa.

8.° Secondo la nuova teorica da me sostenuta, sulla elettrica influenza, un cilindro isolato, e indotto, si ricopre per tutto di un elettrico strato omologo della inducente. Questo solo strato può agire sul piano di prova; giacchè, sebbene sull'indotto medesimo, esista pure un secondo strato elettrico al primo contrario, tuttavia questo non ha facoltà, nè di produrre corrente, nè di agire sul piano di prova. Quindi la tensione sull' indotto, cioè la forza repulsiva sul medesimo, è per tutto della stessa natura, cioè omologa della inducente; ma non è per tutto della stessa intensità, finchè l'indotto rimanga isolato sotto la induzione; lo che per altro non conduce menomente all' assurdo della realizzazione del moto perpetuo. Per conseguenza non si può dire « *si l'on pouvait trouver sur le cylindre influencé deux points dont la tension ne fût pas la même, dans l'état d'équilibre, un courant s'établirait necessairement entre ces deux points à travers le cylindre, et l'on aurait la réalisation du mouvement perpétuel* » (19). In fatti la elettrica tensione, o attitudine a produrre corrente, agisce in elettrostatica *normalmente* soltanto, e non mai tangenzialmente, alla superficie del corpo isolato (20). Laonde non può esservi corrente fra i diversi punti di un conduttore elettrizzato, ancorchè questo abbia superficie diversa dalla sferica; ed anche fra i diversi punti di una pila non chiusa, sebbene sia diversa nei medesimi l'attitudine a produrre corrente.

Integrando fra i limiti ρ, o, avremo

$$R = Hd\omega\int_0^\rho ydy = \frac{H\delta\omega}{2}\rho^2 ,$$

per la misura della forza repulsiva totale, da cui viene animato l' estremo superiore della colonnetta considerata; ovvero per la misura della tensione di un punto qualunque alla superficie di un corpo elettrizzato.

(19) L' Institut, N.° 1617, p. 414, colonna prima, li. 24 salendo.

(20) Mém. de l'Institut Im. année 1811, p. 34 – Götting. gelehrte Anzeigen 1840, p. 492.

È poi contro la sperienza il dire « *lorsqu' un cylindre isolé est soumis à l' influence d' une sphère chargée d' életricité positive , et placée près de l'une de ses éxtremités, la couche électrique, accusée par le plan d'épreuve change de signe. . . . lorqu'on se transporte d'un point à un autre du cylindre; elle est negative a l'extremité voisine de la sphère , positive à l'extremité opposée, nulle sur une ligne intermédiaire appellée ligne neutre* (21) ». Dissi è contro la sperienza ; perchè valendosi di un piano di prova *conveniente*, cioè un dischetto metallico che abbia due o tre millimetri di diametro, si trova esistere la omologa della inducente in *qualunque* punto dell' indotto; perciò lo strato elettrico accusato dal piano di prova, cangia di grandezza, ma *non di segno*; e ciò avviene perchè la indotta è priva di tensione, cioè non può neutralizzarsi colla omologa della inducente , sebbene queste contrarie elettricità consistano sull' indotto isolato. Neppure si può dire che « *sur la ligne neutre on ne trouve point d' électricité appreciable au plan d'épreuve* (22) », poichè il piano di prova sopra indicato, accusa per qualunque punto dell' indotto, la elettricità omologa della inducente.

9.° I fisici tutti già sapevano che « *si l'on conçoit des communications établies entre la terre et les diverses regions du cylindre . . . . tous les courants dérivés seront de même sens* (23). Da questo solo fatto si può certamente concludere, che la indotta non tende, cioè che non possiede forza repulsiva; per conseguenza neppure attitudine a produrre corrente, e ad agire all' esterno , altramente queste correnti non anderebbero tutte nel medesimo senso.

10.° Non posso ammettere che la *divergenza* delle foglie d'oro, annesse a quell' estremo di un cilindro indotto ed isolato , il più prossimo all' inducente , sia quistione non ancora risoluta. Poichè ho dimostrato essere quella divergenza prodotta dall' attrazione della inducente , non già dalla pretesa, e non esistente repulsione della indotta; debbo dunque respingere la frase « *Cette question n'est pas tranchée* (24) ». Ho ancora dimostrato, non potersi concedere, che la indotta nelle foglie d'oro, mentre non può nè abbandonarle, nè muoversi, possa esercitare al di fuori una forza repulsiva; ed

(21) L'Institut N.° 1617, p. 414, príma colonna, li. 27.
(22) Ibidem, li. 17 salendo.
(23) L'Institut, N.° 1617, p. 414, prima colonna, li. 37.
(24) L'Institut, N.° 1617, p. 414, seconda colonna, li. 2.

ora lo confermo colla seguente sperienza *ventunesima* (25). Sotto un elettrometro *non isolato*, e composto di due sottili foglie metalliche, fra le quali con opportuno *congegno* può scorrere salendo e scendendo un filo metallico, si ponga il bottone di una bottiglia di Leida caricata. Le sottili foglie divergeranno dalla posizione loro verticale, per l' attrazione procedente dalla influenza *curvilinea*. Quindi, se fra le medesime divergenti si faccia scendere o salire il filo stesso *non isolato*, le foglie si conserveranno sempre ugualmente divergenti. Perciò la indotta non respinge se stessa, e non esercita veruna forza repulsiva di fuori. Se poi, tolta la bottiglia, ed isolato il detto sistema elettrometrico, si comunichi ad esso una carica elcttrica; in tal caso, facendo salire o scendere fra quelle due foglie il filo conduttore *isolato*, ed elsttrizzato anch' esso, queste diminuiranno la divergenza loro quando il filo sale, accrescendola quando scende. La riferita sperienza esige, come tutte le altre di tal genere, che l'atmosfera sia ben secca.

11.° Supponiamo che un cilindro di rame rimanga isolato dentro un vaso di rame, contenente una soluzione di questo metallo, ed avente nel suo centro una sfera di rame, isolata pur essa. Inoltre supponiamo che una volta la corrente traversi tutto questo sistema, portandosi dalla sfera sul cilindro, e che in un' altra, tolta dal vaso la soluzione, il cilindro subisca della sfera medesima la elettrostatica influenza. Dietro queste supposizioni fu concluso che « *les phénomènes d' influence qui se produiront* (sans liquide) *seront régis par les mêmes lois que les phénomènes de conduction qui se produisaient avec le liquide. En consequence* (selon cette conclusion) *les épaisseurs des couches électriques, correspondant à des points déterminés, dans le cas de l' influence, auront entre elles les mêmes rapports, que les grandeurs des actions chimiques effectuées aux mêmes points dans le cas de la conduction* (26).

A me però sembra che non solo quest'analogia, conclusa, fra i fenomeni della influenza e quelli della conduzione, non sia dimostrata; ma di più sembrami che neppure possa verificarsi. Ed in fatti, per la legge di Ohm, la diminuzione della forza elettroscopica, ossia tensione della corrente, avviene uniformemente da un estremo all'altro dell'immaginato cilindro, e perciò si rappresenta dalle ordinate di una linea retta, inclinata verso il cilindro stesso, cioè verso la dire-

---

(25) Per le precedenti sperienze v. *Comptes Rendus*, t. 60, année 1865, p. 1338, li. 24. e v. questi Atti, t. XVIII, p. 59.

(26) L' Institut, n. 1609, p. 349, seconda colonna, li. 45.

zione della corrente. Ma nel caso della influenza, la teorica di Poisson presenta difficoltà tali, che fin'ora non furono superate; quindi la funzione che in questo caso rappresenterebbe la elettrica tensione sul cilindro, esser dovrebbe di forma complicatissima, non già lineare, come dovrebbe verificarsi per le pretese conclusioni sopra indicate. Riflettendo inoltre alla gravezza delle difficoltà, che l'analisi elettrostatica presenta, nel caso della influenza mutua fra due sfere, caso molto più semplice di quello in proposito fra la sfera ed il cilindro, è chiaro che la soluzione analitica di questo medesimo caso, non è per ora da sperare.

Se l' analogia sopra indicata fosse vera, le quistioni che si riferiscono alla elettrostatica, sarebbero semplicissime; quindi la citata teorica di Poisson sull'equilibrio dell'elettrico, sarebbe del tutto rovesciata dall'analogia stessa.

Queste obbiezioni all' analogia pretesa fra la influenza elettrostatica, e la conduzione elettrodinamica, sono piuttosto analitiche, e riguardano soltanto la elettrica distribuzione sotto il punto di vista quantitativo. Quindi potrebbe credersi, che l'analogia medesima possa verificarsi, almeno riguardo al qualitativo, cioè riguardo alla natura dell' elettrico. Ma ciò neppure ha luogo: in fatti nella solita sperienza del cilindro indotto, prendendo questo bastantemente lungo, e mettendo in comunicazione col suolo l' estremo di esso il più lontano dall'inducente, si verificherà nell'estremo stesso, uno stato elettrico sensibilmente neutrale; lo stato elettrico del cilindro stesso però, anderà crescendo avvicinandosi all'altro estremo. Per tanto, volendo produrre il caso simile della conduzione, bisognerà fare che comunichi col suolo, cioè col vaso di rame, quell' estremo del cilindro immerso nella soluzione, il più lontano dalla sfera. Ma così operando, e supponendo che la sfera comunichi con una sorgente elettro-positiva, la galvanoplastica insegna che il rame si deposita eziandio sull' estremo del cilindro, posto a comunicare col suolo; e non si verificherà punto che questo deposito diminuisce coll' allontanarsi dall'inducente, cosicchè sia sensibilmente nullo nell'estremo indicato, come dovrebb'essere quando l'analogia pretesa fosse vera.

Osservazione. I brani quì analizzati, furono tolti dal giornale *l'Institut*, però si trovano essi pubblicati anche negli *Annales de chim. et de physique, quatrième série, t. 4.ᵉ février* 1865, *p.* 214, in una memoria del sig. Gaugain, che ha per titolo » *Sur la théorie des condensateurs électriques, considérés dans l' état permanent, et dans l' état variables des tensions*. Le formule di questa memoria sono tutte basate sulla

$$F = \frac{1}{1 - m^2};$$

ma ho dimostrato (27), che questa formula è inesatta, e che alla medesima deve sostituirsi l'altra

$$F = \frac{1}{1 - m},$$

la quale sola si accorda colla sperienza.

PARTE SECONDA

ELETTRODINAMICA

12.° Venendo a considerare la elettrica tensione in elettrodinamica, dobbiamo distinguere tre casi. *Primieramente* trattandosi di trovare la tensione di un punto del filo di congiunzione, appartente ad una pila, o ad una coppia, l'una e l'altra chiusa; il secondo filo che stabilisce la comunicazione di quel punto col suolo, produrrebbe nella elettrica distribuzione del circuito un cangiamento, che può assegnarsi coll'analisi, applicando la legge di Ohm. Accade adunque in questo caso come in elettrostatica, che si misurerebbe una tensione, od un attitudine a produrre corrente nell' indicato punto, diversa da quella che si voleva misurare, cioè che al punto stesso apparteneva, prima che fosse posto a comunicare col suolo, mediante il secondo filo. *Secondariamente* se vogliasi determinare la tensione del punto, in cui risiede la forza elettromotrice di una *semplice coppia* non isolata e aperta, la corrente sarebbe opportuna; giacchè in questo caso trattasi di una tensione, che appartiene ad una sorgente inesausta, e che non può variare. Se la coppia fosse isolata, chiusa o aperta, la comunicazione col suolo non produrrebbe durevole corrente, ma istantanea, la quale nonvalerebbe, per le cose dette nella prima parte, a misurare la tensione. *In terzo luogo* finalmente, quando si tratti di trovare la tensione, o l'attitudine a produrre corrente, fra gli elementi di una qualunque delle coppie che com-

---

(27) Comptes Rendus, an. 1865, t. 60, p. 1335. — Archives des scien. phy. et nat. de Genève, nouvelle période, t. 24, an. 1865, p. 132.

pongono una pila , tanto chiusa quanto aperta , la corrente non potrebbe neppure servire. Imperocchè, come dimostra la legge di Ohm, in questo caso ha luogo un grande cangiamento di tensione nei diversi punti di una pila , quando se ne ponga uno in comunicazione col suolo.

Neppure basterebbe per la indicata misura in un punto di un corpo elettrizzato, potere separare isolato il punto stesso, non cangiando affatto la sua carica; perchè cesserebbe sempre sul medesimo la influenza repulsiva dei punti vicini ad esso, e cangerebbe perciò la sua tensione o attitudine a produrre corrente. Però la corrente ottenuta dal punto isolato, potrebbe misurare la sua carica; ma nell' attuale ipotesi, che a rigore non credo praticabile, sarà preferibile sempre misurare direttamente la carica del punto stesso coi mezzi elettrometrici, già conosciuti e adottati.

13.° Concludiamo che tanto in elettrostatica, quanto in elettrodinamica, la corrente non è applicabile per misurare la elettrica tensione, o attitudine a produrre corrente, eccetto il solo *secondo* caso del numero precedente.

Sulla necessità di proteggere dal fulmine le masse metalliche, stabilite nella cima degli edifici. — *Nota del prof.* P. Volpicelli.

Chiunque per poco abbia familiari gli effetti della elettricità, non può mettere in dubbio, che le masse metalliche, poste sulle colonne, sugli obelischi, sulle cuppole, e su qualunque altro edificio, non perfetto conduttore, sono esposte ad essere colpite dal fulmine; quindi è che si debbono queste fabbriche difendere dalla terribile indicata meteora. Disgraziatamente però in Roma, tale verità non fu abbastanza compresa, perchè ancora esistono masse metalliche, sopra monumenti preziosissimi, come sulle colonne Antonina, e Traiana, senza che sieno protette dagli effetti del fulmine, non ostante che questo abbia più volte colpito quelle masse.

A rimuovere tale inconveniente, corre l'obbligo in ognuno, e specialmente in chi si è sempre occupato di elettricità, profittare di qualunque circostanza, per mettere in evidenza ogni ora più, la necessità di proteggere dal fulmine tutti quelli edifici, che possono attirare la procella elettrica, senza disperderla nel suolo. Una circostanza propizia per ciò fare, si è presentata nella notte del 14 di ottobre testè decorso, 1865, nella quale un fulmine colpì la statua di bronzo, collocata sul castel s. angelo, che a guisa di tante altre in Roma, non ha veruna metallica comunicazione col suolo.

A fine di riconoscere gli effetti di quel fulmine, appena tornato in Roma, mi portai nel 16 di novembre, a visitare l' indicato forte, ove trovai che l'elettrico atmosferico aveva colpito la statua di bronzo, rappresentante S. Michele Arcangelo, lasciando in essa tracce di fusione. Quindi l' elettrico stesso era saltato sul basamento di quella statua, spezzandone una sua modanatura di marmo, e lanciandone i brani cinque o sei metri distanti. Da questa base il fulmine passò nella sottoposta piattaforma, ove fuse e disperse non poche delle saldature di piombo, che connettevano fra loro le pietre, da cui viene lastricato quel piano, spezzando alcuni coperchi di marmo che ivi si trovavano collocati. Di poi la elettrica istantanea corrente, si diresse verso una grondaia, che conduceva l'acqua piovana in una cisterna; e da questa la elettricità potè disperdersi nel comune serbatoio, ma prima spezzò alcune pietre incontrate nel suo passaggio.

Da tale recente fatto meteorologico, abbiamo una conferma dell' obbligo, suggerito dalla scienza, di proteggere dal fulmine le masse metalli-

che poste in alto, sopra edifici di materia non conduttrice perfettamente. In fatti l'Osservatore romano del 17 novembre 1865, numero 262, registra nella rivista meteorologica quanto siegue « Sentiamo con piacere che si munirà la » statua (di bronzo del castel s. Angelo) di conduttore metallico, continuato » sino al suolo. *Sarebbe ora che ciò si facesse anche in altri monumenti, e » specialmente nelle colonne Traiana ed Antonina* ». Si poteva però continuare dicendo: I signori duca Massimo, e prof. Volpicelli, pei primi, suggerirono la indicata difesa, e dal sig. Duca stesso, allora ministro del commercio, fu questa decretata, con ordinanza ministeriale del mese di luglio 1848, e fu allogata, con relativo contratto del 1 luglio 1848, al macchinista sig. Angelo Lusvergh, come risulta dal t. I, degl'Atti dei Nuovi Lincei, p. 142...146. Tale ordinanza fu motivata non solo dalle cognizioni elettrostatiche le più incontrastabili, ma eziandio dal fatto, che consiste nell'essere state le colonne medesima più volte colpite dal fulmine, come si vedrà in appresso.

Non sarà inutile richiamare qui alla memoria, che l'accademia nostra dal ministero stesso, con dispaccio del 29 luglio 1848, numero 7149, fu invitata ad esternare il suo parere sulla convenienza di proteggere dal fulmine le nominate colonne, contro la quale protezione energicamente si oppose la insigne e pontificia accademia di S. Luca, col suo dispaccio del 26 luglio 1848, N.° 6582; ed anche altri che in elettricità non sono affatto competenti. L'accademia nominò una commissione, di cui fu relatore il prof. Volpicelli, ed ognuno potrà conoscere nel citato luogo degli Atti de' Nuovi Lincei, per qual motivo non si potè prendere sul proposito alcuna decisione.

Nella discrepanza dei pareri, per difendere dal fulmine le colonne Antonina e Trajana, vi fu chi sostenne doversi questa difesa ottenere, collo stabilire dei parafulmini sulle fabriche circostanti alle colonne stesse. Così fatta opinione fu riconosciuta erronea, come vedremo in seguito; ed una delle molte ragioni per escluderla, fu indicata dal chiaris. prof. Calandrelli, nel suo parere in proposito, che si conserva negli Atti dell'accademia non pubblicati. Dice il nominato professore « Dato e non concesso che le colonne si possano trovare » sotto la sfera di attività dei parafulmini, situati sulle fabbriche adiacenti; » qual'è quel fisico che non conosca, doversi nell'attuale caso, procurare la » comunicazione col suolo, anche delle masse metalliche isolate sulle colonne » stesse? Come tale comunicazione potrà eseguirsi nel caso medesimo? Certo » mettendo quelle masse a comunicare coi parafulmini delle case circostanti » alle colonne. Ma così facendo, vedrà ognuno che torna meglio, per motivi

» tanto scientifici, quanto economici, armare direttamente di parafulmine le » sole colonne, in modo il più conveniente » ; cioè, aggiungiamo noi, nel modo col quale venne protetta dal fulmine in Londra la colonna del duca di York, posta sulla piazza che ha il nome di Waterloo. Sì fatto modo è del tutto eguale a quello prescritto dal sig. duca Massimo , nella sua ministeriale ordinanza sopra indicata. Gli altri giusti riflessi , contrari alla opinione di chi vorrebbe stabilita la protezione delle colonne, per mezzo di parafulmini collocati sulle fabbriche vicine ad esse, trovansi accennati nel citato luogo degli Atti accademici lincei.

Per convalidare sempre più che la opinione medesima, non può in verun modo ammettersi , essendo essa in opposizione del tutto coi principj della scienza, furono dal signor Duca Massimo invitati alcuni, ed altri da me, fra i fisici più distinti, perchè dessero il parere loro, tanto sulla necessità di proteggere le colonne in proposito dal fulmine , quanto sul modo col quale doveva eseguirsi questa protezione.

I fisici cui tale invito venne fatto , furono i signori Gherardi – Belli – Mossotti – Zantedeschi – Matteucci – Orioli – Paoli – Marianini – Purgotti –

Melloni – Plana – Quetelet – Fraday – Wheatstone – e Laugier unitamente ad Arago. Tutti questi dotti ad unanimità riconobbero indispensabile , difendere dal fulmine le colonne Antonina e Tajana , ed insufficiente la difesa di esse mediante parafulmini, posti sulle fabbriche vicine; prescrivendo che le statue di metallo si dovevano difendere facendole comunicare *direttamente* col suolo. Per ogni buon affetto non ho trascurato comunicare copia di questi sedici voti, al ministero del commercio, il quale oggi, dacchè il p. Secchi ha esternata nell'Osservatore Romano N.° 262, già riferito, la opinione sua, conforme a quella dei citati fisici, e perciò conforme alla più volte ricordata ordinanza ministeriale; siamo certi che l'attuale ministero del commercio, prenderà in considerazione i voti stessi, da me inutilmente fino ad ora prodotti.

Il prof. Mossotti pubblicò il suo voto nel Nuovo Cimento, t. 16, pag. 74, an. 1862; e le ragioni per le quali ho sempre creduto, che le colonne stesse debbano difendersi nell' indicato modo , furono da me pubblicate anche nel Cosmos, t. 21, pag. 537, an. 1862. Queste mie pubblicazioni vennero nuovamente prodotte nel giornale inglese *The court journal* , del 29 Novembre 1862, pag. 1144, terza colonna. Ma i voti della natura, sono più concludenti di qualunque altro; questi ci vengono manifestati coi seguenti fatti.

1.° Leggiamo nella Descrizione di Roma e dell'agro romano del p. Fran-

cesco Eschinardi della C. di G., pubblicata in Roma nel 1750, p. 186, che « Sisto V
» collocò in cima alla colonna Trajana, una statua di S. Pietro dorata, alta circa
» 14 palmi, come quella di S. Paolo sopra l'Antonina; delle antiche non si sa
» così per certo l'altezza, ma i migliori autori le hanno di piedi dieciotto in
» circa. Aveva questa colonna patito per un incendio, *e per un fulmine*,
» come apparisce nelle stampe del Sadler; anche sotto Innocenzo XI patì di
» nuovo per un fulmine, e fu subito risarcita. Sisto V restituì il piedistallo,
» e la colonna nella forma che ora si vede, con disegno parimente del cav.
» Fontana.

2.° Nella mattina del 23 di settembre 1841, la colonna Antonina fu colpita dal fulmine, il quale spezzò una delle grosse lastre di marmo del basamento della colonna stessa. Questo fatto si trova registrato eziandio nel Bullettino meteorologico del collegio romano, vol. 3.° anno 1864, p. 84, seconda colonna, li. 29.

3.° Nel 29 di ottobre 1861, un fulmine in Roma colpì la piramide di C. Cestio, collocata circa cento cinquanta passi da una polveriera. Il vertice superiore della piramide stessa fu trasportato, e dal medesimo elettrico furono contemporaneamente colpiti anche i quattro parafulmini che difendevano quella polveriera, e furono da esso atterrate le due sentinelle, che stavano in vicinanza dei medesimi, senza però cagionare loro verun danno. (*) Da questo fatto concludiamo *primieramente*, che se il fulmine potè colpire la cima di un monumento tutto di marmo, come la piramide di C. Cestio, a più forte ragione potrà colpire quei monumenti, di marmo anch' essi, ma che sono terminati da una enorme massa metallica, come le colonne di cui parlammo. *In secondo luogo*, come i parafulmini prossimi alla indicata piramide, priva di metalli, non la difesero dallo elettrico temporalesco; a più forte ragione i parafulmini, se fossero posti sui fabbricati più vicini alle nominate colonne, non difenderanno queste dall'elettrico stesso. *In terzo luogo*, come fu subito proveduto alla difesa del monumento di C. Cestio, mediante un parafulmine posto su di esso; a più forte ragione si dovrebbero con questo mezzo, difendere le indicate due colonne, le quali più assai della tomba di C. Cestio, sono pregievoli, ed esposte ad essere colpite dalla elettricità dell'atmosfera procellosa.

4.° Finalmente ripeteremo, che nel 14 di ottobre 1865, un fulmine colpì la statua di bronzo, collocata sul maschio del castel S. Angelo in Roma.

(*) V. Comptes Rendus, t. 53, an. 1861, p. 902.

Questi sono i fatti, assai più valenti dei voti esternati dai dotti, a dimostrare che le colonne Antonina, e Trajana, debbono essere difese dal fulmine; non già mediante i parafulmini collocati sulle fabbriche, vicine a queste preziose reliquie della romana grandezza: ma bensì col porre le statue di bronzo, in perfetta comunicazione metallica col suolo, e ad una profondità conveniente.

Ricerche analitiche relative al luogo geometrico dei punti di tangenza, fra uno, e due sistemi di parallele, con una, [illegible] serie di coniche omofocali. — *Memoria del prof.* P. Volpicelli.

§ 1.

1.° L'equazione

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)}, \tag{1}$$

appartiene a qualsiasi ellisse, riferita agli assi $2a$, $2b$. Esprimendo con c la eccentricità sua, vale a dire la semidistanza dei due fochi, avremo

$$b^2 = a^2 - c^2 ;$$

quindi otterremo dalla (1) la

$$y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)}, \tag{2}$$

che rappresenta una ellisse, di semiasse maggiore a, e di eccentricità c. Supponendo costante c, ma variabile a, la (2) rappresenterà una serie di ellissi *omofocali*.

2.° L'equazione

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(x^2 - a^2\right)}, \tag{3}$$

appartiene a qualunque iperbola, coll'origine al centro, col semiasse reale a,

giacente su quello delle x; mentre b denota la parte della tangente al vertice, compresa fra l'asse dalle ascisse e l'assintoto. Indicando con c la eccentricità della iperbola, si avrà

$$c^2 = a^2 + b^2 , \tag{4}$$

e dalla (3) otterrremo la

$$y = \pm \frac{\sqrt{(c^2 - a^2)}}{a} \sqrt{\left(x^2 - a^2\right)} , \tag{5}$$

che appartiene ad una iperbola di semiasse reale a, e di eccentricità c. Supponendo anche quì c costante, ma variabile a, la (5) rappresenterà una serie d'iperbole *omofocali*.

3.° Moltiplicando la (5) pel prodotto

$$(-1)\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = 1 ,$$

essa riceverà la forma seguente

$$y = \mp \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} ; \tag{6}$$

e paragonando la (2) colla (6), si vede che le medesime coincidono, salvo nell' ordine dei segni. Da ciò risulta, che non avvi alcuna diversità fra la equazione dell'ellissi omofocali, e quella delle iperbole omofocali anch' esse; quindi la serie, tanto di quelle, quanto di queste, viene rappresentata dalla seguente uguaglianza

$$y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} , \tag{7}$$

che si deve riguardare identica colla (6). Soltanto è da riflettere, che deve aversi, per le ellissi, $a > c$ ed $x < a$, dovendo essere per le iperbole $a < c$ ed $x > a$; laonde nel caso delle iperbole, divengono immaginarie le due quantità radicali, contenute nel secondo membro della (7): circostanza del tutto indifferente, per le analitiche ricerche di questo argomento. Dunque la (7) abbraccia tutte le coniche omofocali, salvo la parabola; poichè questa non ha centro, ovvero lo ha in una distanza infinita dal suo vertice, alla quale non possiamo porre l'origine delle coordinate.

4.° Per avere una formula che abbracci anche la parabola, trasportiamo parallelamente nella (7), il sistema degli assi coordinati, dal centro in quello dei due fochi avente per assisa $-c$. Dunque alla x dovrà sostituirsi la $x - c$, quindi la (7) si trasformerà perciò nella

$$(8)\quad\begin{cases} y=\pm\dfrac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\sqrt{\left[a^2-(x-c)^2\right]}\,, \\ \text{ovvero nella} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\sqrt{\left(a^2-c^2+2cx-x^2\right)}\,. \end{cases}$$

Ognuna di queste due formule, vale a rappresentare le coniche, compresavi la parabola; infatti per questa curva, tanto a, quanto c diviene infinita; mentre la differenza $a-c$ risulta finita, e rappresenta la distanza fra il vertice, ed il foco della parabola. La seconda delle (8) si trasforma nella

$$y=\pm\sqrt{\frac{(a+c)(a-c)}{a}}\cdot\sqrt{\left[\frac{(a+c)(a-c)}{a}+\frac{2cx}{a}-\frac{x^2}{a}\right]}\,,$$

che, ponendo $a-c=\frac{p}{4}$, riducesi alla

$$y=\pm\sqrt{\left(\frac{a+c}{a}\right)\frac{p}{4}}\cdot\sqrt{\left[\left(\frac{a+c}{a}\right)\frac{p}{4}+\frac{2cx}{a}-\frac{x^2}{a}\right]}\,.$$

Ma è chiaro che nella parabola, possiamo rappresentare $a+c$ per $2a$; similmente $\frac{c}{a}$ per 1, ed $\frac{x^2}{a}$ per zero; cosicchè dalla precedente avremo la

$$(9)\qquad y=\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+px\right)}\,,$$

cioè la solita equazione della parabola, di parametro p, avente nel foco la origine delle coordinate. Abbiamo dunque dimostrato, che qualunque delle (8), vale a rappresentare tutte le coniche, riferite ad un sistema coll' origine in un foco della curva; mentre l' asse delle x coincide con quello della curva stessa, il quale passa pel suo foco.

Volendo che qualunque delle (8) rappresenti una serie di coniche *omofocali*, dovremo porre nelle medesime costante la c, mentre a varia da una conica all' altra. Fra queste coniche omofocali, è compresa eziandio la parabola, perchè chiamiamo parabole omofocali quelle, che hanno comune fra loro tanto il foco, quanto la direzione dell' asse. Da ciò discende, che anche gli altri fochi delle parabole stesse, i quali si trovano ad una distanza infinita dai vertici rispettivi, coincidono l' uno coll' altro. Soltanto dobbiamo avvertire che ciò importa, dover essere la c, per le parabole, anch'essa infinita e costante, mentre a deve riguardarsi variabile, ma sem-

pre infinita; cosicchè abbiasi

$$a - c = \frac{p}{4},$$

quantità finita.

5.° Però dobbiamo riflettere, che una ellisse con una iperbola possono divenire omofocali, mentre non lo può una parabola con qualunque delle altre indicate due coniche; perchè queste suppongono fiinita la distanza fra i loro fochi, mentre la parabola suppone la distanza medesima infinita. Quindi chiaro apparisce che, volendo analizzare una qualunque serie di coniche *omofocali*, dovrà l'analisi per le parabole, in parte separarsi da quella per le altre coniche.

§ 2.

6.° In una curva, essendo α l'angolo compreso fra la tangente al punto (x, y), e l'asse delle x, avremo in generale

$$\text{tang.}\alpha = \frac{dy}{dx}. \tag{10}$$

Troveremo per tanto la tangente di α, in un sistema di coniche omofocali, derivando la prima dell/ (8), e sarà

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \cdot \frac{c - x}{\sqrt{[a^2 - (c - x)^2]}};$$

quindi avremo

$$\text{tang.}\alpha = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \cdot \frac{c - x}{\sqrt{[a^2 - (c - x)^2]}}, \tag{11}$$

eguaglianza che fornisce, in funzione dell'ascissa x di un dato punto, la tangente trigonometrica dell' angolo, compreso fra la tangente geometrica nel punto stesso, e l'asse delle ascisse, in un sistema di coniche omofocali, di cui la eccentricità viene da c rappresentata.

7.° In una serie di coniche omofocali, ad *ognuna* di esse apparterranno tanto le (8), quanto la (11), ed eliminando il simbolo *variabile* a da queste, otterremo, per qualunque curva della serie, una *medesima* relazione fra le coordinate del punto di tangenza (x, y), e l'angolo α. Dunque supponendo α costante, vale a dire tutte le tangenti del sistema parallele fra loro, la relazione stessa esprimerà la curva, sulla quale si troverà ciascun punto di tangenza, delle diverse coniche omofocali, appartenenti alla serie considerata.

Ad effettuare questa eliminazione, dividiamo la prima delle (8) per la (11), ed otterremo la

$$y\cot.\alpha = \frac{a^2 - (c - x)^2}{c - x} ,$$

dalla quale abbiamo

$$(12) \qquad a = \sqrt{[(c - x)^2 + (c - x)y\cot.\alpha]} .$$

Sostituendo questo valore nella stessa (8), avremo

$$y = \pm \frac{\sqrt{[(c - x)^2 + (c - x)y\cot.\alpha - c^2]}}{\sqrt{[(c - x)^2 + (c - x)y\cot.\alpha]}} \sqrt{[(c - x)y\cot.\alpha]} ,$$

e riducendo sarà

$$(13) \qquad \sqrt{y} = \pm \frac{\sqrt{[(c - x)^2 + (c - x)y\cot.\alpha - c^2]}}{\sqrt{(c - x + y\cot.\alpha)}} \sqrt{(\cot.\alpha)} ,$$

la quale ne porge

$$(14) \qquad y\,\text{tang}.\alpha = \frac{(c - x)^2 + (c - x)y\cot.\alpha - c^2}{(c - x) + y\cot.\alpha} ,$$

ovvero

$$(15) \qquad (c - x)^2 - y^2 + (\cot.\alpha - \text{tang}.\alpha)(c - x)y - c^2 = 0 .$$

Ma sappiamo essere

$$\cot.\alpha - \text{tang}.\alpha = \frac{\cos.\alpha}{\text{sen}.\alpha} - \frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha} = \frac{\cos.^2\alpha - \text{sen}.^2\alpha}{\text{sen}.\alpha\cos.\alpha} = \frac{\cos.2\alpha}{\frac{1}{2}\text{sen}.2\alpha} = 2\cot.2\alpha ,$$

quindi otterremo dalla (15) la

$$(16) \qquad (c - x)^2 - y^2 + 2(c - x)y\cot.2\alpha - c^2 = 0 .$$

Fin quì fu vantaggioso, conservare la differenza $c - x$; ora però conviene ordinare la (16) per le dimensioni variabili, ed otterremo la

$$(17) \qquad y^2 - x^2 + 2xy\cot.2\alpha - 2cy\cot.2\alpha + 2cx = 0 .$$

Qualunque delle (15), (16), e (17), le quali sono identiche fra loro, ed hanno l'origine delle coordinate *in un foco*, rappresenta una conica; la quale perciò sarà il luogo geometrico dei punti di tangenza delle rette, spettanti al sistema di parallele fra loro, di cui ciascuna forma l'angolo α coll'asse delle x, ed è tangente ad una delle coniche omofocali tutte di eccentricità c, formanti la serie di esse. Denomineremo *conica di tangenza* l'indicato geometrico luogo; e secondo che farà d'uopo, ricorremo all'una, o l'altra delle tre ora stabilite uguaglianze.

§ 3.

8.° Abbiamo veduto che la curva di tangenza (17), generalmente parlando, è di secondo grado; possono però aver luogo certe condizioni particolari, che la riducono ad una o due rette, come vedremo a suo luogo. È chiaro inoltre che la curva medesima, passa pei fochi comuni alla serie di coniche omofocali poichè le coordinate dei due comuni fochi sono :

$$\left.\begin{array}{l} x = o, \\ y = o \end{array}\right\} \quad \text{ed} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2c, \\ y = o; \end{array}\right.$$

e siccome la (16) è soddisfatta per queste due coppie di valori, così è dimostrata la verità di questo asserto.

9.° Per decidere la specie della conica di tangenza, serviamoci della (17), dalla quale troviamo che il quadrato del coefficiente di xy, meno il prodotto quadruplo dei cofficienti delle x^2, y^2, è quantità positiva, cioè troviamo

$$4\cot.^2 2\alpha + 4 > o\ ;$$

perciò la (17), non altramente che la (15) e la (16), rappresenterà una iperbola; quindi l'indicato luogo geometrico sarà giustamente detto *iperbola di tangenza.*

10.° Vedendo inoltre, che nella (17) i due termini, affetti dalle x^2, y^2, hanno, prescindendo dal segno, il medesimo coefficiente, apprendiamo che la iperbola stessa dovrà essere equilatera. In fatti, denotando con A, B, in qualunque iperbola, i semiassi, questa conica sarà espressa dalla

$$B^2x^2 - A^2y^2 = A^2B^2\ .$$

Le formule più generali, per la trasformazione delle coordinate, sono (*a*)

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = x_o + x'\cos.(xx') - y'\mathrm{sen}.(xx')\ , \\ y = y_o + x'\mathrm{sen}.(xx') + y'\cos.(xx')\ ; \end{array}\right.$$

quindi avremo

$$x^2 = x_o^2 + x'^2\cos.^2(xx') + y'^2\mathrm{sen}.^2(xx') + 2x_o x'\cos.(xx') - 2x_o y'\mathrm{sen}.(xx') - 2x'y'\mathrm{sen}.(xx')\cos.(xx')\ ,$$

$$y^2 = y_o^2 + x'^2\mathrm{sen}.^2(xx') + y'^2\cos.^2(xx') + 2y_o x'\mathrm{sen}.(xx') + 2y_o y'\cos.(xx') + 2x'y'\mathrm{sen}.(xx')\cos.(xx')\ ;$$

essendo x_o, y_o le coordinate della nuova origine, riferita all'antica. Introdu-

(*a*) Volpicelli, Annotazioni al Caraffa. Roma 1840, parte seconda, p. 172 ove si deve porre $(xy') = 90° + (xx')$.

cendo questi valori nell' equazione precedente della iperbola, otterremo

$$[B^2\cos.^2(xx') - A^2\mathrm{sen}.^2(xx')]x'^2 + [B^2\mathrm{sen}.^2(xx') - A^2\cos.^2(xx')]y'^2$$
$$- 2(B^2 + A^2)\mathrm{sen}.(xx')\cos.(xx').x'y'$$
$$+ 2[x_0B^2\cos.(xx') - y_0A^2\mathrm{sen}.(xx')]x' - 2[x_0B^2\mathrm{sen}.(xx') + y_0A^2\cos.(xx')]y'$$
$$+ B^2x_0{}^2 - A^2y_0{}^2 - A^2B^2 = o\ .$$

Ma volendo che sieno uguali, e di contrario segno, i coefficienti delle x^2, y^2, come si verifica nella (17), dobbiamo porre

$$B^2\cos.^2(xx') - A^2\mathrm{sen}.^2(xx') = A^2\cos.^2(xx') - B^2\mathrm{sen}.^2(xx')\ ,$$

dalla quale si conclude

$$A = B\ ,$$

lo che ha luogo solamente per la iperbola equilatera, come volevamo dimostrare: concludiamo per tanto che la iperbola di tangenza, rappresentata da qualunque delle (15), (16), (17), è ancora *equilatera.*

§. 4.

Esprimendo con α' l'angolo, che una certa retta fa coll'asse delle x, avrà questa per equazione la

$$y = x\ \mathrm{tang}.\alpha' + \beta\ ;$$

ma volendo che la retta medesima sia perpendicolare alla direzione α delle tangenti parallele fra loro, avremo

$$\mathrm{tang}.\alpha' = -\frac{1}{\mathrm{tang}.\alpha} = -\cot.\alpha;$$

perciò l'equazione della stessa retta si ridurrà nella

$$y = -x\cot.\alpha + \beta\ .$$

Volendo inoltre che la medesima passi pel comune centro delle coniche, al quale appartengono le $x = c$, $y = o$, dovrà essere

$$o = -c\cot.\alpha + \beta\ ,$$

quindi sarà

$$y = (c - x)\cot.\alpha\ , \qquad (19)$$

l'equazione finale della retta considerata.

Per conoscere se la (19) rappresenta un assintoto della iperbola di tangenza,

dobbiamo cercare, per quali valori delle x, y, essa incontra questa conica; vale a dire per quali valori delle coordinate, vengono soddisfatte contemporaneamente le (15), (19). Eliminando adunque la y da queste, avremo

$$(c - x)^2 - (c - x)^2 \cot.^2\alpha + (c - x)^2(\cot.\alpha - \text{tang}.\alpha)\cot.\alpha - c^2 = 0 \ ,$$

cioè

$$[1 - \cot.^2\alpha + (\cot.\alpha - \text{tang}.\alpha)\cot.\alpha](c - x)^2 = c^2 \ , \tag{20}$$

e siccome il fattore di $(c - x)^2$ si annulla di per se; perciò chiaro apparisce che le ascisse dei punti d'incontro, e quindi, anche, a motivo della (19), le corrispondenti ordinate, sono infinite. Riflettendo inoltre, che se una retta incontra una iperbola in distanza infinita, passando pel suo centro, deve la retta medesima esserne un assintoto; perciò la retta dell'equazione (19) dà un assintoto della iperbola equilatera di tangenza, come si voleva dimostrare.

Si avverta che i soli due casi corrispondenti, uno ad $\alpha = 0$, l'altro ad $\alpha = 90°$, non sono compresi nella presente analisi; perchè nei medesimi, la iperbola di tangenza si confonde cogli assi delle coniche, come vedremo più chiaramente in appresso.

11.° Stabilito che la (17) rappresenta una iperbola equilatera, se riflettasi a quanto fu dimostrato nei precedenti numeri, possiamo enunciare il seguente:

Teorema I. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, un sistema di tangenti parallele fra loro, i punti di tangenza si troveranno tutti sopra una iperbola equilatera; la quale, passando pei fochi comuni, avrà un assintoto perpendicolare alla direzione delle indicate tangenti, e l' altro parallelo alla direzione stessa, i quali s' intersecheranno nel centro comune delle coniche omofocali.*

Questo teorema viene dichiarato dalla (fig. 1), in cui rappresentano a', b' i fochi comuni alla serie di coniche; TT′ la direzione, comune al sistema delle tangenti parallele fra loro; ed FF′ l'asse della iperbola equilatera di tangenza; essendo QM, MH, H′M′, M′Q′ i quattro suoi rami, ed SS′, TT′ gli assintoti di essa. Nella medesima figura, la serie delle coniche omofocali, viene rappresentata da tre ellissi, e quattro iperbole.

§ 5.

Per dichiarare maggiormente la giacitura della iperbola equilatera di tangenza, spostiamo il sistema coordinato, prima parallelamente a se stesso, in modo

che il centro delle coniche omofocali coincida coll'origine, ove già fu supposto in principio di queste ricerche (§. 1). L' indicato spostamento esige, che sia cangiata in $x+c$ la x; perciò la (16) si trasformerà nella

$$x^2 - y^2 - 2xy\cot.2\alpha - c^2 = 0 \,. \tag{21}$$

Ma, siccome la parabola non possiede centro, vale a dire questa curva suppone c infinito; così vediamo che, nell'attuale spostamento, fa d'uopo escludere la curva stessa, per la quale avrà luogo una ricerca particolare, come già fu indicato (§ 1, 5°.).

Dopo eseguito il precedente spostamento parallelo, passiamo ad eseguire il sècondo angolare; in guisa che l'asse delle x, formi colla sua primitiva direzione l' angolo (xx'). A tal fine dobbiamo valerci delle (18), annullando in esse i simboli x_0, y_0; giacchè la origine delle coordinate, in questo caso, non si muta. Per tanto avremo

$$x^2 = x'^2\cos.^2(xx') + y'^2\text{sen}.^2(xx') - 2x'y'\text{sen}.(xx')\cos.(xx') =$$
$$= x'^2\cos.^2(xx') + y'^2\text{sen}.^2(xx') - x'y'\text{sen}.2(xx') \,,$$
$$y^2 = x'^2\text{sen}.^2(xx') + y'^2\cos.^2(xx') + 2x'y'\text{sen}.(xx')\cos.(xx') =$$
$$= x'^2\text{sen}.^2(xx') + y'^2\cos.^2(xx') + x'y'\text{sen}.2(xx') \,,$$
$$xy = x'^2\text{sen}.(xx')\cos.(xx') - y'^2\text{sen}.(xx')\cos.(xx') + [\cos.^2(xx') - \text{sen}.^2(xx')]x'y'$$
$$= x'^2\frac{\text{sen}.2(xx')}{2} - y'^2\frac{\text{sen}.2(xx')}{2} + x'y'\cos.2(xx') \,;$$

e sostituendo nella (21), si avrà l'equazione seguente

$$x'^2\cos.^2(xx') + y'^2\text{sen}.^2(xx') - x'y'\text{sen}.2(xx') - x'^2\text{sen}.^2(xx')$$
$$- y'^2\cos.^2(xx') - x'y'\text{sen}.2(xx')$$
$$- 2\left[x'^2\frac{\text{sen}.2(xx')}{2} - y'^2\frac{\text{sen}.2(xx')}{2} + x'y'\cos.2(xx')\right]\cot.2\alpha - c^2 = 0 \,,$$

ovvero

$$[\cos.2(xx') - \text{sen}.2(xx')\cot.2\alpha]x'^2 - [\cos.2(xx') - \text{sen}.2(xx')\cot.2\alpha]y'^2$$
$$- 2[\text{sen}.2(xx') + \cos.2(xx')\cot.2\alpha]x'y' - c^2 = 0. \tag{22}$$

Ciò posto, le condizioni che più convengono, per determinare l' angolo (xx'), fin ora tenuto arbitrario, sono l'una, o l'altra delle due seguenti:

$$(23)\qquad \begin{cases} \cos.2(xx') - \text{sen}.2(xx')\cot.2\alpha = o\ , \\ \text{sen}.2(xx') + \cos.2(xx')\cot.2\alpha = o\ . \end{cases}$$

La prima di queste fa sparire nella (22) i termini affetti dalle x^2, y^2, mentre per la seconda, vi si annulla il termine affetto dal prodotto $x'y'$. Ora dalla prima delle (23) abbiamo

$$\cot.2\alpha = \cot.2(xx')\ ,$$

la quale può soddisfarsi col porre

$$(xx') = \alpha\ .$$

La seconda poi delle medesime ci fornisce

$$\cot.2\alpha = -\text{tang}.2(xx') = \text{tang}.[-2(xx')];\quad \text{ma}\ \cot.2\alpha = \text{tang}.\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\ ,$$

quindi possiamo stabilire

$$\frac{\pi}{2} - 2\alpha = -2(xx')\ ,$$

donde

$$(24)\qquad (xx') = \alpha - \frac{\pi}{4}\ .$$

Sostituendo nella (22), uno alla volta, i valori trovati ora per l'angolo (xx'), avremo pel primo la

$$2(\text{sen}.2\alpha + \cos.2\alpha\cot.2\alpha)x'y' = c^2\ ,$$

e riducendo sarà

$$(25)\qquad x'y' = \frac{c^2}{2}\,\text{sen}.2\alpha\ .$$

12.° Questa equazione conferma evidentemente, che la curva di tangenza è una iperbola equilatera, la quale nella (25) si riferisce agli assintoti, come assi coordinati ortogonali, che fanno con quello comune, in cui si trovano i fochi delle coniche omofocali, un angolo $(xx') = \alpha$. Così apparisce nuovamente, che un assintoto della iperbola equilatera di tangenza, è parallelo alle tangenti del sistema, mentre l'altro è perpendicolare alle tangenti stesse.

Passando al secondo caso, vale a dire sostituendo nella (22) il valore dell'angolo (xx'), dato dalla (24), avremo primieramente le

$$\cos.2(xx') = \cos.\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}.2\alpha\ ,$$

$$\text{sen}.2(xx') = \text{sen}.\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos.2\alpha\ ;$$

per le quali la (22) si ridurrà nella

$$(\text{sen}.2\alpha + \cos.2\alpha\cot.2\alpha)(x'^2 - y'^2) = c^2\ ,$$

ovvero nella

$$x'^2 - y'^2 = c^2\text{sen}.2\alpha\ , \tag{26}$$

donde

$$y' = \sqrt{(x'^2 - c^2\text{sen}.2\alpha)}\ , \tag{27}$$

13.° Da questa equazione si vede che $c\sqrt{(\text{sen}.2\alpha)}$, rappresenta il semiasse reale della iperbola di tangenza. Supponendo qui $\alpha = 45$, abbiamo, secondo la (24), l' angolo $(xx') = o$; vale a dire non avvi nel caso attuale spostamento angolare delle coordinate.

14.° Inoltre, pel caso medesimo, avremo

$$y' = \sqrt{(x'^2 - c^2)}\ ;$$

cioè i due vertici M, M' della iperbola di tangenza, coincideranno coi due fochi f, f comuni alla serie di coniche; quindi la iperbola di tangenza diverrà simmetrica rispetto l'asse X, — X, come viene rappresentato dalla (fig. 2).

Lo spostamento angolare del sistema, nel caso in proposito, è dato dalla (24); ma con facilità si vede, che ciò suppone un asse delle x collocato in guisa, da dividere in mezzo l'angolo retto, formato dagli assintoti della iperbola di tangenza; perchè in ciascuna iperbola, l'asse divide per metà l'angolo degli assintoti.

§. 6.

15.° Per trovare la eccentricità c' della iperbola equilatera di tangenza, vale a dire la distanza fra centro e fochi della medesima, rammentiamo che questa è in generale data dalla ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente per cateti i due semiassi. Nel caso nostro, questi due cateti sono eguali fra loro, e ciascuno viene rappresentato da $c\sqrt{(\text{sen}.2\alpha)}$; quindi per la ipotenusa, ovvero per la

cercata eccentricità, otterremo

$$c' = c\sqrt{(2\text{sen}.2\alpha)} \tag{28}$$

Questa formula può trasformarsi nella

$$c' = \sqrt{(2c^2\text{sen}.2\alpha)} = 2\sqrt{c\text{sen}.\alpha.c\cos.\alpha}\ ,$$

ed è chiaro che questo radicale, può costruirsi come siegue. Essendo C (fig. 3) il centro, B un foco del sistema di coniche omofocali, ed HCB $= \alpha$, si guidi la BP perpendicolarmente a CH, sarà BC $= c$

$$\text{BP} = c\text{sen}.\alpha\ ,\ \text{CP} = c\cos.\alpha\ .$$

Prolungando poscia CP in T, cosicchè abbiasi PB $=$ PT, e descrivendo sopra CT un semicircolo, questo intersecherà in Q la PB prolungata; quindi, prendendo PS $=$ 2PQ, si otterrà la cercata eccentricità c'; poichè abbiamo

$$\text{PQ} = \sqrt{(\text{PT}.\text{PC})}\ ,$$

ma

$$\text{PB} = \text{PT} = c\text{sen}.\alpha\ ,$$

quindi

$$\text{PS} = 2\text{PQ} = 2\sqrt{(c\text{sen}.\alpha.c\cos.\alpha)} = c\sqrt{(2\text{sen}.2\alpha)}\ ;$$

dunque

$$c' = \text{PS}\ .$$

(Continuerà)

CORRISPONDENZE

Fu letto il dispaccio dell'Emo· e Rmo· sig. Card. Altieri, protettore dell' accademia, del 5 agosto 1865, N.° 4185, col quale venivano approvate le nomine a corrispondenti stranieri, dei signori scienziati: maresciallo Vaillant, generale Morin, ed Ant. Becquerel, fatte pei due primi nella sessione VIII del 30 luglio 1865, e pel terzo in quella del 2 feb. 1862.

Il prof. Volpicelli presentò, a nome del sig. cav. Giuseppe Bianchi , la parte seconda della quinta sua lettera astronomica, e la sesta di queste lettere.

Il prof. medesimo presentò in dono all' accademia, da parte dell' autore sig. E. Narducci, una copia della molto erudita lettera, direttagli da questo distinto autore « intorno ad alcuni passi notevoli di antiche opere concernenti fisiche scienze. »

Il sig. principe D. Baldassare Boncompagni, presentò in dono all'accademia, una pubblicazione del sig. A. T. H. Vincent, che si riferisce al trattato di musica di Aristide Quintiliano, con due note del sig. T. E. Martin.

Il medesimo presentò egualmente, da parte dell'autore sig. Wenckebach, una pubblicazione su Pietro Adsigerio, e le più antiche osservazioni della magnetica declinazione.

Il medesimo prosentò similmente due memorie del sig. F. Siacci, una sugl' invarianti e convarianti delle forme binarie, l'altra sull'uso dei determinanti.

Il prof. Volpicelli presentò in dono all'accademia, da parte dell'autore il sig. ingegnere Giuseppe Serra-Carpi, una memoria « Sulle linee isotermiche dell' Italia, de' suoi mari, ed isole adiacenti. » Di questo interessante lavoro si trova un copioso estratto, ed assai bene compilato, nella *Civiltà Cattolica.* favorevole molto al nominato ingegnere. Non possiamo tacere inoltre, che il ch. fisico sig. prof. Magrini , presentando l' opera stessa del sig. Serra-Carpi all'Ateneo di Venezia, lodò il piano di essa, e le sue dottrine, riguardandola come la più completa fino ad ora, in punto di teorica climatologica italiana. (v. L'Osservatore romano, N.° 20, del 25 gen. 1866.)

Il prof. medesimo, nel comunicare in quali periodici scientifici, erasi riprodotto l'ultimo nostro programma pel premio Carpi, osservò che nell' *Institut*, N.° 1656, an. 1865, pag. 312, si asseriva non esser cognito il valore del premio stesso; e che nei *Comptes Rendus*, T. 61, an. 1865, pag. 426, si asseriva quel programma privo di luogo e di data; le quali due asserzioni sono inesatte, perchè il nostro programma chiaramente manifesta e il valore del premio, e la data ed il luogo della sua pubblicazione.

Il sig. Presidente comunicò una lettera del sig. marchese di Caligny, colla quale ringrazia egli l'accademia, per averlo nominato suo corrispondente straniero.

Il prof. Volpicelli presentò due lettere di ringraziamento, dirette al sig. Presidente, una del sig. maresciallo Vaillant, l'altra del sig. generale Morin, colle quali questi dotti ringraziano l'accademia, per averli nominati fra suoi corrispondenti stranieri.

Il prof. medesimo presentò la lettera di ringraziamento, a lui deratta dal sig. Fr. V. Hauers, per la nomina, da questo dotto ricevuta, di corrispondente straniero liceo.

Si comunicò l'avviso del comitato dirigente il congresso italiano in Napoli, col quale questo veniva dilazionato.

L' Accademia riunitasi alle ore 6 pomeridiane, si sciolse dopo un'ora e mezza di seduta.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

S. Cadet. — A. Cialdi. — G. cav. Ponzi. — P. Sanguinetti. — E. Rolli. — L. Jacobini. — V. cav. Diorio. — A. cav. Coppi. — P. A. Secchi. — M. cav. Azzarelli. — P. Volpicelli. — D. Chelini. — B. Tortolini. — C. Sereni. — F. Nardi. — B. Boncompagni. — M. Massimo. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo.

Pubblicato nel 31 di gennaio del 1866.
P. V.

OPERE VENUTE IN DONO

L' eritrogeno e le sue proprietà difese contra il Gorup-Besanes. Nota del D. G. Bizio. Venezia; un fasc. in 8.

Analisi del gas uscente dai pozzi artesiani di Venezia ; del Med. Vienna, 1861.

Sopra la fenilsinnamina e le sue combinazioni. Indagini del dot. Sud. Vienna, 1861.

Sopra una concrezione rinvenuta negl' intestini di un cavallo , Analisi del Med. id.

Sopra il litio nell' acqua dell' Adriatico, e di alcune fonti minerali, rinvenuto col nuovo metodo di chimica analitica del Bounsen e del Kirchhoff. id.

Ricerche intorno al presupposto acido cocinico. id.

Sonetti in Lode della Divinità di Gesù Cristo nel Sagramento, di Michele De Chiara. Napoli, 1864.

Storia della malattia per la quale morì Giuseppe Pucci di Odoardo Linoli. Lucca, 1865.

L' origine atmosferica dei Tufi Vulcanici della Campagna romana , trovata dall' Abb. Carlo Rusconi. Roma, 1865; un fasc. in 8.°

Documenti storici del medio Evo relativi a Roma ed all' Agro romano, raccolti da A. Coppi. Roma, un fasc. in 12.° 1865.

Per le solenni essequie trigesimali del cav. prof. Domenico Meli. Parole dette da Antonio Michetti, medico a S. Arcangelo, nella Chiesa di S Carlo in Pesaro. 1865; un fasc. in 8°.

Sulle quadrature. Nota del Comm. P. Tardy. Modena, 1865; un fasc. in 4.°

Appendice 2ª al saggio idrologico sul Nilo, per Elia Lombardini. Milano , un fasc. in 4.°, 1865.

Intorno ad un passo della Divina Commedia di Dante Allighieri. Lettera del prof. Ottaviano Faberizio Mossotti, a B. Boncompagni, seguita da una nota intorno a questa lettera. Roma, 1865, un fasc. in 4.°

Relazione intorno alle attrazioni locali risultanti nei contorni di Mosca, dietro il confronto delle posizioni geodesiche con le oseervazioni astronomiche, instituite in diversi punti di quel circondario, del prof. Giovanni Santini. Venezia, 1865; un fasc. in 4.°

Delle acque publiche di Roma moderna – Delle acque publiche nelle città ed altri centri di popolazione – Della distribuzione delle acque nelle città, Discorsi del cav. Aless. Betocchi. Roma, 1865; un fasc. in 4.°

Continuazione degli Atti della R. ACCADEMIA DEI GEORGOFILI DI FIRENZE. Nuova Serie. Vol. XII: disp. 1ª, N. 41.

L' Incoraggiametno. Giornale diretto dal prof. S. De LUCA. Anno 1°; fasc. 5° e 6.°, Napoli, 1865.

Atti del REGIO IMP. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE, ED ARTI. Tomo X° – Serie 3ª - Disp. 4ª e 5.ª

Atti dell' ATENEO VENETO, Serie 2ª – Vol. II° – Puntata. 1ª e 2.ª

Giornale di SCIENZE NATURALI ED ECONOMICHE, *publicate per cura del Consiglio di perfezionamento annesso al R.* ISTITUTO TECNICO DI PALERMO. Vol 1°, fasc. 1.°

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo. N. 6 - al 9.

Memorie della SOCIETA' MEDICO–CHIPURGIA DI BOLOGNA. Vol VI; fasc. 3.°

Osservazioni Meteorologiche di Urbino. N. 1 e 2.

Rendiconto dell' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DI NAPOLI. Anno 4° – fasc. 5-12.

Memorie dell' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. Serie 2ª – Tomo IV; fasc. 2 e 3. Tomo V, fasc. 1.

Observation... *Osservazione della carie degli ossi della mano , pel dott.* DAMBRE. Gand. 1856.

De la... *Della viabilità giuridica ; del* MED. Bruxelles, 1865.

Mémoires... *Memorie coronate, e Memoria dei Scienziati esteri, publicate dall'* ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE, DELLE LETTERE, E DELLE BELLE ARTI DEL BELGIO. Tomo 31mo 1862–63. Bruxelles, 1863. Un vol. in 4.°

Mémoires... *Memorie dell'* ACCADEMIA SUDDETTA. Tomo 34.^{mo} Bruxelles, 1864. Un vol. in 4.°

Mémoires... *Memorie coronate, e publicate dall'* ACCADEMIA SUDD.ª – Collezione in 8° – Tomo 15mo e 16.^{mo}

Bullettins... *Bullettini dell'* ACCADEMIA SUDDª. Anno 32mo - 2ª serie. Tomi 15 e 16.– Anno 33mo – 2ª serie – Tomo 17.

Bullettins... *Bullettini dell'* AECADEMIA SUDDETTA. Classe di Scienze. Anno 1863.

Annuaire... *Annuario dell'* ACCADEMIA SUDD.ª Anno 1864.

On the... *Sulla quadratura inversa delle curve piane; di T. A.* HIRST.

Proceedings... *Bullettini della R,* SOCIETA' GEOGRAFICA DI LONDRA. Vol. 7° dal N. 3 al 5. - Vol. 8° - N. 5 e 6 – Vol.9° - N. 1 e 2.

Report... *Rapporto della 33ma riunione dell'* ASSOCIAZIONE BRITANNIGA PER L' AVANZAMENTO DELTE SCIENZE. Londra; 1864; un vol. in 8°.

Philosophical... *Transazioni filosofiche della R. Società di Londra, per l' anno* 1864. Vol. 154; parte 1.ª e 2.ª

Proceedings... *Bullettini della Società R. medesima.* Vol. 13.mo - N. 64 al 69.

Mittheilungen... *Memorie dell'* I. *R. Società Geografica di Vienna.* Anno 8° fasc. 1.mo 1864.

Iahrbuch... *Annuario dell' I. R. Istituto Geologico di Vienna.* Vol. 15.mo N. 1 e 2 - 1865.

Verhandlungen... *Atti detla Socieлà Transilvania di scienze natunali di Hermanstadt,* Anno 15.mo, 1864.

Verhandlungen... *Atti della I. R. Società botanica-geologica di Vienna.* Vol. 14, 1864.

Fontes rerum austriacarum (Diplomataria etc Acta) Vol. 21, e 23.

Sitzungsberichte... *Rendiconti della I. R. Accademia delle Scienze di Vienna.* Classe di matematiche, e scienze naturali. Vol. 48.mo, N. 9 e 10: vol. 49.mo, dal N. 1 all' 8. - 1.ª Edizione. - Vol. 48.mo, N. 10 - Vol. 49.mo dall' 1 al 9 - 2.ª Edizione.

Sitzungsberichte... *Rendiconti dell' Accademia Sudd.* Classe filosofica, e storica - Vol 44.mo - N. 9 e 10 - Vol. 45.mo - N. 1 all' 8.

Archiv... *Archivio dell' Accademia Sudd.* Vol. 31.mo

Almanach... *Almanacco dell' Accademia Sudd.ª del* 1864.

Intorno ad alcuni passi notevoli d' antiehe opere, relativi alle scienze fisiche ed astronomiche. Lettera di Enrico Narducci al sig. prof. P. Volpicelli, ec. Milano, 1865; un fasc. in 8.°

Passage... *Passaggio del trattato della musica di Aristide Quintiliano, relativo al numero nuziale di Platone, tradotto ed annotato da A. - T. - H. Vincent, membro dell' Istituto imp. di Francia, e da Th. Henri Martin, decano della facoltà delle lettere di Rennes, con due Note di Th. Henri Martin; l' una sulla epoca d' Aristide Quintiliano, e su quella dell' Astronomo Claudio Ptolomeo, l' altra sulla Cronologia della Vita e delle Opere di Ptolomeo.* Roma, 1865; un fasc. in 4.°

Sur... *Su Pietro Adsigerio, e le più antiche osservazioni della declinazione dell' Ago calamitato, di W. Wenckebach, tradotto dall' olandese da T. Hosiberg.* Roma, 1865; un fasc. in 4.°

Degli invarianti e covarianti delle forme binarie, ed in particolare di quelle di 3° e 4° grado, di F. Siacci. Roma, 1865; un fasc. in 4.°

Sull' uso dei determinanti per rappresentare la somma delle potenze intere dei numeri naturali. Nota di F. Siacci. Roma, un fasc. in 4.°

Sulle linee isotermiche dell' Italia, de' suoi Mari ed Isole adiacenti. Studi di Giuseppe dott. Serra Carpi ingegnere, presentati dal prof. P. Volpicelli Roma, 1855; un fasc. in 4.°

IMPRIMATUR
Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR
Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae
Vicesgerens.

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE IIª DEL 7 GENNARO 1866.

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

Intorno ad alcune somme di cubi. Nota di Angelo Genocchi Professore di matematica nella Regia Università di Torino.

1.° Si conoscono parecchie soluzioni, con numeri interi e positivi, dell'equazione

$$(1) \qquad x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 = y^3 ,$$

e da esse infinite altre se ne possono dedurre moltiplicando per un medesimo fattore i valori già trovati di x, r, e y. Queste saranno soluzioni *derivate*: cercheremo altre soluzioni *primitive* nel modo seguente. Posto $x+r=4s$, $y=6t$, risulta

$$(2) \qquad s(r^2+8s^2)=9t^3,$$

e per risolver questa si pone

$$s=9t'^3, \qquad r+s\sqrt{-8}=(p+q\sqrt{-8})^3 ,$$

donde si trae

$$r=p\,(p^2-24q^2) , \qquad s=q\,(3p^2-8q^2) ;$$

e però

$$t'^3=s'(p^2-24s'^2) , \qquad \text{fatto} \qquad q=3s'.$$

Si pone indi

$$s'=27t''^3 , \qquad p+s'\sqrt{24}=(r'+s''\sqrt{24})^3 ,$$

onde

$$p=r'\,(r'^2+72s''^2) , \qquad s'=3s''\,(r'^2+8s''^2),$$

ossia

$$s''(r'^2 + 8s''^2) = 9t''^3 ,$$

equazione simile alla (2), che risolvendosi cogli stessi numeri può servire a trovarne successivamente quante soluzioni si vogliano.

Si prenda la soluzione $r' = s'' = t'' = 1$: ne dedurremo

$$s' = 27t''^3 = 27 , \quad q = 3s' = 81 , \quad p = r'(r'^2 + 72 s''^2) = 73 ,$$

$$r = p(p^2 - 24q^2) = 73(73^2 - 24.81^2) = -73.152135 ,$$

$$s = q(3p^2 - 8q^2) = 81(3.73^2 - 8.81^2) = - 81.36501,$$

e quindi $r = -11105855$ e $x = 4s - r = -720469$. Cambiando il segno, avremo i valori interi e positivi

$$x = 720469 , \quad r = 11105855,$$

che soddisfaranno all'equazione (1) con y pure intero e positivo.

2.° Si può applicare lo stesso metodo all'equazione

$$(3) \qquad x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \ldots + (x + nr - r)^3 = y^3,$$

supponendo $n > 3$. Fatto $s = 2x + (n-1)r$, questa equazione diventa, secondo una formola del signor Le Besgue,

$$(4) \qquad ns[s^2 + (n^2 - 1)r^2] = 8y^3 ;$$

per ciò nel caso di $n = 4$ si ha

$$(5) \qquad s(s^2 + 15r^2) = 2y^3 ,$$

e posto

$$s = 2s'^3 , \quad s + r\sqrt{-15} = (p + q\sqrt{-15})^3 ,$$

ne risulta

$$2s'^3 = p(p^2 - 45q^2) , \quad r = 3q(p^2 - 5q^2) ;$$

indi posto

$$p = 2y'^3 , \quad p + 3q\sqrt{5} = (s'' + r'\sqrt{5})^3 ,$$

si ottiene

$$3q = r'(3s''^2 + 5r'^2) , \quad s''(s''^2 + 15r'^2) = 2y'^3 ,$$

la qual ultima equazione è simile alla (5).

Preso $r' = 1$, $s'' = 25$, $y' = 20$, i quali valori corrispondono alla eguaglianza

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3 ,$$

si troverà

$$p = 2y'^3 = 2.20^3\,,\quad s' = y'(s''^2 - 5r'^2) = 20.620 = 20^2.31\,,$$

$$s = 2s'^3 = 2.20^6.31^3\,,\qquad q = \frac{r'}{3}(3s''^2 + 5r'^2) = \frac{1880}{3} = 20.\frac{94}{3}\,,$$

$$r = 3q(p^2 - 5q^2) = 2.20^4.\frac{47}{9}(20^3.4.9 - 47^2) = 2.20^4.\frac{47}{9}.285791\,.$$

Si possono moltiplicare per 9 e dividere per 2.20^4 i valori di r e s riducendoli così a

$$r = 47.285791 = 13432177\,,$$

$$s = 9.20^2.31^3 = 107247600\,,$$

donde

$$x = \frac{s - 3r}{2} = \frac{66951069}{2}\,.$$

Si avrà dunque, moltiplicando per 2 questi valori di x e r, una nuova soluzione dell'equazione (3), per $n = 4$, con numeri interi e positivi

$$x = 66951069\,,\qquad r = 26864354.$$

3.° Generalmente, per soddisfare all'equazione (4), fatto per compendio $n^2 - 1 = m$, poniamo

$$s = n^2 s'^3,\qquad s + r\sqrt{-m} = (p + q\sqrt{-m})^3\,,$$

donde

$$r = q(3p^2 - mq^2)\,,\qquad n^2 s'^3 = p(p^2 - 3mq^2)\,;$$

poniamo inoltre

$$np = 8y'^3\,,\qquad p + q\sqrt{3m} = (s'' + r'\sqrt{3m})^3,$$

donde

$$q = 3r'(s''^2 + m\,r'^2)\,,\qquad p = s''(s''^2 + 9mr'^2)\,,$$

sicchè facendo $3r' = r''$ si ha l'equazione simile alla (4)

$$ns''[s''^2 + (n^2 - 1)\,r''^2] = 8y'^3.$$

Così, data una soluzione della (4), i medesimi numeri potranno prendersi pei valori di r'', s'' e y', e da questi si dedurranno r', p, q, r, s, onde si avrà una nuova soluzione della (4), che potrà similmente somministrarne un'altra, ecc. ecc. Ma è chiaro che le soluzioni ottenute in tal modo potranno non essere le sole possibili; di più, sebbene si trovino valori positivi per s ed r, può darsi che x risulti negativo e quindi non si abbia per l'equazione (3) una soluzione con numeri positivi quantunque si abbia per la (4).

Preso $r''=s''=1$, $y'=\frac{n}{2}$, ne risulterà

$$r'=\frac{1}{3}, \quad p=n^2, \quad q=\frac{n^2+8}{9}, \qquad r=n^4.\frac{n^2+8}{3}-(n^2-1)\left(\frac{n^2+8}{9}\right)^3,$$

$$s=n^6-n^2(n^2-1)\frac{(n^2+8)^2}{27}:$$

questi valori di r e s sono ambedue negativi quando n è maggiore di 16, da $n=3$ ad $n=7$ è positivo r, negativo s, ma in ambedue i casi si ha $s<(n-1)r$, prescindendo dai segni, e però nel primo membro dell'equazione (3) alcuni cubi saranno positivi, altri negativi. Da $n=8$ fino ad $n=16$ sarà s negativo, r positivo, ma in valor assoluto sarà $s>(n-1)r$, quindi x sarà negativo e saranno negativi tutti gl' indicati cubi, onde un semplice cambiamento di segni renderà positivi tutti i termini del primo membro dell'equazione (3).

4.° Si possono trovare altre formole più commode per dedurre da una soluzione dell'equazione (4) una nuova soluzione.

Sia una soluzione $s=f$, $r=g$, $2y=h$, e ritenendo il medesimo valore di s, si supponga

$$r=g+z \quad , \qquad 2y=h+pz:$$

sostituendo, togliendo i termini che si annullano per la (4), e dividendo poscia per z, avremo

$$mnf(2g+z)=3h^2p+3hp^2z+p^3z^2,$$

ove $m=n^2-1$; indi ponendo $p=\frac{2mnfg}{3h^2}$, ne trarremo

$$z=\frac{mnf-3hp^2}{p^3},$$

e per ciò una soluzione della (4) sarà eziandio

$$s=f, \qquad r=g+\frac{mnf-3hp^2}{p^3}, \qquad 2y=\frac{mnf-2hp^2}{p^2}.$$

Messo il valore di p, messo per h^3 il valore

$$h^3=nf(f^2+mg^2)$$

che risulta dalla (4), e fatto

$$(6) \qquad f'=8m^2fg^3, \quad g'=27f^4+18mf^2g^2-m^2g^4, \quad h'=2mgh(9f^2+mg^2),$$

si troverà

$$s=\frac{f'}{8m^2g^3}, \qquad r=\frac{g'}{8m^2g^3}, \qquad 2y=\frac{h'}{8m^2g^3};$$

onde è chiaro che l'equazione (4) sarà soddisfatta anche dai valori $s=f'$, $r=g'$, $2y=h'$ che sono dati dalle (6) e che saranno interi se sono interi f, g, h.

Preso $f=g=1$, $h=n$, le formole (6) daranno

$$f'=8m^2, \qquad g'=27+18m-m^2, \qquad h'=2mn(m+9):$$

il valore di g' sarà positivo per $n=3$ e $n=4$, negativo per $n>4$, e quindi per $n>4$ si cambierà g' in $-g'$, ma da $n=3$ sino ad $n=11$ si avrà in valor assoluto $f'>(n-1)g'$, cosicchè ne risulteranno soluzioni dell'equazione (3) con valori interi e positivi di r, x, e y. A cagion d'esempio per $n=6$ si ha $f'=8.35^2$, $g'=8.71$, e tolto il fattor comune 8, risulta

$$x=\frac{35^2-5.71}{2}=435, \qquad r=71.$$

Si può anche fare $a=\frac{mg^2}{f^2}$, $a'=\frac{mg'^2}{f'^2}$, donde

$$a'=\frac{1}{64a^3}(27+18a-a^2)^2; \tag{7}$$

e se risulterà $a'<1$, sarà $f'^2>mg'^2>(n-1)^2g'^2$, e quindi $f'>(n-1)g'$, onde si avrà ancora una soluzione dell'equazione (3) con numeri interi e positivi. Si potranno similmente calcolare altre quantità a'', a''', . . . che dipendano da a', a'', . . . come a' dipende da a, e quando si giunga ad una di tali quantità che sia <1, si avrà una soluzione della stessa equazione (3) con numeri interi e positivi.

5.º È da notarsi che anche per valori di n grandi quanto si voglia si può soddisfare alla (3) con x intero e positivo, y razionale, *supponendo* $r=1$: basta prendere per n un cubo non divisibile per 3. Ciò risulta dalle formole con cui il signor Camillo Pagliani, cadetto nel R. Corpo dei Pionieri di Modena, sciolse il problema di *trovare mille cubi interi consecutivi la cui somma sia un cubo* (*). Imperocchè cambiando n in n^3 e facendo

$$x=\frac{(n^2-1)^2-3(n^3+1)}{6},$$

si trova

$$(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+n^3)^3=\left(nx+\frac{n^3(n+1)}{2}\right)^3;$$

e si vede che il numeratore del valore di x è sempre un numero pari ed è anche divisibile per 3 quando non è tale n, essendo allora n^2-1 divisibile per 3, onde in questo caso sarà x un numero intero. Se si prende n divisibile per 3, sarà un numero intero $3x$, e moltiplicando l'equazion precedente per 3^3, si avrà eguale ad un cubo la somma dei cubi di n^3 numeri interi formanti una progressione aritmetica la cui ragione sarà 3.

(*) V. *Annales de Mathématiques par Gergonne*, tom. XX, p. 382—384.

6.° Se si domanda che la somma dei termini d' una progressione aritmetica elevati a cubo non sia un cubo ma un quadrato, si avrà invece dell' equazione (3) la seguente

$$(8) \qquad x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \ldots + (x + nr - r)^3 = y^2$$

che potrà ridursi alla

$$(9) \qquad ns\left[s^2 + (n^2 - 1)\, r^2\right] = 8y^2.$$

Facendo $2y = nst$, trarremo da questa

$$s^2 + (n^2 - 1)r^2 = 2nst^2,$$

donde $s = nt^2 \pm \sqrt{n^2 t^4 - (n^2 - 1)\, r^2}$: quindi porremo

$$n^2 t^4 - (n^2 - 1)r^2 = (nt^2 - rp)^2,$$

e otterremo

$$(10) \qquad r = \frac{2npt^2}{n^2 - 1 + p^2}$$

a cui corrisponderanno due valori di s

$$(11) \qquad s = \frac{2n(n^2 - 1)t^2}{n^2 - 1 + p^2}, \qquad s = \frac{2np^2t^2}{n^2 - 1 + p^2}.$$

Assegnando valori razionali quali si vogliano a p e t si avranno dunque valori razionali per r, s ed y, e così le formole (10) e (11) daranno la soluzione generale dell'equazione (9) con numeri razionali.

I due valori (11) si possono anche ridurre ad un solo, poichè il secondo diventa identico al primo se vi si cambia p in $\frac{n^2 - 1}{p}$, mentre con questo cambiamento non si cambia r. Dal primo si dedurrà

$$(12) \qquad x = \frac{n(n - 1)(n + 1 - p)t^2}{n^2 - 1 + p^2},$$

formola che unita alla (10) porgerà la soluzione generale dell'equazione (8) con numeri razionali.

Se prendiamo $t = 1$, $p = n - 1$, troviamo $r = 1$, $x = 1$ la qual soluzione è notissima. Preso $p = \frac{n^2 - 1}{n}$, si avrà

$$r = \frac{2n^2t^2}{2n^2 - 1}, \qquad x = \frac{n^2t^2}{2n^2 - 1},$$

laonde sarà $x = 1$, $r = 2$, se pongasi

$$2n^2 - 1 = n^2 t^2, \tag{13}$$

cioè $2n^2 - 1$ quadrato, il che corrisponde pure ad una soluzione nota. I valori di n che soddisfanno all'equazione (13) sono compresi nella formola

$$n = \frac{(\sqrt{2}+1)^i + (\sqrt{2}-1)^i}{2\sqrt{2}}, \tag{14}$$

dove i denota un numero impari positivo.

7.° Gli antichi aritmetici hanno osservato che i numeri $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $s = 6$ verificano nel medesimo tempo le tre equazioni

$$xy = 2s, \qquad x^2 + y^2 = z^2, \qquad x^3 + y^3 + z^3 = s^3: \tag{15}$$

si può dimostrare che fra i numeri interi sono i soli i quali godano di questa proprietà.

Imperocchè la soluzione più generale della seconda delle (15) con numeri interi è

$$x = m(a^2 - b^2), \quad y = 2mab, \quad z = m(a^2 + b^2),$$

se m, a, b siano numeri interi de' quali gli ultimi a e b si possono supporre primi tra loro; quindi la prima delle (15) darà

$$s = m^2 ab(a^2 - b^2),$$

e sostituendo tutto nella terza si avrà

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^3 ab^3 (a^2 - b^2)^3.$$

Segue da questa equazione che $\frac{2a^4}{b^2}$ deve essere un numero intero, e supponendosi b primo ad a, sarà b^2 divisore di 2, e però $b = 1$. Adunque

$$2(a^4 + 3 + 4a) = m^3 a (a^2 - 1)^3,$$

ossia, dividendo per $a + 1$,

$$2(a-1)^2 + 4 = m^3 a (a^2 - 1)(a-1)^2;$$

onde 4 divisibile per $(a-1)^2$, 2 divisibile per $a - 1$, e così $a - 1 = 2$, ovvero $a - 1 = 1$, il che somministra $a = 3$, ovvero $a = 2$. L'ultima equazione per $a=3$ diverrebbe

$$12 = m^3.3.8.4, \qquad \text{ossia} \qquad 1 = 8m^3,$$

il che è assurdo con m intero: resta dunque soltanto $a = 2$ che porge $1 = m^3$, $m = 1$, e quindi i valori già indicati di x, y, z, s.

In luogo della terza delle equazioni (15) si potrebbe proporre la seguente più generale

$$x^3 + y^3 + z^3 = s^n t, \tag{16}$$

in cui t è una nuova incognita e n un esponente dato intero e > 1. Procedendo come dianzi si troverà un'equazione

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^{2n-3}\, a^{n-2}\, b^n (a^2 - b^2)^n\, t$$

dalla quale si dedurrà $\dfrac{2a^4}{b^2}$ intero, e quindi $b = 1$, se si vuole che anche t sia intero. Si avrà poscia

$$2(a-1)^2 + 4 = m^{2n-3}\, a^{n-2}\, (a-1)^n\, (a+1)^{n-2}\, t,$$

e però $\dfrac{4}{(a-1)^2}$ e $\dfrac{2}{a-1}$ interi, onde $a = 2$ oppure $a = 3$. Preso $a = 3$ si trova

$$12 = m^{2n-3}.3^{n-3}.4^{n-3}\, t\,,$$

il che per $n > 2$ somministra l'eguaglianza

$$\frac{1}{2^n} = m^{2n-3}.3^{n-3}.4^{n-3}\, t$$

assurda con m e t interi, e per $n = 2$ somministra $3 = mt$, e quindi $m = 1$ e $t = 3$, oppure $m = 3$ e $t = 1$. Preso $a = 2$ si ha $6 = m^{2n-3}.2^{n-2}.3^{n-2}t$, il che è assurdo quando $n > 3$, porge $m = t = 1$ se $n = 3$, e $mt = 6$ se $n = 2$, talchè allora si hanno per m e t i valori 2, 3; 1, 6.

Sulle bottiglie galleggianti come mezzo di esplorare le correnti marittime. Relazione e memoria di monsig. Francesco Nardi.

L' Ammiraglio Barone Wrangell celebre per molti viaggi scientifici, e pericolosissimi fatti sul mare e sui ghiacci a Nord della Siberia, dei quali tanto vantaggiossi la geografia, come altresì per gli utilissimi servigi resi al suo Impero e alle scienze, mi comunicava pochi dì sono un fatto, che sebbene appaja insignificante, si collega con un' ordine di fenomeni importantissimi. Egli riceveva qui in Roma, dove passa il secondo inverno per ristorare la sua salute, una lettera dell' Ammiragliato inglese, nella quale n' era inchiusa un'altra di suo figlio Ferdinando, ufficiale della marina russa. Questi, salpando da Brest per un viaggio lontano, e d' incerta durata, il 26 settembre dell' anno testè decorso, a bordo della fregata russa il Periscwed, s' accorse d' aver dimenticato d' inviare alla posta una lettera scritta a suo padre prima di lasciare il porto. La collocò in una bottiglia, che ben sigillata gittò in mare a S. E. dell'isola di Ouessant non lungi da Brest (48°20′ lat. 7°30′ long. occ. P.) La bottiglia fu ritrovata da un pescatore sulla costa inglese presso Bridport nel Dorset al punto di Chedweck Coast guard Station, il 25 Novembre, cioè due mesi dopo, e il sig. Maxton capo di quella stazione doganale mandolla all' Ammiragliato di Londra, che la inviò all' ammiraglio Wrangel, cui era diretta. La lettera, come vedete, non ebbe a patire che leggero danno dall' acqua salsa, ed è perfettamente leggibile. Confrontando Ouessant luogo della partenza con Bridport luogo dell' arrivo, noi troviamo che il viaggio della bottiglia fu N. N:E, ch' è precisamente l' andamento della corrente nella Manica, dove il Golfstream, cioè la corrente del Golfo, fattasi molto lenta, ma tuttora sensibile, tiene quel cammino. È noto che sui corpi galleggianti sul mare la maggior forza impulsiva costante viene dalle correnti, mentre affatto accidentale, leggiera, e dubbiosa è quella delle tempeste, e niuna quella della marea. Questo indusse già da oltre 40 anni i navigatori inglesi e americani a giovarsi di bottiglie galleggianti per esplorare le correnti, e il maggior merito ne appartiene al capitano della marineria inglese il celebre Beechey: Si scelgono bottiglie, o a dir meglio fiaschi, di terra cotta, ben forti di colore assai vivo, di solito rosso, e in essi si pone una carta indicante il nome del legno, quello del capitano, il giorno e l' ora del gettito, e la precisa longitudine e latitudine; indi fortemente turati si lanciano in in mare lungi dal bastimento da uno

dei due bordi. Chi li ritrova manda la carta chiusa nella bottiglia ail' Ammiragliato inglese indicando l' autore, il sito, e il tempo del ritrovamento. L' Ammiragliato raccoglie questi preziosi documenti, e gli usa a studiare queste misteriose circolazioni delle acque del mare , confrontandoli tra loro , e traendone utili illazioni. Il capitano Beechey disegnò una preziosa carta dove descrisse il viaggio di 100 di queste bottiglie o fiaschi; Berghaus narra quello di 21. Un grande avviatore di queste bottiglie è la corrente del Golfo, la quale le trasporta seco, e quasi le attrae. E qui per corrente del Golfo non intendo soltanto quel gran fiume, ch' esce tra Florida e Cuba per diriggersi verso Europa a temperarne così providamente il clima , ma altresì le correnti che lo generano, e principalmente, l' equatoriale , che movendo dalla costa della Guinea si dirigge al Golfo dei Caraibi, donde passa in quello del Messico, e dà probabilmente impulso alla corrente del Golfo.

Anche Maury nota, che le bottiglie gittate tra l' antico e il nuovo mondo si sono trovate generalmente lunghesso il corso della corrente del Golfo. Di due lanciate in latitudini meridionali sulla costa dell' Affrica, una fu ripescata presso l' isola di Trinidad, e l' altra presso quella di Guernsey all' imboccatura della Manica, Questa ultima seguì la linea normale tenuta anche dalla bottiglia di Wrangell. La prima forse andò all' isola della Trinidad portatavi dalla corrente equatoriale, la quale, come dicemmo, crediamo connessa, anzi generatrice della corrente del Golfo. Più lungo e più importante fu il viaggio d'altra bottiglia gittata da un navigatore al capo Horn, e ripescata nel 1837 sulle coste d' Irlanda. Questa probabilmente seguì da prima la corrente che rade la costa brasiliana , entrò quindi nella corrente equatoriale, e per essa nel Golfo dei Caraibi e del Messico , d' onde passò nella corrente del golfo , la quale movendo verso Europa abbraccia e traversa il mar brittannico.

Le correnti sono d' una così grande importanza per le navigazioni , e per la conoscenza fisica del globo, che non se ne può abbastanza raccomandare lo studio. Molto si è fatto sopratutto da Maury, Beechey, Mühry, Berghaus , e Iohnston , ma pur molto resta a farsi, anzi paragonando i diversi lavori anche più recenti, e le diverse carte, mi pare che l' opera sia più presto abbozzata, che vicina al suo termine. In non pochi punti importantissimi dell' Oceano, le correnti sono ancora incerte, e forse mutano colle stagioni, e i fatti sembrano quasi contradittorii; e il nostro Mediterraneo, ch' è pure il gran mercato dei popoli d' Europa , è uno dei mari più dubbiosi e difficili ad essere esplorati. Il sistema delle bottiglie , o fiaschi lanciati in

mare, coll' esatto calcolo del punto di partenza e di ritrovamento, se non è un mezzo nè unico, nè infallibile a rilevar le correnti, è certo utilissimo; e quando una serie di fatti cospiri in un risuitato, questo può considerarsi come certo. Onde noi lo raccomandiamo altamente ai navigatori italiani. L'esperimento non è certamente nè molto dispendioso, nè punto difficile, specialmente ora che l' uso dei cronometri rende il calcolo delle longitudini così pronto e sicuro. Che se le piante del nuovo mondo portate dalla corrente del Golfo alle isole Canarie svelarono alla mente di Colombo il gran segreto dell' altro emisfero; altri segreti certo assai men gravi, ma pur preziosi potranno manifestare queste silenziose navigatrici ai loro fortunati raccoglitori.

Ricerche analitiche, relative al geometrico luogo, tanto dei punti di tangenza fra uno, e due sistemi di parallele, con una serie di coniche omofocali; quanto dei punti d' intersecazione delle tangenti parallele di un sistema, colle rispettive di un altro. — Memoria del prof. P. VOLPICELLI (Continuazione) (*).

Intendendo sempre per sen.2α un valore *positivo*, risulterà dalla (28) che la eccentricità c' della iperbola equilatera di tangenza, può essere tanto maggiore, quanto minore dell'altra c, comune alla serie di coniche omofocali. Quindi chiaro apparisce, che se abbiasi

$$\alpha = 0, \quad \text{od} \quad \alpha = 90°,$$

avremo dalla (28) stessa $c' = 0$; vale a dire la eccentricità della iperbola di tangenza, sarà un minimo; e ciò corrisponde al caso già considerato (§. 4,), in cui la iperbola di tangenza si riduce a due rette. Essendo inoltre

---

(*) Per quello che precede, v. questo volume, p. 26. – Inoltre si è dovuto quì estendere maggiormente il titolo di questa memoria, perchè lo sviluppo dato in seguito alla medesima, divenne maggiore del concepito in principio. Quindi la memoria stessa risnltò divisa in tre parti: la prima tratta di solo un sistema di parallele; la seconda di due; la terza poi si riferisce al geometrico luogo delle intersecazioni, fra le rispettive parallele di due sistemi. Si avverta che per serie di coniche, intendiamo una riunione di sì fatte curve, non solo della medesima specie, ma pure di specie diverse.

$$\alpha = \frac{\pi}{12} = 15^\circ, \text{ sarà } \operatorname{sen}.2\alpha = \frac{1}{2},$$

e dalla (28) si avrà $c' = c$. Finalmente se pongasi

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ od } \alpha = \frac{3\pi}{4}, \text{ sarà } \operatorname{sen}.2\alpha = \pm 1,$$

ed il valore *numerico* di c', per la (28), diverrà un massimo, cioè $c\sqrt{2}$.

16.° Adunque riepilogando potremo concludere il seguente

Teorema II. *La eccentricità della iperbola di tangenza, è un minimo per* $\alpha = 0$; *eguaglia quella delle coniche omofocali per* $\alpha = 15^\circ$, *e diviene un massimo per* $\alpha = 45^\circ$: *inoltre crescendo* α, *otterremo per angoli equidifferenti da* 45°, *eccentricità coincidenti.*

§. 7.

17.° Passando a vedere per quali valori delle c, α, la iperbola di tangenza, riducesi a delle rette, riprendiamo la (17), che suppone com'è noto, l'origine delle coordinate nel fuoco, e non nel centro delle coniche. Per un *primo* caso, ad ogni valore di α, la iperbola di tangenza diviene una retta, purchè abbiasi $c = \infty$; poichè posto ciò, la (17) si riduce alla

$$y\cot.2\alpha - x = o,$$

ovvero alla

$$y = x\operatorname{tang}.2\alpha, \tag{29}$$

equazione appartenente ad una retta, che passa per l'origine, cioè pel comune fuoco, facendo coll'asse delle ascisse (4°,6°) un angolo 2α. Ma $c = \infty$ appartiene alla parabola, come fu osservato (4.°); avremo dunque il seguente

Teorema III. *Guidando ad una serie di parabole omofocali, un sistema di tangenti parallele fra loro, la iperbola di tangenza riducesi ad una retta, che passa pel comune fuoco, e che comprende coll'asse delle ascisse, un angolo doppio di quello formato dal sistema con questo asse.*

Tutto ciò che abbiamo esposto relativamente alla retta di tangenza, nel sistema di parabole omofocali, è un corollario del teorema I; e viene rappresentato dalla (fig. 4), ove la Nb' esprime la retta di tangenza, essendo b' il comune fuoco: ma in seguito (§. 8) concluderemo un IV teorema, di cui questo III è un corollario.

Possiamo confermare colla seguente geometrica osservazione, che quando la linea di tangenza, come nel caso considerato, sia una retta Nb', passante pel fuoco b', deve questa fare coll'asse b'X delle ascisse, un angolo Nb'X (fig. 4) doppio di quello TEX ($=\alpha$), che fanno le tangenti ET, E'T', E''T'', ..., alla serie di parabole, col medesimo asse. In fatti la costruzione geometrica per guidare una tangente alla parabola, consiste nel dividere in mezzo l' angolo compreso dal raggio vettore Bb', e dalla retta BC parallela all'asse, e questo angolo eguaglia Bb'X.

18.° Passando al *secondo* caso, vediamo quali sono i valori di α, che riducono la iperbola di tangenza ad una o due rette, per qualunque valore di c; ed a tal fine ci serviremo della (27). Vero è che questa equazione non abbraccia più la parabola; ma essa fu considerata separatamente (17.°). Dobbiamo inoltre avvertire che la medesima (27), non si riferisce al sistema di coordinate, in cui l'asse delle x passa pei fuochi a', b'; ma si riferisce bensì al sistema coll'origine al comune centro delle coniche omofocali ; ed in modo, che l'asse delle ascisse coincida con quello della iperbola equilatera di tangenza.

Per tanto siccome la (27), sopprimendo in essa gli accenti, può ridursi alla

$$(x+y)(x-y)-c^2\text{sen.}2\alpha=0\ ,$$

così è facile comprendere, che di questa equazione il primo membro è soltanto il prodotto di due fattori di primo grado, quando abbiasi la

$$c^2\text{sen.}2\alpha=0\ , \tag{30}$$

equazione cui soddisfanno i seguenti valori

$$\alpha=0\ ,\qquad \text{ed}\qquad \alpha=90°,$$

per ognuno dei quali la equazione precedente riducesi nella

$$(x+y)(x-y)=0\ , \tag{31}$$

rappresentante due rette, che s' intersecano ad angolo di 90° nel centro delle coniche omofocali, e che formano un angolo di 45° cogli assi coordinati; perciò si confondono cogli assi della serie di coniche stesse.

Queste due rette poi si debbono interpretrare come segue: avvicinandosi l'angolo α (fig. 1) sempre più ad un retto come limite, i punti V, V', vertici della iperbola limite, sempre più si accosteranno al centro O, e la iperbola di tangenza, si anderà sempre più ad accostare agli assintoti suoi SS', TT'. Essendo inoltre l'angolo $\alpha=90°$, la iperbola di tangenza si confonderà cogli assintoti medesimi

che in questo caso riduconsi alle $\overline{-X, X}$, e $\overline{-Y, Y}$. Il vero significato adunque della (31), consiste nel rappresentare le rette limiti, cui si accosta senza fine la iperbola di tangenza, quando l'angolo α giunge a confondersi con un retto. Però a rigore dobbiamo dire che, nel caso di $\alpha = 90°$, la curva di tangenza si confonde co' suoi limiti, cioè colle due rette $\overline{-X, X}$, e $\overline{-Y, Y}$; ma il limite $\overline{-Y, Y}$ non si potrebbe ottenere mediante la costruzione dei punti di tangenza.

Possiamo confermare tutto ciò col ragionamento seguente: guidando alle coniche omofocali della serie, tante tangenti perpendicolari sull'asse $\overline{-X, X}$, i punti di tangenza saranno evidentemente i vertici dell' ellissi e delle iperbole, che compongono la serie stessa; i quali si troveranno distribuiti su tutta la lunghezza della retta $\overline{-X, X}$. Ma siccome in questo caso non esiste più la iperbola limite; così è chiaro che la $\overline{-Y, Y}$, deve anch'essa considerarsi come una delle iperbole omofocali. Però la rispettiva tangente a questa iperbola si confonde colla iperbola stessa; quindi è chiaro che dovranno esistere una infinità di punti di tangenza pure in questa retta; e così vedesi che la (31) contiene anche la retta $\overline{-Y, Y}$, come linea di tangenza.

Quanto abbiamo quì riferito per $\alpha = 90°$, potrebbe, con qualche modificazione, ripetersi anche pel caso di $\alpha = o$. Esiste però una diversità osservabile fra questi due casi; ed è che le iperbole non forniscono nel secondo caso alcun punto di tangenza, e la iperbola limite viene rappresentata, nel caso medesimo, dalle rette $\overline{-X, X}$, e $\overline{-Y, Y}$.

19.° Dai ragionamenti che precedono abbiamo l'enunciato seguente: Se le due date direzioni, una delle tangenti parallele fra loro, l'altra di uno degli assi appartenenti alle coniche omofocali, coincidano; allora la iperbola equilatera di tangenza riducesi a due rette, che sono rappresentate rispettivamente dai medesimi assi.

Il ragionamento precedente, o almeno quella parte del medesimo, che si riferisce alla sola retta perpendicolare alle tangenti, si deduce dai soli elementi di geometria, riflettendo che le tangenti guidate pei vertici delle coniche, sono perpendicolari agli assi; ma noi volemmo dedurla dall'analisi, per dimostrare la generalità dell'equazioni, colle quali abbiamo rappresentata la iperbola equilatera di tangenza.

Il *terzo* caso, nel quale, per qualunque valore di α, la iperbola equilatera di tangenza si riduce ad una retta, è quello in cui si ha $c = o$, cioè in cui la serie delle coniche omofocali, dall'essere composta di ellissi, diviene se-

rie di circoli concentrici; od anche dall'essere una serie d' iperbole, si riduce a due rette, che s' incontrano nel centro. Noi tralasciamo la considerazione di questo ultimo fatto, nel quale non esistono più coniche omofocali propriamente dette; ma ci limitiamo al primo soltanto, in cui la (17), per una serie di circoli concentrici, riducesi alla

$$y^2 - x^2 + 2xy \cot.2\alpha = 0 ,$$

formola che non rappresenta propriamente una linea del second'ordine, ma bensì rappresenta due rette. Poichè il suo primo membro, mediante i coefficienti indeterminati si può decomporre in due fattori di primo grado, nel modo seguente:

$$y^2 - x^2 + 2xy \cot.2\alpha =$$

$$= \left[y + [\cot.2\alpha \mp \sqrt{(1+\cot.^2 2\alpha)}]x\right]\left[y - \frac{x}{\cot.2\alpha \mp \sqrt{(1+\cot.^2 2\alpha)}}\right] = 0.$$

Inoltre abbiamo

$$\cot.2\alpha \mp \sqrt{(1+\cot.^2 2\alpha)} = \cot.2\alpha \mp \frac{1}{\text{sen}.2\alpha} = \frac{\cos.2\alpha \mp 1}{\text{sen}.2\alpha} = \frac{2\cos.^2\alpha - 1 \mp 1}{2\cos.\alpha.\text{sen}\alpha} ;$$

perciò la ultima uguaglianza si ridurrà nella

$$y^2 - x^2 + 2xy \cot.2\alpha = \left[y + \frac{2\cos.^2\alpha - 1 \mp 1}{2\text{sen}.\alpha \cos.\alpha}x\right]\left[y - \frac{2x \,\text{sen}\alpha \cos\alpha}{2\cos.^2\alpha - 1 \mp 1}\right].$$

Prendendo il segno superiore avremo

$$\frac{2\cos.^2\alpha - 1 - 1}{2\text{sen}.\alpha \cos.\alpha} = \frac{\cos.^2\alpha - 1}{\text{sen}.\alpha \cos.\alpha} = -\frac{\text{sen}.^2\alpha}{\text{sen}.\alpha \cos.\alpha} = -\text{tang}.\alpha ,$$

e prendendo l' inferiore, sarà

$$\frac{2\cos.^2\alpha - 1 + 1}{2\text{sen}.\alpha \cos.\alpha} = \frac{2\cos.^2\alpha}{2\text{sen}.\alpha \cos.\alpha} = \frac{1}{\text{tang}.\alpha} .$$

Quindi la stessa equazione, tanto pel segno superiore, quanto per l' inferiore, si riduce alla

$$y^2 - x^2 + 2xy \cot.2\alpha = (y - x \,\text{tang}.\alpha)\left(y + \frac{x}{\text{tang}.\alpha}\right) = 0 ,$$

che perciò rappresenta due rette perpendicolari fra loro, che s' incontrano nel fuoco, cioè nel centro dei circoli, la prima parallela, e la seconda perpendicolare al sistema delle tangenti. Di queste due rette, la seconda è solo quella che appartiene al caso dei circoli concentrici, da noi considerato, essendo essa perpendicolare alle tangenti; mentre la prima si riferisce al fatto delle due rette,

da noi tralasciato. Del resto potrebbesi, riguardo a questa equazione, riflettere del tutto similmente a quanto fu riflettuto riguardo alla (31); avvertendo nel caso attuale, che non si avrebbe ad escludere il sistema delle due rette, indicate sul principio di questo caso terzo.

20.° Dunque potremo concludere, che guidando ad una serie di circoli concentrici un sistema di tangenti parallele, i punti di tangenza si troveranno tutti sopra una retta perpendicolare alle tangenti stesse.

Questo fatto apparisce chiaro, mediante i soli elementi di geometria, senza più; però lo volemmo dimostrare analiticamente, per far vedere che il medesimo è compreso anche nella (17).

Riepilogando quanto si riferisce ai casi, nei quali la curva di tangenza diviene una, o due rette, avremo le seguenti conclusioni:

21.° La iperbola equilatera di tangenza si trasforma in una sola retta, per qualunque valore di α, quando le coniche omofocali sono parabole, nel qual caso la retta di tangenza passa pel comune foco. Questa retta può essere concepita come una iperbola, che abbia l'asse reale infinito; poichè nel caso medesimo l'angolo assintotico si annulla.

22.° La iperbola medesima si trasforma in due rette, che s' incontrano perpendicolarmente nel centro, quando le coniche omofocali sono ellissi o iperbole, in cui le direzioni delle tangenti coincidono con quelle degli assi delle omofocali stesse. Ciò suppone che abbiasi

$$\alpha = 0 \,, \quad \text{od} \quad \alpha = 90^\circ \,,$$

e che l'asse delle ascisse passi pei comuni fuochi.

23.° La iperbola equilatera di tangenza, si riduce pure a due rette, che s' intersecano perpendicolarmente nel centro, quando le coniche omofocali divengono tanti circoli concentrici; e ciò si verifica per qualunque valore di α.

24.° Riguardo al *secondo* e *terzo* caso, riflettiamo che quelle rette, perpendicolari fra loro, le quali nei casi medesimi rappresentano due linee di tangenza, sono da considerare come iperbole equilatere, di cui l'asse $2a$ riducesi a zero.

§ 8.

Chiamando φ l'angolo che una tangente al punto (x, y), fa coll'asse delle ascisse, abbiamo

$$\text{tang.}\varphi = \frac{dy}{dx} \,.$$

Per determinare l' angolo φ nella iperbola di tangenza, risolveremo la (16) rispetto alla y, ed avremo

$$y = -(x-c)\cot.2\alpha \pm \sqrt{[(\cot.^2 2\alpha + 1)(x-c)^2 - c^2]} ,$$

ovvero

$$(32) \quad \begin{aligned} y &= -(x-c)\cot.2\alpha \pm \sqrt{\left[\frac{(x-c)^2}{\text{sen.}^2 2\alpha} - c^2\right]} = \\ &= -(x-c)\cot.2\alpha \pm \sqrt{\left[\frac{(x-c)^2 - c^2\text{sen.}^2 2\alpha}{\text{sen}^2.2\alpha}\right]} , \end{aligned}$$

donde

$$(33) \quad \text{tang.}\,\varphi = \frac{dy}{dx} = -\cot.2\alpha \pm \frac{x-c}{(\text{sen.}2\alpha)\sqrt{[(x-c)^2 - c^2\text{sen.}^2 2\alpha]}} ;$$

formula che, per la medesima x, fornisce due angoli, corrispondenti a due valori della y nella iperbola equilatera, rappresentata dalla (16) stessa.

Troveremo poi gli angoli corrispondenti alle tangenti, guidate pei fuochi comuni, e che per brevità chiameremo *tangenti fuocali*, rammentando che i fuochi stessi hanno rispettivamente le coordinate :

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 , \\ y &= 0 , \end{aligned}\right\} \quad \text{ed} \quad \left\{\begin{aligned} x &= 2c , \\ y &= 0 . \end{aligned}\right.$$

Inoltre ponendo nella (32) $x=0$, ascissa del primo fuoco, avremo, dopo facili riduzioni, la

$$y = c(\cot.2\alpha \pm \cot.2\alpha) ;$$

quindi si vede che per ottenere l'angolo della tangente a questo fuoco, si deve prendere il segno $-$ nelle (32), (33). Similmente, ponendo nella (32) stessa $x = 2c$, ascissa del secondo fuoco, avremo

$$y = c(-\cot.2\alpha \pm \cot.2\alpha) ;$$

laonde si otterrà l'angolo della tangente a questo secondo fuoco, prendendo il segno $+$.

Dunque per trovare l'angolo φ della prima tangente fuocale, dovremo nella (33) porre $x = 0$, e prendere il segno $-$; quindi sarà

$$\text{tang.}\varphi = -\cot.2\alpha + \frac{c}{(\text{sen.}2\alpha)\sqrt{(c^2 - c^2\text{sen.}^2 2\alpha)}} = -\cot.2\alpha + \frac{1}{\text{sen.}2\alpha\cos.2\alpha}$$

$$= \frac{-\cos.^2 2\alpha + 1}{\text{sen.}2\alpha\,.\,\cos.2\alpha} = \frac{\text{sen.}^2 2\alpha}{\text{sen.}2\alpha\,.\,\cos.2\alpha} = \text{tang.}2\alpha .$$

Determineremo inoltre l' angolo φ, relativo alla tangente fuocale del secondo fuoco, ponendo $x = 2c$ nell' (33), e prendendo il segno $+$, dal che avremo

$$\text{tang.}\varphi = -\text{cot.}2\alpha + \frac{c}{(\text{sen.}2\alpha)\sqrt{(c^2 - c^2\text{sen.}^2\alpha)}} = \text{tang.}2\alpha .$$

Per la ottenuta eguaglianza dei due trovati valori di φ, si vede che le due tangenti fuocali, sono fra loro parallele, come si poteva conoscere fin dal principio; poichè in qualunque conica, guidando un diametro, le due tangenti agli estremi del medesimo, sono parallele fra loro: inoltre la retta passante pei fuochi comuni alle coniche, è un diametro della iperbola di tangenza, perchè passa pel centro di questa curva.

25.° Dai risultamenti analitici del presente paragrafo, possiamo concludere la relazione.

$$\varphi = 2\alpha , \tag{34}$$

la quale dà luogo al seguente

Teorema IV. *Guidando ad una serie di coniche omofocali un sistema di tangenti parallele, quindi alla corrispondente iperbola di tangenza una tangente fuocale, questa formerà coll'asse che passa pei comuni fuochi un angolo, doppio di quello, formato dal sistema delle tangenti col medesimo asse.*

Questo teorema viene delucidato dalla (fig. 1), in cui le tangenti fuocali sono rappresentate dalle ZZ' e $Z''Z'''$: nella figura medesima, l' angolo $\alpha > 90$, quindi $\varphi > 180°$.

26.° Si consideri ora una qualunque iperbola equilatera, per esempio la $HMa'QH'M'b'Q'$ (fig. 1), e non abbiasi riguardo ad altro in essa, fuorchè al suo diametro qualunque $\overline{a'b'}$, ed alla relativa tangente ZZ', la quale sino quì fu detta *fuocale*, perchè passava pel fuoco alla serie di coniche comune, cui per ora non si deve avere più riguardo. Inoltre si rifletta che uno degli assintoti TT' della iperbola di tangenza, è diretto (§ 4, 11.°) come lo sono le parallele tangenti alla serie di coniche omofocali; e che per la (34) abbiamo l'angolo $b'a'Z$, formato della tangente ZZ' col diametro $b'a'$ della iperbola equilatera sopra espressa, doppio dell'angolo $da'b'$. Posto ciò, il teorema IV può ricevere un altro enunciato, del tutto indipendente dalle coniche omofocali, ed esprimente un' assoluta proprietà della iperbola equilatera, nel modo che segue:

Guidando per qualsiasi punto a' di una iperbola equilatera un diametro $a'b'$, ed una tangente ZZ', la retta $\overline{da'}$, che divide in mezzo l'angolo $Za'b'$, compreso fra quelle due rette, sarà parallela ad un assintoto TT' *della iperbola stessa.*

27.° Nel caso in cui le coniche omofocali divengano tante parabole, la curva di tangenza riducesi ad una retta, passante pel comune fuoco b' (§7,17.°); quindi la indicata tangente fuocale alla iperbola di tangenza, si confonderà con quella retta; e l'enunciato del teorema IV, si ridurrà in quello del teorema III, che perciò, come ivi fu indicato, è un corollario del precedente.

§. 9.

Dati essendo i due fuochi a', b' di una serie di coniche omofocali, queste, per quanto precede, saranno ellissi ed iperbole. A considerare le indicate due specie di coniche, sotto un medesimo punto di vista, immaginiamo che ognuna di esse, venga determinata dal suo vertice P (fig. 1), il quale si trova sull'asse $\overline{-X, X}$, passante pei fuochi. Ora è chiaro che facendo muovere continuamente il vertice P, si dovrà ottenere la indicata serie di coniche omofocali. Ed in fatti, se il moto del vertice stesso cominci ad una distanza infinita, la corrispondente conica sarà un circolo di raggio infinito. Per una distanza PO finita, ma grande, la conica sarà una ellisse, che diverrà tanto più schiacciata, quanto più PO diminuisce. Se poi giunga il vertice P nel fuoco a', cioè se il vertice stesso confondasi col fuoco, la ellisse ridurrassi nella retta $\overline{a'b'}$, che congiunge i due fuochi. Avvicinandosi anche maggiormente il vertice P al centro O, la conica diverrà una iperbola, coll'angolo assintotico sempre più crescente, come si vede nelle quattro iperbole punteggiate della (fig. 1). Se poi finalmente il vertice P giunga nel centro O, i due rami della iperbola si confonderanno coll'asse $\overline{Y, - Y}$.

Occupiamoci ora nel trovare l'andamento del punto di tangenza: e siccome ad ogni conica, ellisse od iperbola, possono corrispondere due punti di tangenza; così prenderemo a considerare quello dei medesimi punti, collocato dalla parte del vertice P, e corrispondente al supposto andamento del vertice stesso. Ciò viene messo in chiaro dalla (fig. 1), nella quale l'angolo α si rappresenta da T'OX. Quando sia la distanza $PO = a$ infinita, le corrispondenti coniche omofocali sono tanti circoli, e la iperbola di tangenza $Qa'H$ si confonde allora col suo assintoto SOS'. Per un'a finito, ma grande a sufficienza, da fornire una ellisse, come sarebbe a=PO, i punti di tangenza e''', e'', e',.., si troveranno nel primo quadrante (X,O,Y,) e ciascuno si avvicinerà maggiormente al fuoco a', col diminuire dell'asse variabile $2a$, che si riferisce alla serie dell'ellissi. Giunto il punto P nel fuoco a', la ellisse corrispondente si trasformerà

nella retta $\overline{b'a'}$, ed il relativo punto di tangenza si confonderà pur esso nel fuoco a'. Dobbiamo quindi concludere che il vertice P incontra, nel suo movimento lungo l'asse delle ascisse $\overline{X, -X}$, il punto di tangenza nel fuoco stesso; quindi allorchè il vertice P oltrepassa il fuoco a', la conica diviene iperbola, e come si vede nella stessa figura, esistono ancora delle tangenti per angoli assintotici sufficientemente piccoli. Però i rispettivi punti di tangénza i', i'', i''', . . , si troveranno allora nel quarto quadrante (X, O, — Y); e ciascuno di questi punti si allontanerà tanto più dal fuoco a', quanto più crescerà l'angolo assintotico delle iperbole costituenti la serie loro, come si vede nella figura stessa.

Sapendosi che deve la iperbola di tangenza essere equilatera (§ 3, 10.°), dobbiamo concludere , che il secondo assintoto suo TT', è perpendicolare al primo SS'. Ma siccome l' assintoto TT' è compreso pur esso nelle tangenti parallele fra loro ; così è chiaro che dovrà esistere una iperbola omofocale *limite* KVLK'V'L', che abbiamo denotata con tratti e punti (fig. 1), cioè con — . — . — . , la quale avrà per assintoto quello TT', appartenente alla iperbola di tangenza. Il relativo punto di tangenza si troverà in questo caso sull'assintoto TT', a distanza infinita del centro O.

Riguardo alla iperbola omofocale *limite*, osserviamo che il suo semiangolo assintotico (T', O, — X), deve uguagliare l'angolo acuto α, formato dal sistema delle parallele coll'asse delle ascisse (§ 15) ; e questa sua proprietà, coll'altra che il suo fuoco deve trovarsi nel comune a', è sufficiente a precisare la sua posizione. Quindi si troverà il vertice V della iperbola limite col solito metodo , cioè dal centro O si descriverà un circolo, il raggio del quale uguaglierà la eccentricità c; poi dalla intersecazione del circolo stesso coll'assintoto, si abbasserà una perpendicolare sull' asse : nel piede di questa consisterà il vertice che si cerca.

Riflettendo che la tangente a qualunque iperbola, è soltanto possibile, quando l'angolo acuto α, formato dalla sua direzione coll'asse della curva, è maggiore del semiangolo assintotico ; si vede che quelle iperbole omofocali , aventi per semiasse loro un'a, minore dell'altro VO, appartenente alla iperbola limite, non posseggono tangenti nelle parallele del dato sistema ; perchè il loro semiangolo assintotico sarà $> \alpha$. Da ciò dobbiamo concludere che se il vertice P , nel suo movimento lungo l' asse $\overline{-X, X}$, andando verso il centro O, sorpasserà il vertice V della iperbola limite, non corrisponderà più ad iperbole, che forniscono al sistema di parallele, punti di tangenza. Quanto è detto fin'ora pel vertice P, relativamente al suo moto lungo l'asse dalla parte delle ascisse po-

sitive, non che dal punto di tangenza riguardo all'andamento suo, può per causa della simmetria, ripetersi dalla parte delle ascisse negative.

28.° Riassumendo tutto il ragionamento sul proposito, dobbiamo concludere ciò che siegue. Se parta il vertice P da una distanza infinita, per avvicinarsi al centro O; la corrispondente conica omofocale sarà prima un circolo, ed il corrispondente punto di tangenza, si troverà sull' assintoto OS , ad una distanza infinita dal centro stesso. Divenendo la distanza PO ($= a$) finita, la conica omofocale diverrà una ellisse, ed il corrispondente punto di tangenza, si troverà nel primo quadrante (Y,O,X) delle coordinate, finchè il punto P giunga nel fuoco a', ove la ellisse diverrà una retta $\overline{b'a'}$, ed il corrispondente punto di tangenza, si troverà pur esso nel fuoco a'. Inoltre mentre il punto P corre pel tratto a'V, la conica omofocale diverrà una iperbola, coll'angolo assintotico sempre crescente; cosicchè il punto di tangenza percorrerà il ramo a'MH della iperbola di tangenza, posto nel quarto quadrante (X, O, — Y) delle coordinate. Questo punto di tangenza intanto si allontanerà sempre più del centro O, in guisa da trovarsi ad una distanza infinita, quando il vertice P giunge in V, cioè nel primo vertice di quella iperbola omofocale detta *limite*, la quale ha il semiangolo assintotico eguale all'angolo acuto α, formato dal sistema delle tangenti coll'asse delle x. Continuando il punto P a muoversi, passerà finalmente sull' asse delle ascisse negative; ma fintantochè non sarà giunto in V', secondo vertice della iperbola limite, non esisterà verun corrispondente punto di tangenza. Riguardo a questo vertice V', il corrispondente punto di tangenza ricomparisce nel secondo quadrante (Y,O,−X), ad una distanza infinita dal centro O, sulla retta TT', solo assintoto comune, tanto ai due rami iperbolici a'H, b'H', appartenenti alla iperbola di tangenza; quanto agli altri due VK, V'K', appartenenti alla iperbola limite. Dopo che il vertice P sarà passato per l'altro V', le coniche omofocali torneranno ad essere una serie d' iperbole; inoltre il corrispondente punto di tangenza, percorrendo la iperbola di tangenza, passerà pei contatti i^{VI}, i^{V}, i^{IV},..., giungerà nel secondo comune fuoco b', ove incontrerà lo stesso P. Da questo vertice, continuando P il suo moto lungo l'asse delle ascisse negative, il corrispondente punto di tangenza si troverà nel terzo quadrante (— X, O, — Y) delle coordinate, passando pei contatti e^{IV}, e^{V}, e^{VI}, . . . , ove le coniche omofocali torneranno ellissi, e termineranno per divenire nuovamente circoli, quando il vertice P sarà giunto a distanza infinita ; cosicchè il corrispondente punto di tangenza , si troverà sul secondo estremo S' dell' assintoto SS' , essendo partito dal primo S, al cominciare del suo moto.

§. 10.

29.° Dal precedente raziocinio risulta, che a tracciare *completamente*, mediante i soli contatti, la iperbola di tangenza, concorrono tutte le coniche di comuni fuochi a', b', tranne quelle iperbole che hanno i loro vertici nel tratto VV', (fig. 1). Una parte di questa iperbola di tangenza proviene dalle ellissi, e consiste nei due tratti costruiti *continui* a'Q, b'Q'; i quali progrediscono all' infinito. L'altra parte poi della iperbola stessa, che apparisce punteggiata, proviene dalle iperbole, e consiste nei due tratti costruiti *discontinui* a'MH e b'M'H'. Quei tratti che alle ellissi appartengono, sono, nel caso dalla figura, minori di quelli che si riferiscono alle iperbole. Ma ciò non ha sempre luogo, perchè dipende dall'angolo α, che fanno le tangenti coll' asse $-\overline{X, X}$. Ponendo a 45.° l'angolo α, che il sistema delle tangenti forma coll'asse delle x, il vertice M della iperbola di tangenza coinciderà col comune fuoco a', relativo alla serie delle coniche omofocali ; ed i tratti iperbolici a'Q, a'H, b'H', b'Q' (fig. 2) di cui parliamo, diverranno per questa ipotesi uguali fra loro. Essendo poi l'angolo in proposito maggiore di 45°, come nella (fig. 1), saranno più grandi gli archi iperbolici a'MH, b'M'H', provenienti dalle iperbole omofocali; mentre nel caso contrario, cioè quando l'angolo di cui parliamo sia minore di 45.°, saranno più grandi gli archi iperbolici, provenienti dalle omofocali ellissi.

30.° Nella eccellente opera del R. P. Jullien, intitolata « *Problemes de mécanique rationelle. Paris* 1855 » , si trova (T. I, p. 53) l' enunciato seguente : « *Sur une série d'ellipses* ou *d' hyperboles homofocales, le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée* , *est une hyperbole équilatère qui passe aux foyers communs.*

Questo enunciato è meno generale, di quello contenuto nel nostro teorema I; ed in fatti apparisce che, da quel chiarissimo autore, si esclude la parabola nell'enunciato suo; mentre dalla precedente analisi, e dal nostro teorema I, si vede che questa curva non fa punto eccezione, (§. 7, 17.°; e §. 8, 27.°); poichè come vedemmo (§. 7, 17.°) , la iperbola di tangenza nel caso delle parabole , si trasforma in una retta. Inoltre poichè lo stesso ch. autore , ha distinto l'ellissi dalle iperbole in quel suo enunciato, dicendo « *Sur une série d'ellipses* ou *d' hyperboles* » ha egli così escluso che queste due coniche possano coesistere nella verificazione dell'enunciato stesso. Però dalla precedente analisi, e dal nostro Teorema I.° che ne deriva, si deve concludere che la stessa iperbola equilatera, è luogo geometrico dei noti punti di tangenza della serie di coniche omofocali, ancorchè queste sieno fra loro di specie diversa; cioè quand'anche

sieno ellissi e iperbole omofocali, coesistenti nella serie medesima, come viene chiaramente rappresentato dalla (fig. 1). In fine quando , secondo l' autore citato, vogliasi riferire la iperbola di tangenza, ad una sola specie di coniche, vale a dire o alle sole ellissi, o alle sole iperbole; allora la stessa iperbola di tangenza non si ottiene *completa*, vale a dire non si ottiene in tutti e quattro i suoi rami, dai punti di tangenza. Questa ultima circostanza *essenziale*, non è menzionata dall'autore stesso; cioè che per avere *completa* la iperbola di tangenza, mediante i punti di tangenza, fa d'uopo una serie di coniche omofocali, composta di ellissi, e di iperbole, lo che chiaro apparisce dalla (fig. 1).

Parte seconda, concernente due sistemi di parallele.

§. 11.

31.° Fin quì trattammo di un solo sistema di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali ; ora passiamo a generalizzare maggiormente le precedenti ricerche, mediante la considerazione di *due* sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali. Egli è chiaro che in questo caso dovremo, generalmente parlando, avere due iperbole equilatere di tangenza, diverse fra loro. Quindi potremo concludere il seguente

Teorema V. *Data una serie di coniche omofocali, e due direzioni qualunque, i punti di tangenza delle rispettive parallele alle direzioni medesime, si troveranno in due iperbole equilatere, intersecate fra loro, nei fuochi comuni alle serie stesse.*

32.° Ciò equivale a dire che, descrivendo un sistema di parallelogrammi , ognuno coi lati rispettivamente paralleli a due determinate direzioni , e tangenti ad una serie di coniche omofocali , dovrà il luogo geometrico dei punti di tangenza, consistere in due diverse iperbole equilatere, che dovranno intersecarsi nei fuochi comuni delle coniche *indicate*.

Colle (fig.^e 5, e 6), la prima per una serie di ellissi , e la seconda per una serie d' iperbole, omofocali ambedue, si facilita la intelligenza di quanto abbiamo quì concluso. Nelle figure stesse, tutte le tangenti tracciate con rette continue, si riferiscono ad una inclinazione comune α , mentre le altre tangenti tracciate con rette di punti , riferisconsi ad una diversa inclinazione β comune a tutte. Tanto nella (fig. 5), quanto nella (fig. 6), i rispettivi archi iperbolici di tangenza , sono indicati similmente ; cioè gli archi continui a'MH, b'M'H', appartengono alle tangenti, esse pure continue; mentre gli archi pun-

teggiati a'NL, b'N'L', appartengono alle tangenti, esse pure punteggiate. Se, invece di separare in due figure, come ora per evitar confusione si fece, la serie omofocale delle ellissi, da quella delle iperbole, si volesse che questa serie di coniche omofocali, fosse in una medesima figura; allora i luoghi geometrici dei punti di tangenza, consisterebbero in tutti e quattro i rami di ciascuna delle due iperbole equilatere di tangenza : cioè in ciascuna iperbola delle due di tangenza, due archi apparterrebbero ad ellissi omofocali, e gli altri due ad iperbole omofocali anch'esse, come ora fu dichiarato, e come si verifica nella (fig. 1), per un solo sistema di tangenti; ove si vede che ciascono dei quattro rami della iperbola di tangenza, passa pei punti di contatto.

§ 12.

Il teorema V subisce una importante modificazione, quando i due sistemi di tangenti parallele, sieno fra loro ad angolo retto. Riflettiamo per tanto in questo caso che, nel passaggio dalla (13) alla (14), dovemmo innalzare al quadrato la prima di queste due equazioni, per cui disparve il doppio segno nel secondo membro della (13). Ciò fa sospettare che la (17) appartiene, oltre la caso da cui siamo partiti, cioè concernente un solo sistema di parallele, anche ad un altro, cui corrisponde un angolo β diverso dal primo α, e conducente ad una curva di tangenza, rappresentata pur essa dalla (17). Tornando in fatti sulle due formule (8), (11), se immagineremo un secondo sistema di tangenti, parallele fra loro, e ad angolo retto col primo sistema, in tal caso, denotando con β l'angolo compreso fra il secondo sistema e l'asse delle x, avremo

$$\text{tang.}\alpha\ \text{tang.}\beta = -1\ ,$$

quindi

$$\text{tang.}\beta = -\frac{1}{\text{tang.}\alpha} = -\cot.\alpha\ . \tag{35}$$

Ripetendo i calcoli eseguiti già nel 7°, giungeremo alla

$$(c-x)^2 - y^2 + (\cot.\beta - \text{tang.}\beta)(c-x)y - c^2 = 0\ ;$$

ed eliminando β mediante la (35), avremo

$$(c-x)^2 - y^2 + (\cot.\alpha - \text{tang.}\alpha)(c-x)y - c^2 = 0\ , \tag{36}$$

equazione identica colla (15). Concludiamo quindi che le (15), (16), (17), rappresentano ciascuna il luogo geometrico dei punti di tangenza, corrispondenti

tanto ad un sistema di parallele, determinato dall' angolo α, quanto a quello perpendicolare al primo, determinato dall' angolo β.

33.° Laonde, riflettendo anche su quanto fu stabilito col teorema I, potremo enunciare il seguente

Teorema VI. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, due sistemi di tangenti parallele, rispettivamente perpendicolari fra loro; i punti di tangenza, si troveranno sopra una medesima iperbola equilatera, che passerà pei comuni fuochi, e che avrà gli assintoti paralleli alle direzioni dei due sistemi: questi assintoti s' intersecheranno nel centro comune alle coniche omofocali.*

Il teorema ora enunciato, si può riconoscere anche sapendosi (§.4, 11.°; e §.5, 12.°) che, dato un solo sistema di tangenti, gli assintoti della iperbola equilatera di tangenza, sono uno parallelo alla data direzione delle tangenti, l' altro a questa perpendicolare. Quindi trattandosi di un secondo sistema di tangenti, parallele fra loro, e perpendicolari alle prime, sappiamo che gli assintoti della relativa iperbola di tangenza, debbono essere anch' essi uno parallelo, e l' altro perpendicolare a questo secondo sistema di tangenti. Dunque sappiamo che i primi due assintoti, dovranno coincidere coi secondi; ma siccome inoltre le corrispondenti due iperbole di tangenza, debbono ambedue passare pei fuochi comuni alle coniche omofocali, ne viene chiaramente che le due indicate iperbole, debbono coincidere pur esse fra loro.

Per tanto si vede che la modificazione, sul principio del presente paragrafo annunciata, consiste in questo, che se divenga retto l'angolo fra i due sistemi di tangenti parallele, vale a dire che se il parallelogrammo loro divenga rettangolo; le due iperbole di tangenza si dovranno sovrapporre l'una sull'altra, e divenire una sola. Ciò si vede rappresentato dalle (fig.^{e} 7 e 8), la prima per una serie di ellissi omofocali, e la seconda per una serie di iperbole omofocali anch' esse: nella (fig. 7) i punti di tangenza si trovano per tutto in ognuno dei quattro rami della iperbola equilatera $Qa'MHQ'b'M'H'$; similmente avviene riguardo alla (fig. 8), ove quei punti si trovano in tutta l' iperbola $QMa'HQ'M'b'H'$. Le dimensioni della fig. 8, si fecero maggiori di quelle appartenenti alla (fig. 7), affinchè questa riescisse ben distinta nelle sue parti; però se le dimensioni di queste due figure fossero state uguali fra loro, e così anche le direzioni dei due sistemi di tangenti parallele, allora sovrapponendo l' uno all' altro gli assi delle figure medesime, si vedrebbero sovrapporsi completamente anche le due iperbole di tangenza.

34.° Ora tornando sui casi rappresentati dalle (fig.^{e} 5 e 6), e prendendo

in considerazione il teorema VI, possiamo facilmente concludere, che le due iperbole di tangenza, HMa'QH'M'b'Q' ed LNa'GL'N'b'G', guidate in ognuna delle figure stesse, rappresentano eziandio le curve di tangenza, relative ad altri due sistemi di tangenti, rispettivamente perpendicolari a quelli, rappresentati nelle medesime figure. Per meglio dichiarare questo fatto, dobbiamo valerci della (fig. 9), e della (fig. 10) contemporaneamente, le quali appartengono, la prima ad una serie di ellissi omofocali, e la seconda ad una serie d' iperbole omofocali anch'esse. Abbiamo separato queste due specie di coniche l' una dall' altra con due figure, per maggior chiarezza; poichè se non fosse la moltiplicità delle linee, avremmo presentata, pel fatto medesimo, una sola figura, comprendente le due specie di coniche indicate, facendo coincidere i comuni fuochi, e le rispettive direzioni dei due sistemi di parallele, come fu praticato colla (fig. 1). Nelle due figure medesime contemporaneamente considerate, due sistemi di parallele, il primo tt', $t''t'''$, $t^{\mathrm{iv}}t^{\mathrm{v}}$, ..., il secondo $t't^{\mathrm{vii}}$, $t'''t^{\mathrm{v}}$, $t''t^{\mathrm{iv}}$, ..., tangenti alle coniche, si esprimono con rette continue; mentre gli altri due sistemi di parallele, il primo uu', $u''u'''$, $u^{\mathrm{iv}}u^{\mathrm{v}}$, ..., il secondo uu^{vi}, $u''u^{\mathrm{iv}}$, $u'''u^{\mathrm{v}}$, ..., tangenti alle stesse coniche, si denotano con rette punteggiate. Inoltre le parallele nei due sistemi precedenti, sono rispettivamente perpendicolari alle parallele nei due seguenti. Gli archi iperbolici HMa', H'M'b', appartenenti ad una prima iperbola di tangenza, ed LNa', L'N'b', appartenenti alla seconda (fig. 9, e 10), costituiscono il luogo geometrico dei punti di tangenza, che provengono dalle parallele disegnate continue, e sono essi archi espressi anche con linee disegnate continue. Similmente gli archi iperbolici a'Q, b'Q', appartenenti alla indicata prima iperbola di tangenza, ed a'G, b'G' appartenenti alla seconda (fig.^{e} 9, e 10), costituiscono il luogo geometrico dei punti di tangenza, che provengono dalle parallele punteggiate, quindi gli archi medesimi sono indicati anch'essi con linee punteggiate.

35.° Sul fine del §. 9 fu dichiarato (fig. 1, ed anche fig.^{e} 5 e 6, insieme considerate), che per avere *complete*, mediante i soli punti di tangenza e non altro, le iperbole di tangenza, relative a due sistemi di parallele, bisognava la coesistenza in una sola figura delle omofocali ellissi ed iperbole. Però dalla precedente descrizione, relativa alle (fig.^{e} 9 e 10), vediamo che quando si tratti di *due sistemi di tangenti parallele, rispettivamente perpendicolari ad altri due*, non abbiamo bisogno della coesistenza in una sola figura, delle omofocali ellissi ed iperbole, per avere *complete* le iperbole di tangenza; ma bensì possiamo averle tali, senza più, dai soli punti di tangenza di una specie di coniche omofocali. Poichè in primo luogo, nella (fig. 9), mediante le sole ellissi omofocali,

si ottengono *complete* le iperbole di tangenza $Hss'Ma'zz'z''QH'vv'v''M'b'yy'y''Q'$, ed $Lm''m'mNa'hh'h''h'''GL'r''r'rN'b'gg'g''g'''G'$; e nella (fig. 10) in secondo luogo, queste iperbole si ottengono anche *complete*, mediante le solé iperbole omofocali.

Affinchè tutto ciò sia meglio dichiarato, dobbiamo nella (fig. 9), che rappresenta una serie di sole omofocali ellissi, osservare i quattro sistemi di parallele tangenti alle medesime coniche. Questi quattro sistemi sono due a due perpendicolari fra loro, e li denoteremo rispettivamente coi simboli (A_1), (A_2), (A_3), (A_4). I due primi di questi sistemi sono rappresentati da tangenti parallele, disegnate continue; vale a dire il primo dalle

$$(A_1) \ldots \qquad tt', \quad t''t''', \quad t^{IV}t^{V}, \quad t^{VI}t^{VII},$$

ed il secondo dalle

$$(A_2) \ldots \qquad t't^{VII}, \quad t'''t^{V}, \quad t''t^{IV}, \quad tt^{VI}.$$

Gli altri due sistemi di tangenti, rispettivamente *perpendicolari* ai primi, sono espressi da rette punteggiate, vale a dire il terzo dalle

$$(A_3) \ldots \qquad uu', \quad u''u''', \quad u^{IV}u^{V}, \quad u^{VI}u^{VII},$$

e queste sono rispettivamente *perpendicolari* a quelle del sistema (A_1): il quarto dalle

$$(A_4) \ldots \qquad uu^{VI}, \quad u''u^{IV}, \quad u'''u^{V}, \quad u'u^{VII},$$

e queste sono rispettivamente *perpendicolari* a quelle del sistema (A_2).

I relativi archi delle iperbole di tangenza, sono tracciati corrispondentemente; vale a dire quelli che provengono da punti di tangenza, i quali appartengono a tangenti disegnate continue, sono anch'essi tracciati continui ; mentre quelli provenienti da tangenti punteggiate, sono anch' essi punteggiati. Si noti per tanto che gli archi iperbolici continui HMa' ed $H'M'b'$, vengono forniti dal primo sistema (A_1) di tangenti; mentre gli archi iperbolici punteggiati Qa', e $Q'b'$, vengono prodotti dal terzo sistema (A_3). Ma i quattro archi iperbolici ora nominati, formano *completamente* la prima iperbola di tangenza $Qa'MHQ'b'M'H'$.

Il simile accade rispetto alla seconda iperbola di tangenza $LNa'GL'N'b'G'$, per la quale tralasciamo i relativi schiarimenti, perchè sono una ripetizione dei precedenti, dovuti alla prima. Per tanto abbiamo confermato ciò che in *primo luogo* enunciammo di sopra (35.°), cioè che le iperbole di tangenza , possono ciascuna ottenersi *completa*, colle sole omofocali ellissi, senza ricorrere alle iperbole.

Nella (fig. 10), che rappresenta una serie di sole iperbole omofocali, abbiamo conservato lo stesso metodo della (fig. 9); cioè tracciando le linee tanto rette quanto curve, corrispondentemente disegnate continue, o punteggiate. Rappresentiamo similmente in questa figura, i quattro sistemi di tangenti coi simboli (A'_1), (A'_2), (A'_3), (A'_4). I due primi di questi sistemi di tangenti parallele, sono espressi da rette continue, vale a dire il primo dalle

$(A'_1) \ldots \qquad tt', \quad t''t''', \quad t^{IV}t^{V}, \quad t^{VI}t^{VII},$

il secondo dalle

$(A'_2) \ldots \qquad t't^{VII}, \quad t'''t^{V}, \quad t''t^{IV}, \quad tt^{VI}.$

Gli altri due sistemi di tangenti parallele, sono espressi con rette punteggiate, vale a dire il terzo dalle

$(A'_3) \ldots \qquad uu', \quad u''u''', \quad u^{IV}u^{V}, \quad u^{VI}u^{VII}$

e queste sono rispettivamente *perpendicolari* a quelle del sistema (A'_1): il quarto dalle

$(A'_4) \ldots \qquad uu^{VI}, \quad u''u^{IV}, \quad u'''u^{V}, \quad u'u^{VII}$

e queste sono rispettivamente *perpendicolari* a quelle del sistema (A'_2).

I corrispondenti archi delle iperbole di tangenza, sono tracciati similmente: vale a dire quelli che provengono dai punti di tangenza appartenenti a tangenti tracciate continue, sono anch' essi disegnati continui; e quelli archi provenienti da tangenti punteggiate, sono anch' essi punteggiati. Si vede per tanto che gli archi iperbolici LNa' ed L'N'b' disegnati continui, vengono forniti dal primo sistema (A'_1); mentre gli archi iperbolici $a'h$G, $b'g$G' punteggiati, vengono prodotti dal terzo sistema (A'_3). Ma i quattro archi iperbolici ora nominati, formano *completa* la seconda iperbola di tangenza LNa'GL'N'b'G'.

Una simile dichiarazione avrebbe luogo per la prima iperbola di tangenza Qa'MHQ'b'M'H'. Quindi è confermato quanto in *secondo luogo* enunciammo di sopra, (35.°); cioè che le due iperbole di tangenza possono ciascuna *completamente* ottenersi dalle sole iperbole omofocali, senza ricorrere alle ellissi.

§. 13.

36.° Sappiamo (§ 7, 17.°) che la curva di tangenza, nel caso di una serie di parabole omofocali, diviene una retta (teorema III), la quale passa pel comune fuoco. Quindi è chiaro, che il teorema V, si trasforma nell' altro seguente

Teorema VII. *Guidando ad una serie di parabole omofocali, due sistemi di tangenti parallele, il geometrico luogo dei punti di tangenza, consiste in due rette, che s' intersecano nel fuoco alle parabole stesse comune.*

L' attuale teorema viene rappresentato dalla (fig. 11), ove le rette di tangenza sono espresse dalle punteggiate $b'H$, $b'G$.

37.° Per identiche ragioni alle ora indicate, avuto riguardo al teorema III, il teorema VI si modifica, riguardo alle parabole omofocali, nell'altro seguente

Teorema VIII. *Guidando ad una serie di parabole omofocali, due sistemi di tangenti parallele, rispettivamente perpendicolari fra loro, i punti di tangenza si troveranno sopra una medesima retta, che passa pel comune fuoco, e che forma coll'asse delle ascisse, due angoli supplementari contigui, dei quali ognuno è doppio del corrispondente, formato col medesimo asse da uno dei due sistemi di parallele.*

Questo teorema viene dichiarato dalla (fig. 12), nella quale b' rappresenta il comune fuoco, $Gb'H$ la retta che passa pei punti di tangenza dei due sistemi di parallele, uno espresso dalle RQ, $R'Q'$, .., l'altro espresso dalle TS, $T'S'$, $T''S''$, ... , essendo

$$\text{ang.}Gb'X = 2.\text{ang.}R'Q'X \text{ ; ed ang.}Hb'X = 2.\text{ang.}S'T'X \text{ ,}$$

38.° L'enunciato (§. 7, 19.°) dà luogo al altro seguente più generale, cioè: *Nel caso in cui le date direzioni dei due sistemi di parallele tangenti, essendo perpendicolari fra loro, coincidano rispettivamente cogli assi delle coniche omofocali, la iperbola equilatera di tangenza, riducesi a due rette, che sono rappresentate rispettivamente dai medesimi assi.*

39.° Inoltre l'enunciato (§. 7, 20.°) fornisce l'altro seguente, più generale, anch'esso, cioè: *Circoscrivendo ad una serie di circoli concentrici un sistema di quadrati, coi lati rispettivamente paralleli fra loro, i punti di tangenza si troveranno tutti sopra due rette parallele ai medesimi lati.*

Come si è veduto (§. 7, 18.°), per un sistema di parallele, la esistenza di due rette incontrò una certa difficoltà, per la sua significazione. Però in questi due casi precedenti, la esistenza delle rette medesime, si concepisce facilmente, riflettendo che ognuna di queste rette di tangenza esiste di fatto, e non si ha bisogno per ammetterla, ricorrere colla immaginazione al caso limite, di cui ci valemmo (§. 7, 18.°).

§. 14.

Dal generale teorema I, viene stabilito, che il geometrico luogo dei punti di tangenza, i quali appartengono ad un sistema di coniche omofocali, è sempre

una iperbola equilatera. Però si deve osservare, che non sempre ciascuna conica del sistema stesso, fornisce punti per la iperbola di tangenza. In fatti date due direzioni, ed una conica, non esistono sempre tangenti a questa curva, che sieno parallele alle direzioni stesse, come già indicammo (§. 9).

Occupiamoci quindi a ricercare con maggiore sviluppo, mediante l' analisi, quali sieno le condizioni, che determinano la esistenza, o di quattro punti di tangenza, o di un minor numero, fra *una* conica e due rette parallele a due direzioni date. Laonde torniamo sulla (11), la quale fornisce una relazione fra l' ascissa del punto di tangenza, e l' angolo α, che forma la tangente ad una qualunque conica, coll' asse dei fochi. Quindi è che, data una sola direzione α, volendo conoscere se la tangente ad una conica, in quella stessa direzione sia possibile, dovremo risolvere la (11) rispetto ad x; così vedremo se il valore di questa variabile, sia reale od immaginario. Per la indicata soluzione abbiamo:

$$\frac{a^4}{a^2 - c^2}\,\text{tang.}^2\alpha - \frac{a^2}{a^2 - c^2}\,(c - x)^2\text{tang.}^2\alpha = (c - x)^2,$$

donde

$$(37)\qquad x = c \pm \frac{a^2\text{tang.}\alpha}{\sqrt{[a^2(1 + \text{tang.}^2\alpha) - c^2]}} = c \pm \frac{a^2\text{sen.}\alpha}{\sqrt{(a^2 - c^2\cos.^2\alpha)}}\,;$$

e la possibilità della tangente, avrà per condizione

$$(38)\qquad a^2 - c^2\cos.^2\alpha > 0\,.$$

Si vede inoltre dal doppio segno che, non avendo riguardo alla parabola, di cui parleremo in seguito, hanno luogo sempre, o due tangenti, o niuna.

40.° Ora dobbiamo distinguere diversi casi; ed *in primo luogo*, trattandosi di una ellisse, abbiamo sempre $a > c$; perciò la condizione (38), per questa conica sarà sempre soddisfatta. Quindi è chiaro, che per la medesima curva, qualunque sia la direzione α, esistono sempre due tangenti, e perciò due relativi punti sulla conica di tangenza. Il vedere inoltre che la indicata esistenza di due tangenti, non dipende affatto dal valore di α, ci fa scorgere pure che debbono esistere sempre altre due tangenti per la medesima ellisse, parallele fra loro, e ad angolo qualunque colle prime. Quindi possiamo concludere, che dato un sistema di ellissi omofocali, e due direzioni, esistono sempre quattro tangenti, due a due parallele rispettivamente alle direzioni stesse. Queste quattro tangenti formano insieme un parallelogrammo; ed è chiaro che i punti di tangenza si troveranno sopra i lati del parallelogrammo stesso, e non sul prolungamento loro.

41.° Il parallelogrammo adunque sarà circoscritto alla ellisse ; laonde, avuto riguardo al teorema I, e V, avrà luogo per questa curva il seguente

Teorema IX. *Circoscrivendo ad una serie di ellissi omofocali un sistema di parallelogrammi, coi lati rispettivamente paralleli a due direzioni date, il luogo geometrico dei punti di tangenza, consiste in due iperbole equilatere, che s'intersecano nei due fuochi comuni alla indicata serie. Uno poi degli assintoti di ciascuna iperbola equilatera, sarà parallelo rispettivamente ad una delle due stesse direzioni.*

Questo teorema viene posto in evidenza immediata dalla (*fig.* 5), nella quale TT′, T″T‴, T^{IV} T^{V}, . . . , rappresentano un primo sistema di parallele ; mentre ST′, S′T‴, S″T^{V}, . . . , ne rappresenta un secondo ; ed $\overline{FF'}$ esprime quello dei due assintoti, appartenenti alla prima iperbola di tangenza Qa′MHQ′b′M′H′, parallelo al *primo* sistema di tangenti, essendo $\overline{F'' F'''}$ quello dei due assintoti, appartenenti alla seconda iperbola di tangenza Ga′NLG′b′N′L′, il quale risulta parallelo al *secondo* sistema.

42.° Abbiamo veduto (teorema VI), che due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, forniscono coi loro punti di tangenza una medesima iperbola equilatera, quando le direzioni di questi due sistemi, sono l'una perpendicolare all'altra. Per tanto è chiaro, che le due iperbole di tangenza, nel caso della serie di ellissi, ove sempre si hanno parallelogrammi, vanno a coincidere fra loro; e perciò si riducono in una, quando ciascun parallelogrammo diviene rettangolo: cosicchè avrà luogo il seguente

Teorema X. *Circoscrivendo ad una serie di ellissi omofocali, dei rettangoli, coi lati rispettivamente paralleli a due direzioni date; il luogo geometrico dei punti di tangenza, consisterà in una medesima iperbola equilatera, che passerà pei fuochi comuni alla serie indicata, ed avrà gli assintoti paralleli rispettivamente alle due date direzioni.*

Questo teorema viene posto in evidenza immediata dalla (*fig.* 7), nella quale TT′, T″T‴, T^{IV} T^{V}, . . . , rappresentano un primo sistema di parallele, mentre ST′, S′T‴, S″T^{V}, . . . , ne rappresentano un secondo; e gli assintoti $\overline{FF'}$, $\overline{F''F'''}$, appartenenti all'unica iperbola di tangenza HMa′QH′M′b′Q′, sono paralleli rispettivamente al primo, e secondo sistema di tangenti.

43.° Tornando sul caso generale del teorema IX, e supposto che cresca sempre l'asse maggiore delle omofocali ellissi, dovranno i parallelogrammi alle medesime corrispondenti, crescere sempre anch' essi. Però supposto il contrario, cioè che sempre più diminuisca l' indicato asse, questo non potrà oltrepassare la distanza $2c$ fra i fuochi a', b'; ma il parallelo–

grammo esiste ancora quando l' asse maggiore uguagli a' b', e sarà limite inferiore di tutti gli altri parallelogrammi. Con facile ragionamento vedrà ognuno che si trova il parallelogrammo stesso, guidando pei fuochi a' , b' le rette $\overline{b'q}$, $\overline{a'q}$, $\overline{a'p}$, $\overline{b'p}$, rispettivamente parallele alle direzioni date (*fig.* 5). Altrettanto ha luogo nel caso in cui si riduca il parallelogrammo in un rettangolo (*fig.* 7); poichè allora l'indicato parallelogrammo limite, si trasforma nel rettangolo $a'p$ $b'q$.

§. 15.

Venendo in *secondo luogo* al caso della iperbola , dovremo avere per questa curva $c > a$, e la (38) fornirà valori reali per x, soltanto quando siasi essa verificata in questa supposizione, ovvero quando abbiasi

$$\frac{a^2}{c^2} > \cos^2\alpha \,. \tag{39}$$

Considerando che nel caso attuale si ha sempre $c > a$, si vede che per valori di $\cos^2\alpha$ sufficientemente piccoli, esistono delle tangenti alla iperbola , nelle parallele dei sistemi; mentre per valori di $\cos^2\alpha$ vicini alla unità, non avremo soddisfatta la (39), e le tangenti alla iperbola non esisteranno nelle parallele stesse. Denotando adunque con α' il valore limite di α, direzione data delle parallele tangenti, avremo la condizione

$$\pm\frac{a}{c} = \cos\alpha' \,,$$

per limite della possibilità di una tangente alla iperbola nelle parallele dei sistemi. E siccome $\frac{a}{c}$ rappresenta pure il coseno del semiangolo assintotico; perciò la tangente limite, si confonde coll'assintoto della iperbola omofocale limite, già considerata (§ 9).

44.° Quindi è chiaro che le indicate tangenti esisteranno, finchè l'angolo α sarà compreso fra α' (limite), e $\frac{\pi}{2}$; ovvero fra $-\alpha'$, e $-\frac{\pi}{2}$: ma nell'intervallo da α' sino a $-\alpha'$, non potranno aversi tangenti, nelle parallele dei sistemi, come già sappiamo dalla teorica degli assintoti.

Riflettendo inoltre, che in una serie d' iperbole omofocali, varia il simbolo a, da una di queste coniche all'altra, mentre c non varia; chiaro ap-

parisce dover esistere nella serie stessa una iperbola limite, la quale sarà l'ultima che possiede ancora tangenti parallele alla data direzione α. Per questa iperbola limite dalla (39) abbiamo

$$\frac{a^2}{c^2} = \cos^2\alpha\ ,$$

da cui, quando prendiamo per α l'angolo acuto, avremo

$$a = c\cos\alpha\ .$$

Ciò dimostra che, diminuendo a sino ad essere $a < c\cos.\alpha$, le tangenti non saranno più possibili nelle parallele; mentre crescendo a sino ad essere $a > c\cos\alpha$, avrà luogo la possibilità delle tangenti stesse. Introducendo il precedente valore di a nella (37), troviamo l'ascissa del punto di contatto espressa dalla

$$x = c \pm \frac{c^2\cos^2\alpha\ \mathrm{sen}.\alpha}{\sqrt{(c^2\cos^2\alpha - c^2\cos^2\alpha)}} = \pm\infty\ ;$$

da cui fa vedere che le parallele di angolo α, tangenti alla iperbola limite, coincidono cogli assintoti di essa, come già sapevamo (§ 9).

§. 16.

45.° Per le geometriche osservazioni seguenti, riconosceremo quante delle parallele a due date direzioni, possono essere tangenti ad una delle iperbole, appartenenti alla serie di coniche omofocali. Sappiamo in fatti che la tangente alla iperbola , essendo possibile per l' angolo β , dovrà esserlo anche per un altro α maggiore del primo. Quindi apparisce ad evidenza, che date due direzioni DE, GF (*fig.* 13), le quali facciano coll'asse $\overline{X, -X}$ gli angoli acuti α, β, decideremo facilmente, se vi sieno le tangenti possibili per ambedue queste direzioni, cercando soltanto se o no vi sieno le due tangenti, per quello dei due angoli α, β, numericamente minore dell'altro, che nel caso della figura è β; poichè pel maggiore α, ve ne saranno *a fortiori* altre due, quindi la iperbola omofocale considerata, nel caso affermativo, ne avrà quattro. Da ciò nasce che avvi nel sistema delle iperbole omofocali una *prima iperbola limite* HMSH'M'S', la quale colla sua concavità limita tutte quelle iperbole omofocali, che posseggono quattro tangenti; e colla sua convessità limita tutte quelle altre che ne posseggono due sole. Similmente col diminuire l'asse reale, avremo una *seconda iperbola limite* AKBA'K'B' col semi angolo assintotico eguale ad $\alpha > \beta$, che limiterà colla sua concavità tutte quelle iperbole omofocali, cui si appartengono due sole tangenti, e colla sua convessità tutte quelle altre, che ne sono affatto prive.

46.° Se poi fosse $\alpha = \beta$, in questo caso particolare, le due sopra indicate iperbole limiti, *prima* e *seconda*, si ridurrebbero in una, col semiangolo assintotico eguale ad $\alpha = \beta$, la quale separerebbe le iperbole di quattro tangenti, da quelle di niuna.

Tutto ciò che abbiamo quì riferito, intorno alle due iperbole omofocali limiti, si dichiara maggiormente come siegue. Dati essendo i due fochi a', b', comuni alla serie delle iperbole omofocali, e le direzioni fisse DOE, GOF dei due sistemi di tangenti, parallele rispettivamente alle direzioni stesse; troveremo la *prima* iperbola limite HMSH'M'S', cercando quale di queste due direzioni faccia un angolo acuto, *minore* dell'altro, coll'asse delle ascisse; e questa, nel caso della (fig. 13), è la direzione GF. Denotando quindi l'angolo FOX con β, abbiamo per questa *prima iperbola limite*, la condizione

$$\cos\beta = \frac{a}{c};$$

essendo a l'asse reale della iperbola stessa. E siccome la GF dev'essere assintoto della medesima iperbola; così troveremo il suo vertice M, facendo $Oa' = OL$, ed abbassando da L una perpendicolare LM sulla $\overline{b'a'}$: questa prima iperbola limite HMSH'M'S', è tracciata in figura con ... – ... – ... –. La *seconda iperbola limite* poi, corrisponde a quella delle due date direzioni, che fa coll'asse $\overline{X, \;— X}$ un angolo acuto $\alpha > \beta$, vale a dire alla direzione DE, che dev'essere assintoto della seconda iperbola stessa. Facendo quindi $OI = Oa'$, ed abbassando da I una perpendicolare IK sulla $\overline{b'a'}$, troveremo il vertice K della *seconda iperbola limite* AKBA'K'B', che nella figura stessa è tracciata con . – . – . – ; dunque potremo, relativamente a questa figura, concludere quanto siegue.

47.° Tutte le iperbole omofocali che hanno i loro vertici nell' intervallo KK', non posseggono tangenti parallele alle due date direzioni DE, GF; quelle poi le quali hanno i loro vertici compresi nell'intervallo KM, posseggono due sole tangenti parallele alla DE ; vale a dire parallele a quella delle due direzioni date, che fa un angolo maggiore colla $\overline{b'a'}$. Le altre iperbole omofocali poi, di cui sono i vertici compresi nell' intervallo Ma', come la RUVR'U'V', posseggono quattro tangenti, due parallele alla DE, due altre alla GF; quindi esse forniscono quattro punti per la curva di tangenza. In questo caso le quattro tangenti, similmente al caso della serie di ellissi omofocali, formano un parallelogrammo, il quale però non può dirsi circoscritto alla rispettiva iperbola ; perchè i corrispondenti punti di tangenza, si trovano non più sui

lati del parallelogrammo , bensì sui loro prolungamenti , come ad evidenza risulta dalla (*fig.* 6), ove i parallelogrammi *stur*, *s't'u'r'*, *s''t''u''r''*,..., sono quelli formati dalle tangenti alle rispettive iperbole omofocali, comprese nello spazio, in cui le iperbole stesse ammettono quattro di queste tangenti.

48.° Le iperbole comprese fra i due *limiti*, cioè comprese nell'intervallo corrispondente al tratto KM da una parte, e K'M' dall'altra (fig. 13), hanno soltanto (47.°) due tangenti parallele alla direzione DE. Quindi nell' intervallo medesimo, non esiste il parallelogrammo indicato, ma soltanto esistono le direzioni di due de'suoi lati opposti, come si vede nella figura stessa, in cui ad una sola delle iperbole omofocali, cioè alla NPQN'P'Q' abbiamo guidato le due tangenti *st* ed *uv*, che soltanto ad essa possono appartenere, rispettivamente parallele ad una delle due direzioni date. Da ultimo nell' intervallo KK', che trovasi limitato dalla convessità della seconda iperbola limite AKBA'K'B', non esiste veruna tangente, quindi anche niun parallelogrammo.

49.° Quando le due direzioni, date pei due sistemi di parallele tangenti, sieno fra loro perpendicolari, è chiaro che i parallelogrammi, formati dalle tangenti medesime, si dovranno ridurre in rettangoli; e le due iperbole di tangenza, dovranno, come vedesi nella (fig. 8), concorre in una H*a*'MQH'*b*'M'Q', Per costruire questa iperbola, sappiamo (46.°), essere DE un assintoto della seconda iperbola limite AKBA'K'B', mentre GF rappresenta un assintoto della prima H'''NSH''N'S'. Inoltre osserviamo che la iperbola equilatera , la quale costituisce il luogo geometrico dei punti di tangenza, possiede per assintoti le stesse DE, GF; laonde apparisce chiaro, che la iperbola equilatera di tangenza, possiede con ciascuna delle due indicate iperbole omofocali limiti , un solo assintoto comune: cioè l'assintoto DE comune alla iperbola equilatera di tangenza QM*a*'HQ'M'*b*'H' , ed alla iperbola omofocale limite AKBA'K'B'; mentre l'assintoto GF appartiene tanto alla iperbola equilatera di tangenzaQM*a*'HQ'H'*b*'M', quanto all' altra iperbola omofocale limite H'''NSH''N'S'. Dobbiamo quindi concludere, che due dei rami di ciascuna iperbola limite, sono assintotici rispettivamente con due rami della iperbola equilatera di tangenza; cioè riguardo alla seconda iperbola limite AKBA'K'B', il ramo QM assintotico con AK, e il ramo Q'M' assintotico con K'B': riguardo poi alla prima iperbola limite H'''NSH''N'S', il ramo *a*'H assintotico con NS, ed il ramo *b*'H' assintotico con N'H''.

§. 17.

Dopo avere considerato la ellisse e la iperbola, circa la possibilità delle tangenti a queste coniche omofocali, passiamo in *terzo luogo* a considerare la medesima possibilità per la parabola. Riguarderemo cosifatta curva qual caso particolare della ellisse, e della iperbola (§ 1, 4.°); però a questo modo, i precedenti raziocini, che hanno principio dal § 14, cessano di essere concludenti; poichè, dovendo per la parabola essere le a, c infinitamente grandi, tanto la condizione (37), quanto la (38), assumono forme indeterminate. Ad evitare questa indeterminazione, sostituiamo nella (37), ad a il suo valore $c + \frac{p}{4}$ (§. 1, 4.°), ed avremo

$$x = c \pm \frac{\left(c + \frac{p}{4}\right)^2 \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{\left[\left(c + \frac{p}{4}\right)^2 - c^2\cos^2\alpha\right]}} = c \pm \frac{\left(c + \frac{p}{4}\right)^2 \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{\left[c^2\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{pc}{2} + \left(\frac{p}{4}\right)^2\right]}},$$

che, dopo aver diviso i due termini della frazione per $c\operatorname{sen}\alpha$, fornisce la

$$x = c \pm \frac{\left(c + \frac{p}{4}\right)^2}{c\sqrt{\left[1 + \frac{p}{2\operatorname{sen}^2\alpha}\frac{1}{c} + \left(\frac{p}{4\operatorname{sen}\alpha}\right)^2\frac{1}{c^2}\right]}}.$$

Riducendo e sviluppando, secondo il teorema newtoniano, avremo

$$x = c \pm \left[c + \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{4}\right)^2\frac{1}{c}\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2\operatorname{sen}^2\alpha}\frac{1}{c} + \left(\frac{p}{4\operatorname{sen}\alpha}\right)^2\frac{1}{c^2}\right) + \ldots\right].$$

Eseguendo la moltiplicazione in questo secondo membro, e trascurando le quantità infinitesime, si avrà

$$x = c \pm \left(c + \frac{p}{2} - \frac{p}{4\operatorname{sen}^2\alpha}\right).$$

Quello dei due valori dati per x da questa formula, che corrisponde al segno $+$, essendo infinitamente grande, si dovrà escludere; l'altro poi corrispondente al segno $-$, si dovrà conservare. Avremo perciò la

$$x = \frac{p}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 2\right), \tag{40}$$

espressione sempre finita, eccetto nell'unico caso di $\alpha = 0$.

50.° Concludiamo per tanto, che la parabola possiede solo *una* tangente, parallela a ciascuna delle due date direzioni; per conseguenza, trattandosi di *due* direzioni date, si vede che il numero delle tangenti possibili a questa curva, sarà sempre due (*fig.* 11), salvo il caso in cui, delle due direzioni, una sia parallela all' asse delle ascisse, nel qual caso avremo $\text{sen.}\alpha = 0$, e dalla (40) $x = \infty$; quindi l'*unica* tangente per la parabola, sarà parallela all'altra direzione delle due date. È chiaro dunque che in una serie di parabole omofocali, non esiste verun parallelogrammo, del quale i lati sieno tangenti rispettivamente a queste coniche.

51.° Concludiamo in *primo* luogo, che per una serie di *ellissi* esiste sempre l' intero parallelogrammo (fig. 5); in *secondo* luogo che in una serie d' *iperbole* esiste l' intero parallelogrammo, soltanto per talune curve della serie (fig. 6), mentre per talune altre della serie medesima, esistono soltanto due lati opposti dell' indicato parallelogrammo, e per le iperbole rimanenti non esiste verun lato del parallelogrammo stesso (fig. 13); in *terzo* luogo, che per una serie di *parabole*, esistono sempre soltanto due lati contigui relativi a quel parallelogrammo (fig. 11).

§. 18.

Occupiamoci ora della ricerca inversa, cioè data *una* iperbola equilatera, si domandano tanto la serie o le serie di coniche omofocali, quanto le direzioni che appartengono al sistema, od ai sistemi di tangenti parallele; cosicchè la data iperbola equilatera divenga una iperbola di tangenza, riguardo alle stesse coniche omofocali, ed alle direzioni delle indicate tangenti.

Laonde riflettiamo innanzi tratto, che secondo il teorema I, la iperbola di tangenza, passa in generale pei fochi comuni alle coniche omofocali, cui si appartiene la iperbola equilatera data; e che il suo centro coincide con quello comune alle coniche stesse. Quindi possiamo stabilire che, guidando un *qualsiasi* diametro della *data* iperbola equilatera, gli estremi suoi rappresentano i fuochi di una certa serie di coniche omofocali, soddisfacente al quesito attuale. Inoltre viene stabilito dal teorema VI, che data una qualunque serie di coniche omofocali, e due direzioni perpendicolari fra loro, le tangenti alle coniche stesse, parallele alle due direzioni date, hanno una sola iperbola di tangenza, la quale ha per assintoti le due rette, che passano pel centro dalle omofocali, e che sono parallele alle date direzioni. Siamo poi certi, che non

vi sono altre direzioni, soddisfacenti al quesito proposto, fuori delle indicate due, dal riflettere che nella equazione (16), appartenente alla iperbola di tangenza, l'angolo α potrà solo ricevere due valori diversi soddisfacenti alla (16) medesima; cioè tali che cot.2α rimanga la stessa: poichè nelle attuali ricerche geometriche, α non può divenire maggiore di 180.° Quindi è chiaro che, fissandosi ad una delle indicate serie di coniche omofocali, potranno appartenere a questa, due sole direzioni di tangenti perpendicolari fra loro, le quali vengono rappresentate dai due assintoti della *data* iperbola equilatera.

Il fin quì detto viene dichiarato dalla (fig. 14), in cui la data iperbola equilatera si rappresenta con KIGK'I'G', essendone A, B i fuochi, ed LL', L''L''' gli assintoti. Per tanto guidando alla stessa iperbola equilatera, un qualsiasi diametro $a'b'$, i punti a', b' rappresenteranno i fuochi di una serie di coniche omofocali, soddisfacenti al quisito. Per maggior semplicità indicammo questa serie mediante una sola ellisse *mngh*, tracciata con punti; nella quale $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$ denotano la direzione del sistema di tangenti alla serie medesima, parallele all'assintoto L''L'''; mentre le $\overline{pq}$, $\overline{p'q'}$ esprimono la direzione del secondo sistema di tangenti, parallele all'altro assintoto LL'. Dal ragionamento che precede si deduce il seguente

52.° Teorema XI. *Data una iperbola equilatera, e la direzione di quel suo diametro, che deve passare pei due fuochi di una serie di coniche omofocali, se vogliasi che la iperbola stessa divenga di tangenza, riguardo alla serie medesima, saranno due soltanto i sistemi di parallele tangenti alle indicate coniche, i quali dovranno essere perpendicolari fra loro. Inoltre se quel diametro, continuamente ruotasse intorno al centro comune O delle coniche omofocali, varierà di luogo e di forma la serie di queste. Per tal modo si avrà un illimitato numero di tali serie; però i due sistemi di tangenti parallele rimarranno sempre fissi, e varierà soltanto l'angolo che le medesime fanno col diametro ruotante. Finalmente i fuochi di ciascuna serie di coniche omofocali, si troveranno sempre sugli estremi del diametro che ruota.*

53.° Si vede inoltre che ruotando il diametro $a'b'$, la eccentricità delle coniche omofocali varia continumente: sarà essa un minimo, quando eguaglierà il semiasse reale della data iperbola; e se la eccentricità medesima cresca, si troveranno per ciascun suo valore due serie di coniche omofocali, disposte simmetricamente rispetto l'asse reale II' della iperbola proposta KIGK'I'G'. Quando poi la direzione del diametro $a'b'$ si confonda con quella di un assintoto della stessa iperbola, dovrà la eccentricità medesima divenire infinita.

§. 19.

La parabola è un caso distinto delle coniche omofocali (§ 7, 17.°), e le ricerche precedenti per la ellisse ed iperbola, quando si vogliano applicare solo a alla parabola, debbono riescire più semplici di quelle, come ora vedremo; poichè, prima di venire alla terza parte della presente memoria, crediamo utile indicare l'analisi, che serve a raggiungere, per una serie di sole parabole omofocali, la linea di tangenza, spettante a due sistemi di parallele, tangenti rispettivamente alle parabole stesse. Così verremo a confermare, quanto già in altra guisa concludemmo (§ 7, 17.°) intorno alle stesse ricerche, per un solo sistema di parallele.

L'equazione della parabola, riferita ad un sistema di coordinate, coll'origine al suo fuoco, è la seguente

$$(41) \qquad y=\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+px\right)},$$

quindi avremo

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\alpha=\frac{p}{2\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+px\right)}}=\sqrt{\left(\frac{p}{p+4x}\right)},$$

ovvero

$$(p+4x)\operatorname{tang}^2\alpha=p,$$

donde

$$(42) \qquad x=\frac{p}{4}(\cot^2\alpha-1).$$

54.° Questa è la equazione che lega nella parabola, l' ascissa del punto di contatto, coll'angolo compreso dalla tangente rispettiva, e dall'asse. Inoltre siccome per ciascun valore di α, esiste un solo valore della x; così vediamo che alla parabola, è possibile una sola tangente parallela ad una direzione data.

Volendo trovare il geometrico luogo dei punti tutti di tangenza, relativi ad una serie di parabole omofocali, dobbiamo sostituire il valore della (42) nella (41), ed avremo

$$(43) \qquad y=\sqrt{\left[\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}(\cot.^2\alpha-1)\right]}=\frac{p}{2}\cot.\alpha.$$

Eliminando p dalle (42) e 43), otterremo la

$$(44) \qquad \frac{y}{x}=\frac{2\cot.\alpha}{\cot.^2\alpha-1}=\text{tang.}2\alpha\ ,$$

ovvero la

$$(45) \qquad y=x\ \text{tang.}2\alpha\ .$$

Questa equazione rappresenta una retta, che passa per la origine, cioè pel fuoco della parabola, e coincide colla (29).

Supponiamo un secondo sistema di parallele, tangenti alle stesse parabole omofocali, perpendicolare al primo, e che formi coll'asse delle ascisse l'angolo α', sarà

$$\cot.\alpha'=-\text{tang.}\alpha\ ;$$

quindi per l'attuale secondo sistema di tangenti parallele, avremo dalla (44) la

$$\frac{y}{x}=\frac{2\cot.\alpha'}{\cot.^2\alpha'-1}=\frac{-2\text{tang.}\alpha}{\text{tang.}^2\alpha-1}=\frac{2\cot.\alpha}{\cot.^2\alpha-1}=\text{tang.}2\alpha\ .$$

Ma questa relazione si trova essere identica colla (44) stessa, dunque i punti di tangenza relativi all' attuale secondo sistema di parallele, si trovano sopra la stessa retta, su cui vedemmo trovarsi quei relativi al primo.

55.° Perciò concludiamo che, data una parabola e due direzioni fisse, dovranno essere sempre due le tangenti alla parabola stessa, parallele rispettivamente alle medesime direzioni; salvo l'unico caso, in cui delle due direzioni date, una sia parallela all'asse della parabola (§. 17). Dunque in una serie di parabole omofocali, con due sistemi di tangenti parallele, *ad angolo retto fra loro*, la linea di tangenza consiste nella retta dell'equazione (45). Ogni parabola della serie medesima fornisce solo due punti per la indicata linea; non già quattro, come nel caso medesimo li può fornire ogni curva di una serie di altre coniche omofocali (§ 14, e § 16). Inoltre, uno qualunque di quei due punti, appartiene al primo, l'altro al secondo dei due sistemi di parallele, tangenti alle parabole della serie stesse. Ciò viene dichiarato dalla (fig. 12), nella quale si vede che ogni parabola della serie, fornisce alla retta GH di tangenza, una sola coppia di punti, e queste coppie per la prima parabola sono R', S''' ; per la seconda R. S''; . . . mentre i punti R', R, . . , appartengono al primo sistema di tangenti parallele, ed i punti S''', S'', S', S, . . , appartengono al secondo sistema, perpendicolare al primo.

(*Continuerà*)

CORRISPONDENZE

La R. Accademia delle scienze di Madrid, per mezzo del suo segretario perpetuo sig. Antonio Aguilar, spedisce in dono i tre volumi in foglio, della preziosa opera, intitolata : *I libri della scienza astronomica del Re D. Alfonso X di Castiglia.* Di ciascun volume appartenente a questa opera, splendidissima per nitidezza tipografica, ed interessantissima per la storia dell'astronomia, rese conto l' illustre nostro corrispondente straniero sig. Le Verrier, nei Comptes Rendus dell'accademia delle scienze dell'I. Istituto di Francia; e pel primo volume nella tornata del 3 agosto 1863, pel secondo in quella dell' 8 febraio 1864, e pel terzo nell'altra del 7 novembre 1864. Sarà utile qui ricordare, che il sig. Enrico Narducci, cognito all'accademia nostra per le sue letterarie pubblicazioni, già fece dono alla medesima di una sua nota eruditissima, che ha per titolo « *intorno ad una traduzione italiana, fatta nell'anno* 1341 (*) » della indicata opera del Re Alfonso X di Castiglia. La traduzione medesima è testo di lingua, citato dagli accademici della crusca, creduto finora smarrito, e che il sig. Narducci ha ritrovato nella Vaticana.

L'accademia stessa, per mezzo del suo segretario perpetuo sig. Aguilar, fece giungere anche altre sue pubblicazioni, registrate nell'elenco delle opere venute in dono, e posto in fine.

La R. accademia delle scienze di Danimarca, inviò il programma dei temi, da essa proposti pei corrispondenti concorsi.

La R. società delle scienze di Upsala, ringrazia per gli Atti dell'accademia nostra, da essa ricevuti, ed invia nel tempo stesso i Nuovi Atti da essa pubblicati.

La R. accademia delle scienze di Danimarca, per mezzo del suo segretario sig. Forchhammer, ringrazia per gli Atti Lincei da essa ricevuti, ed invia le sue pubblicazioni.

La R. accademia delle scienze del Belgio, per mezzo del suo segretario perpetuo sig. Quetelet, ringrazia per lo stesso motivo, ed invia le sue pubblicazioni.

(*) Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Via Lata, Num. 211A, 1865.

COMITATO SEGRETO

Si procedette alla nomina di quattro fra i membri ordinari, per la ricomposizione del nuovo comitato accademico, a forma dello statuto. Dallo squittino segreto, fatto per ischede, risultarono eletti a maggioranza di voti, ed egualmente per ognuno, i signori professori:

R. P. Chelini — Cav. G. Ponzi — Cav. V. Diorio — Dott. S. Cadet.

Fu stabilito in fine, che il rapporto sul consuntivo del 1865, e sul preventivo del 1866, fosse compilato da una commissione, composta degli stessi professori, che attualmente venivano eletti a formare il nuovo comitato.

L' Accademia riunitasi ad un' ora pomeridiana, si sciolse dopo due ore di seduta.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

S. Proja. — A. cav. Coppi. — G. cav. Ponzi. — S. Cadet. — E. Rolli.— E. Fiorini. — B. Boncompagni. — B. Tortolini. — P. Volpicelli. — L. Jacobini. — P. Sanguinetti. — D. Chelini. — F. Nardi. — P. A. Secchi. — M. cav. Azzarelli. — C. Sereni. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo.

Pubblicato nel 5 di aprile del 1866.
P. V.

OPERE VENUTE IN DONO

Memorias . . . *Memorie della R. Accademia delle scienze di Madrid.* Tomo II; 1.ª serie – Scienze esatte – Tomo I – parte 2.ª

Idem . . . Tomo III; 2.ª serie – Scienze fisiche – Tomo 1.° – parte 3.ª

Idem . . . Tomo VI – idem – Tomo 2.° - parte 1.ª

Resumen . . . *Riassunto degli Atti della Reale Accademia suddetta del* 1861-62 *del dott. A. Aguilar y Vele, segretario perpetuo.* Madrid, 1863.

Libros . . . *Libri del sapere di Astronomia del Re D. Alfonso X di Castiglia, compilati da D. Emmanuele Rico y Sinobas.* Tomi 3, in foglio; presentati dal prof. P. Volpicelli.

Discours . . . *Discorso pronunciato nel* 21 *agosto* 1865, *alla apertura della* 49.^{ma} *sessione della* Società' Elvetica di scienze naturali, *riunita in Ginevra nel* 1864; *del prof.* A. De La Rive. Un fol. in 8.°

De la torsion . . . *Della torsione dei prismi, con delle considerazioni sulle loro flessioni; per* De Saint-Venant. Parigi 1865; Un vol. in 8.°

Mémoire . . . *Memoria sulla impulsione trasversale, e la resistenza viva delle basi elastiche, appoggiate alle estremità; del* medesimo.

Note . . . *Nota sulle relazioni, tra i nove coseni degli angoli di due sistemi di tre rette rettangolari; del* medesimo.

Sur . . . *Sopra il numero dei coefficienti ineguali delle formule che danno le componenti delle pressioni nell' interno de' solidi elastici; del* medesimo.

Établissement . . . *Determinazione elementare delle formule della torsione dei prismi elastici; del* medesimo.

Mémoire . . . *Memoria sulla influenza ritardatrice della curvatura nelle correnti d'acqua; del* medesimo.

Méthode . . . *Metodo per la risoluzione per approssimazioni successive dei problemi a due incognite, stabilite o non stabilite in equazione; del* medesimo.

De l' interpretation . . . *Della interpetrazione geometrica delle chiavi algebriche, e dei determinanti; del* medesimo.

Note . . . *Nota sulla pressione nell' interno dei corpi; del* medesimo.

Sur . . . *Sulla forma da dare all'aratro; del* medesimo.

Mémoire . . . *Memoria sulle contrazioni di un'asta, di cui una estremità ha un movimento obbligatorio , e applicazione allo strofinamento di rotazione sopra un terreno unito ed elastico; del* medesimo.

Travail . . . *Lavoro o petenziale di torsione; del* medesimo.

De l'Aménagement . . . *Dell'assestamento delle acque pluviali, per migliorare il suolo, e per prevenire l'inondazione; del* medesimo.

Mémoire . . . *Memoria sulle linee curve non piane; del* medesimo.

Mémoire . . . *Memoria sulla resistenza dei solidi; del* medesimo.

Mémoire . . . *Memoria sulla distribuzione della elasticità; del* medesimo.

Notice . . . *Notizia sopra i lavori e titoli scientifici; del* medesimo.

Mémoire... *Memoria sulla questione di sapere se esistono delle masse continue, e sulla natura probabile delle ultime particelle dei corpi; del* medesime.

Tables . . . *Tavole idrauliche e metodi grafici; del* medesimo.

Mémoire . . . *Memoria sulla flessione dei prismi; del* medesimo.

Note... *Nota sulle flessioni considerevoli delle verghe elastiche; del* medesimo.

Mémoire... *Memoria sulla teorica della resistenza dei fluidi; del* medesimo.

Exposé . . . *Esposizione di un mezzo di defenire, e di nominare i colori* ;

del E. Chevreul. Parigi 1861. Un volume in 4.° con Atlante; presentata dal prof. Volpicelli.

Mémoire . . . *Memoria dei professori amministratori del Museo di storia naturale, in risposta al rapporto fatto nel 1858 da una Commissione, incaricata di studiare l' organizzazione di questo stabilimento*. Parigi 1863. Un fasc. in 4.°; presentata dal prof. P. Volpicelli.

Mémoires . . . *Memorie coronate, e Memorie dei scienziati esteri, pubblicate dall'Accademia Reale delle scienze, lettere, e belle arti del Belgio*. Tomo XXXII, 1864–65.

Mémoire . . . *Memorie coronate, ed altre Memorie pubblicate dall'Accademia Sudd*. Collezione in 8.° - Tomo XVII.

Bulletins . . . *Bullettini dell'Accademia sud*. Anni 33.^{mo} *e* 34.^{mo} – 2.^{a} Serie – Tomi 18 e 19.

Annuaire . . . *Annuario dell'Accademia sudd. pel* 1865.

Studi intorno ai casi d' integrazione sotto forma finita. Memoria di A. Genocchi. Torino 1865; un fasc. in 8.°

Bullettino dell' Associazione nazionale italiana di mutuo soccorso degli scienziati, letterati. ed artisti. Disp. 14 del 1865 in Napoli.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze, e lettere. (Classe di lettere e scienze morali e politiche). Vol. X.^{mo} – 1.° della serie 3.^{a}; fasc. 2.°

Rendiconti della Classe sudd.; Vol. II; fasc. 2-7.

Memorie dell' Istituto medesimo della Classe di Scienze Matematiche, e Naturali. Vol. X.^{mo} - I della serie 3.^{a} fasc. 2.°

Rendiconti della Classe sudd. Vol. 2.° - fasc. 2–8.

Solenni adunanze dell' Istituto sudd. Vol. I - fasc. 2.°

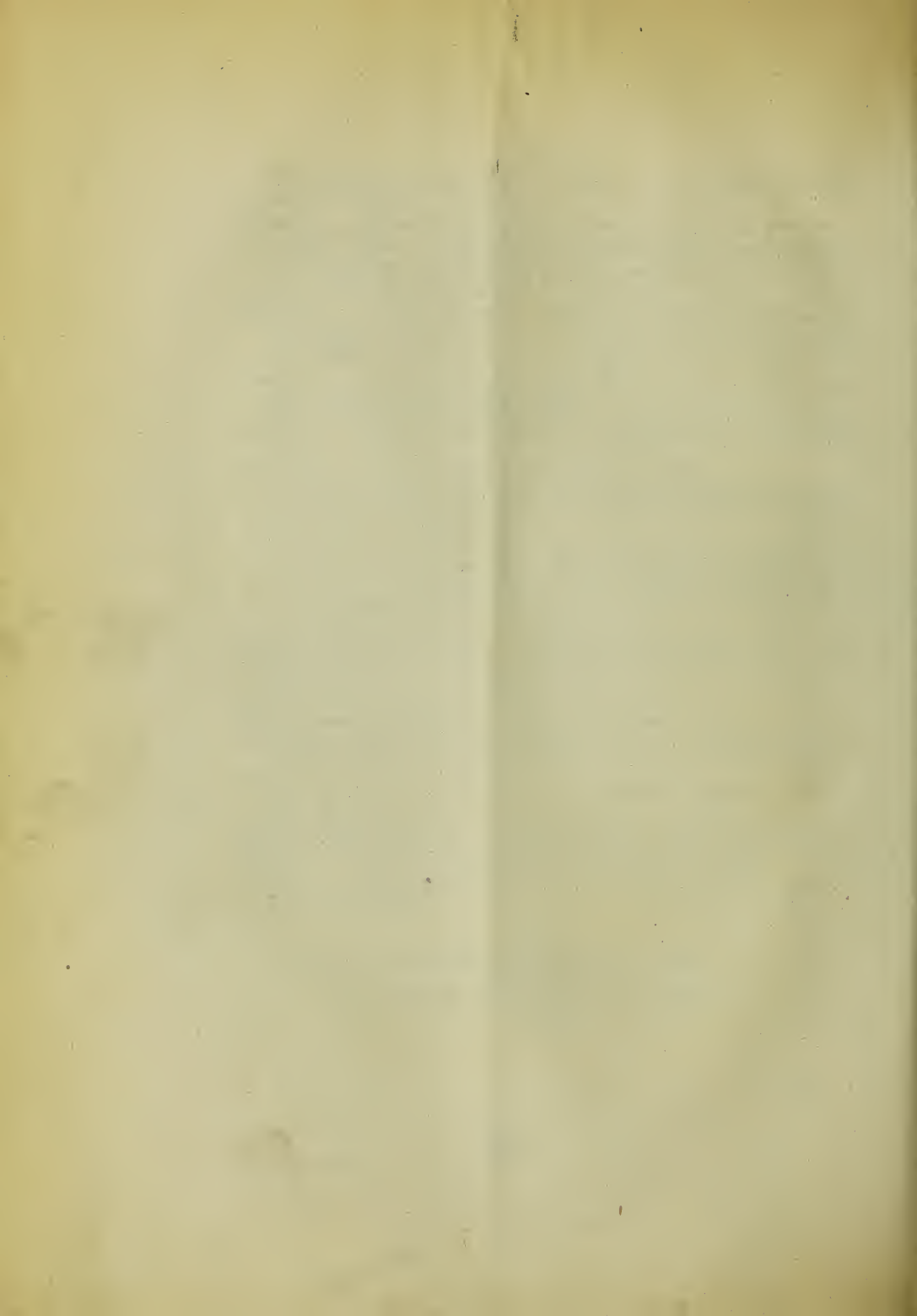
Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Anno IV - fasc. 11.^{mo} 1865.

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie 2.^{a} - Tomo IV – fasc. 4.°

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio di Palermo. Ottobre 1865.

Bullettino dell' Osservatorio del Collegio Romano, in corrente.

Comptes . . . *Conti resi dell'Accademia delle scienze dell' I. Istituto di Francia*, in corrente.

IMPRIMATUR
Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR
Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae
Vicesgerens.

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE III^a DEL 4 FEBBRARO 1866.

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

Sur l'âge du traité De Republica de Cicéron, et sur l'époque de Théodore Méliténiote. Passages de lettres adressées par M. Th. Henri Martin, doyen de la faculté des lettres de Rennes, à B. Boncompagni, suivis d'une addition de M. Th. Henri Martin à sa note sur l'époque d'Aristide Quintilien, et d'un article sur Aristide Quintilien tiré des Vite de'Matematici *de Bernardino Baldi.*

SUR L'ÂGE DU TRAITÉ DE REPUBLICA DE CICÉRON

Passage d'une lettre adressée par M. Th. Henri Martin à B. Boncompagni en date de « Rennes, le 25 avril 1865 ».

1re QUESTION

Sur la date de la composition de la *République* de Cicéron, vous me présentez trois assertions différentes, et vous me demandez quelle me paraît être la plus exacte. La *seule exacte* est la première, que voici :

Cicéron a composé le Dialogue en six livres *De Republica* dans l'année 54 avant l'ère chrétienne, *et non plus tôt.* Ce qui est douteux, c'est qu'il l'ait achevé et publié avant la fin de cette année. Mais ce dialogue était certainement publié avant la fin de l'an 52 av. J. C.

Sur quelles raisons repose cette assertion ? Les voici. La rédaction était commencée par Cicéron avant la date de la *lettre à Quintus son frère,* II, 14; cette rédaction était avancée, mais non achevée, à la date de la lettre au même, III, 5. Or tous les critiques s'accordent à reconnaître que la 1re de ces deux lettres a été écrite de Cumes en mai de l'année marquée par le consulat de L. Domitius Ahenobarbus et d'Appius Claudius Pulcher, et que la 2^e de ces deux lettres a été écrite de Tusculum en novembre de cette même année. Ces deux consuls appartiennent à l'année 700 de Rome suivant l'*ère varronienne* , dans laquelle la 754^e année de Rome est la 1re de l'ère chrétienne; ils appartiennent à l'année 699 de Rome suivant l'*ère catonienne*, dans laquelle la 753^e année de Rome est la 1re de notre ère. Ils appartiennent donc à l'année 54 avant notre ère, comme Baiter et Orelli l'ont bien vu.

Cependant, si, dans la 2[e] édition des *œuvres complètes de Cicéron* en latin et en français, publiée en 35 volumes in–18 (Paris, 1827) par le savant M. J. V. Le Clerc, on consulte (t. 1, 1[re] partie, p. 414) le *Tableau Chronologique de la vie et des ouvrages de Cicéron,* on voit que la composition du traité *De Republica* y est bien placée sous les deux consuls nommés ci–dessus, mais que l'année de ces deux consuls est marquée 699 *de Rome* (sans distinction des deux ères de Rome), et 55 *avant Jésus–Christ.* Dans ce *Tableau Chronologique,* toutes les dates *avant J. C.* sont ainsi reculées d'un année, parceque les dates *de Rome*, qui y sont *catoniennes*, y sont calculées comme si elles étaient *varroniennes*. Cette erreur a été empruntée par M. J. V. Le Clerc à Fr. Fabricius, *M. T. Ciceronis historia* (Cologne, 1563), qu'il déclare avoir suivi dans tout ce Tableau.

Dans ma dernière lettre, j'avais cru pouvoir me fier, pour la date de la composition du traité *De Republica,* au *Tableau historique* de M. J. V. Le Clerc. C'est Baiter et Orelli qu'il faut suivre.

Seulement, je le répète, il n'est pas sûr que le dialogue *De Republica* ait été achevé et publié avant la fin de l'an 54. La plus ancienne Lettre où il soit mentionné comme publié est une lettre *A Atticus*, V, 12, qui est de l'an 51. Mais il est mentionné aussi dans le traité *De Legibus,* qui est de l'an 52 av. J. C. Il a été publié certainement avant la fin de l'an 52.

2[e] QUESTION

Pour effacer le faux soupçon d'interpolation dirigé par Aristide Quintilien contre un passage aujourd'hui perdu du dialogue de Cicéron *De Republica,* M[gr] le cardinal Mai a imaginé une explication qui est très ingénieuse , mais que je ne crois pas vraie (*). Si Aristide Quintilien avait voulu dire seulement que le jugement trop sévère prononcé contre la musique dans le Dialogue de Cicéron *De Republica* n'était pas l'expression de l'opinion de Cicéron lui–même , mais de

(*) L'explication ci-dessus mentionnée se trouve dans le passage suivant de l'édition intitulée « M. TVLLI CICERONIS ‖ DE RE PVBLICA ‖ QVAE SVPERSVNT ‖ *EDENTE* ‖ ANGELO MAIO ‖ VATICANAE » BIBLIOTHECAE PRAEFECTO. ‖ ROMAE ‖ IN COLLEGIO VRBANO APVD BVRLIAEVM ‖ M.DCCC.XXII » (page 293, lig. 26—31; page 294, lig. 2—22):

« (*) Ex Aristidis Quintiliani, quem ad-
» scripsimus, tractu constat quandam e personis librorum Tullii de
» rep. (et quidem huius quarti libri in quo de theatro et de moribus)
» reprehendisse musicam , quae animos delectatione corrumperet.
» Hanc criminationem Aristides musicae defensor ita refellit, ut di-
» cat eam fieri quidem ab homine apud Tullium loquente, sed ta-
» men eandem ab auctoris ipsius mente alienam esse. Probat autem
» non esse propriam Tullii sententiam, quia ipse orator miris mu-
» sicam laudibus in Roscio extulerit, idemque eam uel inde a Nu-
» mae aetate sacris atque conuiuiis adhibitam memorauerit. Quod
» siquis , inquit Aristides , obiiciat , a Tullio musicam in Roscio
» oratorie et pro causidici officio, non ex animi sententia laudatam
» uideri; retorquendum sibi argumentum ait, ut nempe in libris de
» rep. non ex animi sui sententia Tullius, sed pro loquente persona
» et dialogorum ritu, musicae maledixerit. Neque enim uel ipsam
» rhetoricam propter litigantes fabulas uituperauerit.
» Iam Aristidis hic locus quum mihi luce meridiana clarior ui-
» deatur, nescio quas tamen uiro doctissimo offudit tenebras Marco
» Meibomio not. ad Aristid. (adstipulante Fabricio bibl. lat. in
» Cic. de rep.) qui aliter intellexit Aristidis uerba; neque ab eo re-
» prehensam dialogi personam , uel auctoris inconstantiam , agno-
» uit; sed sic loqui Aristidem dixit, quia is interpolatum Ciceronem
» aliena manu, intrusamque in opus sententiam existimauerit. Sci-
» licet ad uerba οὐ γὰρ ἔγωγ᾽ ἂν φαίην, ἐκείνῳ εἰρῆσθαι commenta-
» tur seu potius hallucinatur Meibomius sic: *locus reuera notabi-*
» *lis, quod iam ab omni saeculo optimorum auctorum scripta a*
» *sciolis et improbis hominibus interpolari consueuerint.* »

celle d'un personnage mis en scène, Aristide Quintilien, pour être compris, aurait dû s'exprimer tout autrement qu'il ne l'a fait. Supposons, par exemple, que dans l'ouvrage de Cicéron ce jugement sévère fût mis dans la bouche du stoïcien Tubéron, l'un des interlocuteurs. Aristide Quintilien aurait dû dire et aurait dit : « Voilà ce qui a échappé à bien des gens et entre autres *à Tubéron qui prononce lés paroles dites contre la musique* dans l' ouvrage du romain Cicéron *Sur la République*; car, pour moi, je ne dirai pas que de telles paroles *expriment l'opinion de Cicéron lui-même.* » Mais, bien loin de tenir ce langage, Aristide Quintilien (p. 69–70 de Meibonius) s'exprime ainsi: «῞Οπερ πολλούς τε ἄλλους ἔλαθε, καὶ τὸν ἐν τοῖς Κικέρωνος του ῥωμαίου Πολιτικοῖς τὰ κατὰ μουσικῆς ῥηθέντα [παρεμβεβληκότα]· σὺ γὰρ ἔγωγ᾽ ἂν φαίην ἐκείνῳ τὰ τοιαῦτα εἰρησθαι· » Je traduis littéralement: « Voilà ce qui a échappé à bien des gens et entre autres *à celui qui* [*a interpolé*] les paroles dites contre la musique dans l'ouvrage du romain Cicéron *Sur la République*. Car, pour moi je ne dirai pas que de telles paroles *aient été dites par Cicéron.* »

Malheureusement, suivant la remarque de Meibonius (p. 287), un mot manque dans le texte grec : je l'ai suppléé entre crochets dans le texte et dans la traduction littérale. Examinons d'abord le sens de la dernière phrase : nous y trouverons la clé de la difficulté causée dans la première par la petite lacune, et la justification de la manière dont elle a été comblée.

Quelle est la pensée d'Aristide Quintilien dans les derniers mots soulignés ? Cicéron n'était pas un des personnages du Dialogue *Sur la République*. Il était donc trop évident pour qu'il fût besoin de le dire, que Cicéron n'avait pas *dit comme interlocuteur* les paroles contre la musique : il ne pouvait que les avoir *dites comme auteur*, c'est-à-dire les avoir *écrites*. C'est donc là ce qu' Aristide Quintilien a voulu nier. S'il n'avait pas eu cette intention, il n'aurait pas pu s'exprimer ainsi, sans ajouter au moins quelques mots explicatifs; par exemple, il aurait pu rendre ainsi sa pensée : « Car, pour moi, je ne dirai pas que de telles paroles aient été dites par Cicéron *lui-même en son propre nom.* » Mais il n'y a nulle restriction de ce genre dans la négation brève et absolue d'Aristide Quintilien, qui ne veut pas que ces paroles contre la musique soient de Cicéron. De qui sont-elles, suivant-lui ? De quelqu'un qu'il ne nomme pas, évidemment parcequ'il ne le connaît pas. Au contraire, le personnage par qui ces paroles étaient prononcées dans le dialogue était connu de tous les lecteurs. Si Aristide Quintilien avait voulu dire qu' elles fussent de ce personnage, par exemple du stoïcien Tubéron, il aurait nommé *Tubéron*, au lieu de dire vaguement *celui*. Mais cette expression vague est toute naturelle, parcequ'il s'agit d'un *interpolateur supposé et inconnu*. Meibomius a donc eu raison de dire que le verbe manquant, qu'il faut suppléer dans la première des deux phrases citées, est : παρεμβεβληκότα, *qui a interpolé*. Meibomius a donc eu raison de comprendre qu'Aristide Quintilien ne veut pas croire que Cicéron puisse être l'auteur d'un passage dans lequel la musique est improuvée. Aristide Quintilien est donc d'une époque où le dialogue *De Republica*, composé par Cicéron en l' année 54 av. J. C. et publié *au plus tôt* à la fin de cette année, était en circulation depuis assez longtemps, pour que le soupçon d'interpolations pût se présenter à l'esprit.

SUR L' ÉPOQUE
DE THÉODORE MÉLITÉNIOTE

Passage d'une lettre adressée par M. Th. Henri Martin à B. Boncompagni, en date de « Rennes, le 20 juin 1865 ».

Fabricius (1) n'a connu aucun témoignage sur l' époque de Théodore Méliténiote. Il *soupçonne* que l'époque de cet écrivain n'est pas très éloignée de celle de l'archidiacre Constantin Méliténiote, mort en exil après l'an 1284 (2). C'est d'après cette *conjecture* qu'il place Théodore Méliteniote *vers l'an* 1300. Schœll (3) le place *au XII*[e] *siècle*, sans dire ses motifs; mais nous verrons qu'il se trompe. Je n'ai pas pu consulter ce qu'Ismaël Boulliau a dit de Théodore Méliténiote à la fin de son édition du petit ouvrage philosophique de Claude Ptolémée (4). Mais Fabricius et Schœll, qui l'ont consulté, ne paraissent y avoir trouvé aucun renseignement sur l'époque de Théodore Méliténiote, et je n'ai pu en découvrir ailleurs aucun, si ce n' est dans le court fragment qu' Ismaël Boulliau et après lui Fabricius ont publié de la *Composition astronomique* de ce mathématicien byzantin. J'y vois (5) qu'il était *grand sacellaire et docteur des docteurs de la Grande Église de Constantinople* ; il était par conséquent antérieur à l'an 1453, date de la chute de l' empire chrétien d' Orient. D' un autre côté, j'y vois (6) que dans le troisième et dernier livre de sa *Composition astronomique* il a donné des calculs des *Tables manuelles persiques*. Or ces *Tables persiques* avaient été introduites pour la première fois dans l'empire d'Orient par le mathématicien George Chioniadès, qui, élevé à Constantinople, avait voyagé en Perse pour des recherches astronomiques, sous les auspices et la protection du *grand Comnène*, et avait réussi, malgré la jalousie des Perses, à rapporter *à Trébizonde* ces *Tables persiques*, qu'il avait traduites en grec, suivant ce que George Chrysococca, médecin, mathématicien et philologue byzantin, qui

(1) *Bibliotheca græca*, t. X, p. 400 (éd. Harles).
(2) *Biblioth. gr.*, t. X, p. 400, nota *a*.
(3) *Hist. de la littérature grecque*, t. 7, p. 65.
(4) Περὶ κριτηρίου καὶ ἡγεμονικοῦ, éd. grecque-latine (Paris, 1663, in-4°), à la fin de laquelle se trouve une édition grecque-latine de l' Introduction et du chapitre 1er du 1er livre de l'*Astronomie* de Théodore Méliténiote.
(5) *Biblioth. gr.* de Fabricius, t. X, p. 407 (éd. Harles).
(6) Même page.

florissait vers 1336 ou 1346 (1), rapporte dans son *Interprétation* inédite de la *Composition astronomique des Perses*, interprétation citée par Boulliau (2). Or Boulliau (3) pense, avec raison, que *Comnène le grand*, protecteur de George Chioniadès, est *Alexis Comnène le grand*, qui, en 1204, fonda l'*empire de Trébizonde*. Théodore Méliténiote, qui mit en œuvre les *Tables persiques* apportées par Chioniadès, est donc postérieur à l'an 1204. Son époque est donc comprise entre l'an 1204 et l'an 1453. Cette époque pourrait être renfermée en des plus étroites limites, si George Chrysococca, dont l'époque est connue, avait cité Théodore Méliténiote, ou bien avait été cité par lui. Mais, puisque vous vous êtes assuré que, dans leurs deux ouvrages astronomiques, ni l'un ni l'autre de ces deux auteurs n'a cité l'autre, je ne connais aucun moyen d'arriver à une détermination plus précise de l'époque de Théodore Méliteniote.

(1) Voyez Léon Allacci, *De Georgiis*, § XLVI, dans Fabricius, *Biblioth. gr.*, t. XII, p. 54—56 (éd. Harles). C'est à tort que Weidler (*Hist. astronomiæ*, IX, 3, p. 226) place George Chrysococca au XVe siècle, et que Fabricius (*Biblioth. gr.*, t. I, p. 406, éd. Harles) le fait ami de Théodore Gaza. Le Chrysococcas ami de Théodore Gaza et de Philelphe au milieu du XVe siècle (Voyez Allacci dans Fabricius, t. XII, p. 56—57, éd. Harles) ne peut pas être le même que George Chrysococca, qui écrivait un commentaire sur Homère en 1336.

(2) *Astronomia philolaïca*, p. 212 (Paris, 1645).

(3) Même ouvrage, p. 213.

P. S. Je saisis l'occasion de compléter et de rectifier ma *Notice sur la vie et les œuvres de Claude Ptolémée.*

I.

Les lignes 5—13 de la page 13 de cette Notice doivent être remplacées par la rédaction suivante.

Quant aux *Harmoniques* en trois livres, la place de la composition de cet ouvrage dans la vie de Ptolémée est fixée par plusieurs Scolies grecques, dont une a été publiée par Wallis (1) et les autres par Montfaucon (1a). De la comparaison de ces documents, il résulte que dans les anciens manuscrits, le IIIe livre des *harmoniques* s'arrêtait à la fin du chapitre 13, et que, d'après la tradition, la mort avait surpris l'auteur à ce point de son œuvre, mais que Nicéphore Grégoras, en donnant une nouvelle récension du texte, avait rédigé les chapitres 14, 15 et 16, pour compléter l'ouvrage. En effet, 1.° dans . . . .

(1a) *Bibliotheca Coisliniana* (Parisiis, 1715, in-4.°), codices CLXXII, CLXXIII et CLXXIV, p. 227, 228 et 229.

II.

Dans la suite de ce passage, au lieu de lire : « le Scoliaste », lisez partout « les Scoliastes ».

III.

La note 5e et dernière, p. 14, doit être modifiée ainsi :

(5) *Violarium* (Ἰωνία), *Anecdota græca* de Villoison, t. 1, p. 336 (Venise, 1781, in-4.°). Ici, comme souvent, Eudocie a copié Suidas mot à mot. Elle vivait au XIe siècle, et elle a composé entre 1067 et 1071 son *Violarium*, dédié à son second mari l'empereur Romain Diogène. Suidas avait écrit son *Lexique* dans la 2e moitié du Xe siècle, comme M. Bernhardy l'a prouvé dans son édition, t. 2, p. XXVIII—XXX (Halle et Braunschweig, 1853, in-4.°).

ADDITION DE M. TH. HENRI MARTIN

A SA NOTE

SUR L'ÉPOQUE D'ARISTIDE QUINTILIEN

INSERÉE DANS LES *ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI*, (TOME XVIII. ANNÉE XVIII. SÉANCE DU 11 JUIN 1865).

Passage d'une lettre adressée par M. TH. HENRI MARTIN à B. BONCOMPAGNI, en date de « Rennes, le 17 novembre 1865. »

Dans ma Note sur l'*Epoque d'Aristide Quintilien*, j'ai montré que cet écrivain grec sur la musique a vecu non seulement après l' époque de la publication de la *République* de Cicéron, mais assez longtemps après cette publication et après la mort de l'auteur, pour que, par un motif dont j'ai montré d'ailleurs la fausseté, il ait pu suspecter d'interpolation un passage de cet ouvrage. L'an 44 avant notre ère, date de la mort de Cicéron, est donc un *maximum d'antiquité* auquel l'époque de la rédaction du traité musical d'Aristide Quintilien doit être postérieure d'un demi-siècle au moins, et j'oserai même dire d'un siècle. Les deux noms, l'un grec, l'autre latin, de cet auteur créent une présomption de plus en faveur de cette postériorité, comme je l'ai montré aussi dans la note citée.

Mais de combien de temps Aristide Quintilien est-il postérieur au milieu du premier siècle de notre ère ? Je l'ignore. Vous me faites remarquer que Marc Meybaum (1) ou Meibomius et Bernardin Baldi prétendent le savoir. L'un déclare qu'Aristide Quintilien est de la fin du I^er^ siècle, l'autre le met au V^e^ siècle:

. . . . (Uterque)
Quod mecum ignorat solus vult scire videri.

Vous me demandez d'examiner leurs assertions contraires et les raisons sur lesquelles ils les appuient. C'est ce que je vais faire, en commençant par Meibomius.

I.

De ce fait, qu'Aristide Quintilien (2) n'a tenu aucun compte de la modification apportée à la théorie des *tons* ou *modes* musicaux par Ptolémée dans ses *Harmoniques* (3), Marc Meybaum (4) a prétendu conclure qu'Aristide Quintilien avait écrit son traité avant Ptolémée, et il a cru pouvoir le placer vers l'époque de Plutarque, c'est à dire vers la fin du 1^er^ siècle de notre ère. Je ne vois rien, dans l'ouvrage d'Aristide Quintilien, qui soit inconciliable avec cette époque; mais rien ne prouve, suivant moi, qu'il n'ait pas vécu beaucoup plus tard.

(1) La famille allemande des Meybaum a produit au XVI^e^ siècle et au XVII^e^ quatre hommes connus dans la science et dans la littérature sous le nom de Meibom, parce qu'ils s'étaient nommés en latin Meibomius ou Meybomius. Voyez Christophe Sax (Saxius), *Onomasticon Litterarium*, part. IV, p. 121 (Utrecht, 1782, in-8°), et une note de M. Weiss au bas du premier des quatre articles consacrés par lui à ces personnages dans la *Biographie universelle* de Michaud, t. 13 (Paris, 1821, in-8°)

(2) *De la musique*, dans Meibomius, *Antiquæ musicæ auctores septem*, t. 2, p. 22—24.

(3) Sur cette modification, voyez M. Vincent, *Notices sur divers manuscrits grecs relatifs à la musique*, p. 86—89 (*Notices et extraits des Mss.*, t. XVI, 2^e^ partie).

(4) *Antiq. mus. auct. sept.*, t. 2, *Lectori benevolo*, p. VI (non numérotée), l. 16—25, et p. 235, col. 1, l. 14—25.

Meybaum dit que *tous ceux qui après Ptolémée ont écrit sur la musique et ont passé en revue les* modes *des anciens*, modes au nombre de 13 suivant Aristoxène, de 15 suivant des auteurs plus récents, et de 7 seulement suivant Ptolémée, ont nommé les auteurs de cette différence. Or Aristide Quintilien n'a pas mentionné les 7 modes de Ptolémée. Donc, suivant Meybaum, Aristide Quintilien est d'une époque antérieure.

A cet argument je réponds qu'Aristide Quintilien ne doit pas être compté parmi les auteurs qui *ont passé en revue les opinions des anciens sur le nombre des modes*, et que par conséquent il n'est pas étonnant qu'il n'ait rien dit de l'opinion de Ptolémée sur ce point. Aristide Quintilien adopte les 13 modes d'Aristoxène (1), et il les énumère. Il dit, d'une manière incidente et sans explication, que des auteurs plus récents qu'Aristoxène ont compté 15 modes. Se bornant à exposer son opinion sans aucune discussion historique ou critique, qu' avait-il besoin d'ajouter que Ptolémée avait réduit les 15 modes à 7, puisqu'il n'adoptait pas cette réduction ? De même, Martianus Capella (2) ne parle pas plus des 13 modes d'Aristoxène que des 7 modes de Ptolémée, parce qu'il s'en tient aux 15 modes. Cependant Martianus Capella, postérieur de trois siècles à Ptolémée et très versé dans l'étude des auteurs grecs, connaît bien Aristoxène, qu'il cite comme musicien (3), et Ptolémée, qu'il cite comme géographe et comme astronome (4). Le silence d'Aristide Quintilien sur les 7 modes de Ptolémée ne prouve donc pas qu'il soit d'une époque antérieure à celle de Ptolémée, qui a écrit ses *Harmoniques* à la fin de sa vie, vers l'an 167, sous Marc-Aurèle (5). La place reste donc libre pour l'opinion de Baldi, dont je vais maintenant examiner les motifs.

(1) Sur ces 13 modes, outre Aristide Quintilien, voyez Euclide, *Introd. harmon.*, p. 19—20. Aristoxène lui-même, dans son *Introd. harmon.*, II, p. 37 (t. I, Meibomius), ne parle des modes que pour constater la discordance des opinions. Il avait sans doute dit la sienne dans son traité perdu *De la Musique*. Voyez Meibomius, ad Aristoxenum, p. 78.

(2) *De Nuptiis Philologiæ et Mercurii*, IX, t. 2, p. 181 de Meibomius, ou bien § 935, p. 729—731 de Kopp (Francf. ad Men., 1836, in-4.°)

(3) II, § 12, p. 247, et IX, § 924, p. 716 (Kopp).

(4) VI, § 609, p. 506, et VIII, § 813, p. 640 (Kopp).

(5) Dans ma *Note chronologique sur la vie et les œuvres de Claude Ptolémée et spécialement sur l'époque de la rédaction des harmoniques*, p. 13, pour prouver que Ptolémée a écrit ses *Harmoniques* à la fin de sa vie, j'ai cité seulement : 1° trois manuscrits employées par Wallis et dans lesquels la fin des *Harmoniques* de Ptolémée est marquée expressément avant les trois derniers chapitres, contenus pourtant dans ces mêmes manuscrits, et nécessaires pour compléter l'ouvrage; 2° une scolie grecque publiée par Wallis, et qui, en constatant que ces trois derniers chapitres (14, 15 et 16) du IIIe livre des *Harmoniques* manquent dans tous les manuscrits anciens, déclare que *probablement* la mort avait arrêté Ptolémée à ce point de son œuvre. J'aurais dû citer trois autres textes où ce fait se trouve, pas seulement indiqué comme *probable*, mais affirmé comme un fait bien connu, savoir: 1° la première partie d'une scolie qui se trouve en tête des *Harmoniques* au feuillet 31 du manuscrit grec CLXXIII de Coislin ; 2° la seconde partie de cette même scolie, partie qui se trouve au feuillet 32 du même manuscrit, et qui se lit seule en tête du même ouvrage au commencement du manuscrit grec CLXXII de Coislin; 3° une autre scolie qu'on lit dans le manuscrit grec CLXXIV de Coislin, en tête du chapitre 14 du livre IIIe et dernier des *Harmoniques*. J'aurais dû dire que ces trois textes de Scoliastes s'accordent entre eux et avec la scolie publiée par Wallis, pour affirmer que les chapitres 14, 15 et 16 du IIIe livre ont été ajoutés par Nicéphore Grégoras (historien et savant byzantin mort en 1359), comme fin de cet ouvrage auparavant incomplet. J'aurais dû dire que la seconde partie de la scolie du manuscrit CLXXIII de Coislin, partie qui se trouve seule dans le manuscrit CLXXII, s'accorde avec une note de ce dernier manuscrit pour désigner Nicéphore Grégoras comme correcteur du texte de l'ouvrage entier et comme auteur des notes interprétations qu'on lit sur les marges. J'aurais dû dire, enfin, que la première partie de la scolie du manuscrit CLXXIII, partie que je crois avoir été ajoutée en tête de la seconde par un scoliaste plus récent et qui contient un éloge emphatique du service rendu par Nicéphore Grégoras, attribue à ce savant le mérite d'avoir comblé non-seulement la lacune laissée à la fin du IIIe et dernier livre par Ptolémée lui-même, mais, dans le corps même de l'ouvrage, d'autres lacunes qui provenaient de la négligence des copistes. Voyez Bernard de Montfaucon, *Bibliotheca Coisliniana*, p. 227, 228 et 229 (Paris, 1715, in folio). Dans la même *Note chro-*

II.

Suivant l'ouvrage de Bernardin Baldi sur les vies des mathématiciens, ouvrage inédit contenu dans le manuscrit autographe qui figure sous le n° 154 dans votre précieuse collection (1) et dont vous m'avez envoyé un extrait, Eusebius et Florentius, auxquels Aristide Quintilien (2) adresse son ouvrage, seraient deux personnages de l'époque de Théodose II et de Valentinien III, c'est-à-dire de la première moitié du Ve siècle : l'un serait Eusebius, un des hommes instruits que Macrobe, dans ses *Saturnales*, réunit autour de la table de Prætextatus avec le célèbre Symmaque (Q. Aurelius Symmachus); l'autre serait Florentius, consul avec Dionysius sous les deux empereurs qui viennent d'être nommés. « Voilà, dit Baldi, » ce qu'en confrontant les noms je tiens presque pour certain, à tel point que » j'oserais l'affirmer. »

Pour arriver à bien peser les motifs de cette affirmation, je vois deux questions préliminaires à résoudre : 1° à quelle époque Macrobe a-t-il écrit le dialogue des *Saturnales* ? 2° vers quel temps antérieur a-t-il voulu placer l'époque fictive de ce dialogue imaginaire, et à quelles époques ont vécu réellement les principaux d'entre les personnages qui y figurent ? Après avoir traité ces deux questions, nous serons en mesure d'examiner, 3° s'il est certain, probable ou possible qu'Eusebius, ami d'Aristide Quintilien, soit Eusebius personnage du dialogue de Macrobe, et que Florentius, autre ami d'Aristide Quintilien, soit le consul Florentius de l'époque de Théodose II et de Valentinien III.

1° Il est certain que Macrobe (3) vivait à la fin du IVe siècle et au commencement du Ve, et qu'il fut préfet de Rome deux fois, d'abord sous Arcadius et Honorius avant 399, ensuite sous Honorius et Théodose II avant 423. Quant à l'époque de la rédaction de son dialogue des *Saturnales*, il me paraît possible de la fixer approximativement d'après un passage, dont on n'a pas songé à tirer parti pour cet usage, et qui nous sera aussi très important pour les deux questions suivantes. Macrobe (4) dit que, par une inexactitude chronologique dont Platon lui avait donné l'exemple, il s'est permis de réunir autour de la table de Prætextatus des hommes *dont l'âge mûr est postérieur au siècle* de ce personnage. Macrobe, qui met en scène avec Prætextatus ces hommes d'une génération subséquente, a donc vu l'âge mûr de ces hommes et les temps *postérieurs au siècle de Prætextatus*, avant d'écrire son dialogue, dont la rédaction est par conséquent postérieure au moins d'une trentaine d'années à la mort de Prætextatus, c'est-à-dire, comme nous le verrons, à l'an 387. Ce dialogue n'a donc pas été écrit avant 417.

2° L'époque fictive du dialogue des *Saturnales*, dialogue dans lequel l'auteur ne figure pas lui-même comme personnage, aurait pu être placée par lui dans

nologique, p. 14, note 5, j'aurais dû affirmer que c'est Eudocie qui a copié Suidas dans l'article *Ptolémée*, comme dans beaucoup d'autres. Eudocie, qui vivait au XIe siècle, a composé entre 1067 et 1071 son Ἰώνιον (*violarium*) dédié à son second mari, Romain Diogène, alors empereur. Suidas avait écrit son *Lexique* dans la seconde moitié du Xe siècle, comme M. Bernhardy l'a prouvé dans son édition de ce Lexique, t. 2, depuis p. XXVIII, lig. 29, jusqu'à p. XXX, lig. 11 (Halle et Braunschweig, 1853, 4°).

(1) *Vite orig. de matem.*, t. 2, feuillet numéroté 333 *verso*, lignes 8—22, et feuillet numéroté 334 *recto*, l. 1—4. Comparez fol. 337 verso, fin de l'article sur Aristide Quintilien.

(2) T. 2, p. 1 de Meibomius.

(3) Voyez Suringar, *Hist. crit. Scholiastarum lat.*, t. 1, p. 163 et suiv., et Lud. Janus, *Macrobii Opera*, Proleg., c. I, § 7, t. I, p. V—VI.

(4) *Saturnalia*, I, 1, § 5, t. 2, p. 9 (Janus).

un temps antérieur même à sa naissance. De plus, l'époque des personnages secondaires ne nous donnerait pas avec certitude celle du dialogue supposé, puisque l'auteur déclare s'être permis des anachronismes, et réciproquement par la même raison l'époque de ces personnages secondaires ne pourrait pas se conclure sûrement de celle du dialogue. Mais celle-ci doit appartenir à l'âge mûr de Prætextatus, et remarquons bien que les anachronismes dont l'auteur s'accuse consistent à avoir réuni avec Prætextatus des personnages plus récents et non des personnages plus anciens. Or Vettius Prætextatus (1), principal personnage du dialogue de Macrobe, fut préfet de Rome en 384 et mourut consul désigné en 387. Parmi les autres personnages, celui qui est resté le plus célèbre est Q. Aurelius Symmachus (2), né vers 340, gouverneur de province pour la première fois en 365, consul en 391, et mort vers 410. Mais, dans ce dialogue, il ne tient que le second rang pour la considération (3) : c'est que sans doute, à l'éqoque supposée du dialogue, époque antérieure à 365, Symmaque, déjà renommé pour son éloquence (4), n'était pas encore arrivé aux honneurs, tandis que Prætextatus avait dès lors une haute dignité dans le pontificat païen (5). Quant à Eusebius, signalé dans le dialogue (6) comme le plus éminent rhéteur grec de l'époque et comme instruit aussi dans les lettres latines, ce doit être, comme le dit un savant éditeur de Macrobe (7), le rhéteur Eusebius d'Alexandrie, qui fut envoyé d'Athènes à Rome par son maître le rhéteur chrétien Proæresius (8), longtemps sans doute avant 362, époque où Proæresius ferma son école à cause de la persécution de Julien (9). Car, dans les *Saturnales*, dialogue dont l'époque fictive doit être antérieure à 387 et même vraisemblablement à 365, Eusebius se dit arrivé aux confins de la vieillesse (10). M. Bæhr (11) pense qu'Eusebius d'Alexandrie est le même que le rhéteur Eusebius tué en 353 par ordre du César Gallus (12). Symmaque n'aurait eu que 13 ans environ à la mort de ce personnage. Mais la victime de la cruauté de Gallus est Eusébius *de Mysie* ou peut-être *d'Emèse* (13), que M. Bæhr me paraît mal fondé à identifier avec Eusebius d'Alexandrie. Quant à ce dernier, sa réunion dans un banquet avec Vettius Prætextatus et avec Symmaque un peu avant 365 est possible sans anachronisme.

3° Cela posé, y a-t-il quelque raison de croire qu' Eusebius, ami d' Aristide Quintilien, soit le même qu'Eusebius personnage du dialogue de Macrobe ? Je n'en vois aucune, puisqu'Aristide Quintilien ne fait que nommer Eusebius, sans le caractériser en aucun façon. Mais ce qui a déterminé la conviction de Baldi, c'est, comme il l'a indiqué lui-même, le rapprochement des noms d' Eusebius et de Florentius, amis d'Aristide Quintilien, avec les noms d'un Eusebius,

(1) Voyez Janus, *Proleg.*, c. II. t. 1, p. XXII—XXIV.

(2) Voyez M.gr Angelo Mai, *Q. Aurelii Symmachi V. C. Octo orationum ineditarum partes* (Milan, 1815, in-8°), Præf., p. XI et suiv., et M. Morin, *Etudes sur Symmaque*, p. 3—4 et 77—79 (Paris, 1847, in-8°)

(3) Il n'est même nommé que la quatrième dans Macrobe, *Saturn.* I, 1, § 4, t. 2, p. 9 (Janus).

(4) Voyez Macrobe, *Saturn.*, V, 1, § 7, t. 2, p. 384 (Janus).

(5) Voyez Macrobe, *Saturn.*, I, 17, § 1, p. 144; I, 7, § 17, p. 50 (Janus). Comparez Janus, Præf., c. II, t. 1, p. XXII.

(6) *Sat.*, I, 2, § 7, t. 2, p. 13; I, 6, § 2, p. 36; I, 24, § 14, p. 211 (Janus).

(7) M. Janus, Præf., c. II, t. 1, p. XXX.

(8) Voyez Eunape, *Vie des Sophistes*, p. 161 (Commelin).

(9) Outre Eunape, voyez Fabricius, *Biblioth. gr.*, t. 4, p. 486, vet. ed. (t. 6, p. 137, Harles).

(10) *Saturn.*, VII, 10, § 1, t. 2, p. 606 (Janus).

(11) Article *Eusebius* dans la *Real-Encyclopédie*.

(12) Voyez Ammien Marcellin, XIV, 7, § 18, t. 1, p. 23, et XIV, 9, § 5, p. 28, de Wagner Leipzig, 1808, 8°.

(13) Voyez les variantes et les notes de l'édition de Wagner.

personnage du dialogue de Macrobe, et d'un Florentius, personnage consulaire, qui vivaient tous deux, suivant Baldi, sous Théodose II et Valentinien III régnant simultanément, c'est-à-dire entre 424 et 450. Or nous trouvons bien, dans ces limites de temps, en 429, un Florentius consul avec Dionysius ou Dynamius en Orient; mais nous venons de voir qu'Eusebius, personnage mis en scène par Macrobe, prend part, avec Prætextatus mort en 387, à un dialogue fictif dont l'époque supposée doit être même antérieure à l'an 365, et qu'à cette époque, suivant Macrobe, Eusebius touchait à la vieillesse. Macrobe n' aurait pas imaginé ce trait pour le plaisir de commettre un anachronisme inutile. Le rapprochement chronologique établi par Baldi entre cet Eusebius et le consul Florentius de l'an 429 est donc imaginaire et impossible, et Aristide Quintilien n' a pas pu avoir à la fois pour *camarades* (ἑταῖροι) deux personnages dont l'un était vieux une soixantaine d'années avant l'époque où l'autre devenait consul. Il est vrai que Baldi aurait pu trouver un autre Florentius, consul en orient en 361, tandis que Taurus était consul en occident. Ce Florentius a dû être contemporain de l'Eusebius de Macrobe, c'est-à-dire du rhéteur Eusebius d'Alexandrie, comme aussi d'un autre Eusebius, de Flavius Eusebius, consul en 359. Les Eusebius ne manquent pas: Fabricius (1) en compte plus de soixante, parmi lesquels, outre le rhéteur Eusebius d' Alexandrie au IV^e^ siècle, nous remarquons en ce même siècle le sophiste Eusebius Arabius, le sophiste Eusebius de Myndes, et le poète historien Eusebius le scolastique. Les Florentius sont plus rares. Cependant les Fastes consulaires nous présentent, en trois siècles différents, trois Florentius consuls, en 361, en 429 et en 515. Pourquoi, avant ou après la seconde moitié du IV^{e} siècle ou la première moitié du V^{e}, n'aurait-il pas existé, dans une condition plus humble, un Florentius ami d'Aristide Quintilien? Je ne vois donc aucune raison d'identifier l'Eusebius d'Aristide Quintilien avec celui de Macrobe, et le Florentius d'Aristide Quintilien avec un Florentius consul en 429, ou en 361. Je vois même une bonne raison de repousser cette identification comme invraisemblable. Car il faut remarquer que Baldi fausse le sens du texte sur lequel il s'appuie, quand il prétend qu'Aristide Quintilien dédie son œuvre à ses deux *amis ou patrons* Eusebius et Florentius. Aristide Quintilien ne désigne nullement Eusebius et Florentius comme ses *patrons* (προστάται), ni même comme ses *amis* (φίλοι) : il les appelle ses *chers camarades* (ἑταῖροι), expression qu'il n'emploierait certainement pas à l'égard d'hommes placés beaucoup au-dessus de lui. Pour qu' Aristide Quintilien traitât de *cher camarade* le personnage consulaire Florentius, il faudrait qu'Aristide Quintilien, connu de nous uniquement comme écrivain grec sur la musique, eut été en même temps un grand personnage dans l'Etat: ce que rien ne nous engage à supposer.

Aristide Quintilien, avec ses deux camarades inconnus de nous Eusebius et Florentius, reste donc pour nous un écrivain d'époque incertaine, duquel nous pouvons dire seulement qu'il a vécu depuis et non avant l' ère chrétienne, et probablement après le premier siècle de cette ère, ou du moins après la première moitié de ce siècle; car, s'il avait été plus rapproché de l'époque de Cicéron, il n'aurait pas eu la malheureuse tentation de considérer comme interpolé un passage où Cicéron, dans une partie aujourd'hui perdue de son dialogue *sur la République,* jugeait sévèrement la musique ou plutôt l'abus qu'on en faisait.

(1) *Bibliotheca græca*, t. VI, p. 105, et suiv., vet. ed. (t. 7, p. 409, et suiv., Harles).

ARTICLE SUR ARISTIDE QUINTILIEN

DES *VITE DE' MATEMATICI*

OUVRAGE INÉDIT DE BERNARDINO BALDI

CITÉ CI-DESSUS (page 94, lig. 2) (*).

ARISTIDE QVINTILIANO

Dal numero di coloro che hanno da dolersi o de la fortuna, o del ingratitu- fol. 333 *recto.* dine degli historici è senza dubbio Aristide Quintiliano poiche essẽdo egli stato Musico de suoi tempi eccellẽtissimo come si raccoglie dal opera lasciatane da lui niuno u'è stato che ne habbia negli scritti suoi fatto ch'io mi sappia una minima memoria, Appare ch'egli fosse Greco se si mira a la lingua ne la quale egli scrisse , ma se io ho da dir il parer mio stimo ch' egli fosse Latino ma che scriuesse Greco si come ne tempi antichi fecero molti commemorati da Plinio ne cataloghi de gli autori da quali egli prese i suoi libri e da altri ancora, anzi mi persuado ch'egli appartenesse qualche cosa à Fabio Quintiliano il grande Oratore cioè ch'egli fosse dela stessa famiglia e che Aristide fosse il suo nome proprio, e Quintiliano quello dela famiglia. Puo anco essere che | egli fosse Greco fol. 333 *verso.* di natione o Asiatico, e gli fosse ꝑ fauore dato il cognome dela famiglia de Quintiliani come fu dato à Gioseffe quello de Flauuii (*sic*), ma tutto ciò è ꝑ uia di discorsi ꝑ essere Aristide nome Greco e Quintiliano cognome Latino , Circa il tempo nel quale egli fiorisse, nõ s'ha certezza nõdimeno io m'assicuro di trouarlo al di presso , Fa egli mẽtione di Cicerone dũque è piu moderno di lui dedica e manda il suo libro a due amici o patroni suoi Eusebio, e Florentio, d'Eusebio hassene mẽtione in Macrobio come di suo cõtemporaneo, et intendẽte dele cose Greche ma cõtemporaneo di Macrobio, era Aurelio Simmaco il q.le è uno de gli introdotti da lui nel cõuito di Pretestato, et anco Albino Cecinna, dunque erano uiui in un tempo Macrobio, Eusebio , Simmaco , e Cecinna, ma di Florenzio ancora habbiamo che intorno à detti tempi egli fu cõsole cõ

(*) Cet article se trouve écrit de la main même de Bernardino Baldi, dans un manuscrit actuellement possédé par B. Boncompagni, coté 154 (feuillets numérotés 333—337), et décrit dans le catalogue intitulé « CATALOGO || DI MANOSCRITTI || *ORA POSSEDUTI* || DA D. BALDASSARRE BONCOMPAGNI || » COMPILATO || DA ENRICO NARDUCCI || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || » Via Lata N.° 211. A. || 1862 » (pag. 61, lig. 22—38; pag. 62, lig. 1—41).

gua e fatta commune. E Aristide Platonico in tutto e Pitagorico e mostra di hauer ueduto Aristotile, De Poeti ha per le mani Homero, et allega alcune uolte Hesiodo. Nel allegar gli altri autori à nome è assai scarso poiche giamai non fa mētione di Aristosseno, di Tolomeo ne d'altri Musici piu antichi di lui ma se la passa cō dire , gli antichi sēza discendere a particolare. Mostra di essere stato huomo che habbia hauuto grādiss.ª cognitione di tutte le cose poiche di tutte parla assolutissimamēte e quello in che egli merita lode è che procedēdo metodicamente nō u' inserisce cosa nō appartenēte al negotio di cui egli s' ha preso à trattare. Altro di lui nō trouo se nō quello che da lui med° s'è preso, Hora s'egli uisse ne tempi che dicenamo fiori egli da quattrocēto quarāta anni dopo l'humana salute.

A di 21 Dicēbre 1595

Soluzione di un problema di geometria analitica, dalla quale si deduce una notevole proprietà dell' iperbola apolloniana. Nota del prof. Cavalieri San Bertolo.

1. Essendo due rette AX, AZ, concorrenti nel punto A sotto un angolo dato, le quali sieno segate da una terza linea RS, che con esse comprenda un triangolo ACQ, del quale l' area sia K^2: intendendo diviso il lato CQ per metà nel punto P, e condotta da questo al vertice A la linea AP, e preso su questa il punto N, in cui la stessa AP venga divisa in modo che il segmento NP all' intera linea AP sia nel rapporto di 1 ad h: si propone di determinare il luogo geometrico del punto N in tutte le possibili posizioni della linea RS, per le quali il valore dell'area triangolare si mantenga costante.

2. Si conducano dai punti C, N, P le perpendicolari CB, NM, PH alla linea AZ; e chiamate x, y le coordinate AM, MN del punto N, ed ω l'angolo XAZ, si vedrà che per la similitudine dei due triangoli ANM, APH se ne ricava immediatamente

$$HP = \frac{hy}{h-1}, \text{ ed } AH = \frac{hx}{h-1};$$

e così, per la similitudine degli altri due triangoli BCQ, HPQ, se ne deduce

$$BC = 2HP = \frac{2hy}{h-1};$$

e quindi

$$AB = \frac{BC}{\text{tang.}\omega} = \frac{2hy}{(h-1)\text{tang.}\omega}.$$

Progredendo innanzi nella ricerca si trova

$$BH = AH - AB = \frac{hx}{h-1} - \frac{2hy}{(h-1)\text{tang.}\omega};$$

$$BQ = 2BH = \frac{2h}{h-1}\left(x - \frac{2y}{\text{tang.}\omega}\right);$$

$$AQ = AB + BQ = \frac{2hy}{(h-1)\text{tang.}\omega} + \frac{2h}{h-1}\left(x - \frac{2y}{\text{tang.}\omega}\right),$$

e riducendo

$$AQ = \frac{2h}{h-1}\left(x - \frac{y}{\text{tang.}\omega}\right).$$

Sarà pertanto l'area del triangolo ACQ, espressa da

$$\frac{AQ \times BC}{2} = \frac{h}{h-1}\left(x - \frac{y}{\text{tang.}\omega}\right) \times \frac{2hy}{h-1};$$

e siccome per condizione fondamentale, mantenendosi costanti l'angolo ω, ed il rapporto di $1:h$, il valore dell'area medesima deve mantenersi costantemente uguale a K^2; così la risoluzione del problema sarà data dalla equazione

$$\frac{2h^2}{(h-1)^2}\left(xy - \frac{y^2}{\text{tang.}\omega}\right) = K^2;$$

la quale determinerà il luogo geometrico del punto N, dividente in due parti nel prestabilito rapporto di $1:h$ la linea AP, dentro ciascuno dell' infinito numero dei triangoli, che possono essere formati fra le due linee AX, AZ; dei quali ognuno, indistintamente dagli altri, abbia l' area uguale a K^2. Tale equazione, ordinata per la variabile y, si riduce alla seguente forma

$$y^2 - xy\text{tang.}\omega + \frac{(h-1)^2K^2\text{tang.}\omega}{2h^2} = 0.$$

Coll'applicazione dei ben noti criteri della teoria delle curve di second'ordine si può agevolmente rendere palese, che la curva, a cui tale equazione appartiene, è una iperbola apolloniana.

3. Se vogliasi speditamente scuoprire come la curva sia geometricamente costituita fra le due linee AX, AZ, e quali sieno i valori dei suoi semiassi, il maggiore a ed il minore b, basta ricorrere ad un semplice cambiamento di coordinate, colla sostituzione dei due assi obliqui AZ, AX ai presupposti due assi ortogonali, conservando l'origine nel punto A. Chiamata u la nuova ascissa AV, e z la nuova ordinata NV, converrà sostituire, nella

già trovata equazione alle variabili x, ed y i risultanti valori dell'una e dell' altra espressi per le due nuove variabili u, e z; quali sono

$$x = u + z \cos.\omega \; , \; y = z \operatorname{sen}.\omega \; :$$

e si giugnerà speditamente alla equazione trasformata,

$$uz = \frac{(h-1)^2 K^2}{2h^2 \operatorname{sen}.\omega} \; ;$$

la quale è evidentemente l'equazione di una iperbola fra gli asintoti AZ, AX, e di cui i semiassi a, b, possono essere determinati mediante le due equazioni

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{tang}.\omega}{2} \; , \; \frac{a^2 + b^2}{h} = \frac{(h-1)^2 K^2}{2h^2 \operatorname{sen}.\omega} \; .$$

Da queste infatti si ricava

$$a = \frac{(h-1)K}{h\sqrt{\left(\operatorname{tang}.\frac{\omega}{2}\right)}} = \frac{(h-1)K\sqrt{(1+\cos.\omega)}}{h\sqrt{(\operatorname{sen}.\omega)}} \; ,$$

$$b = \frac{(h-1)K\sqrt{\left(\operatorname{tang}.\frac{\omega}{2}\right)}}{h} = \frac{(h-1)K\sqrt{(\operatorname{sen}.\omega)}}{h\sqrt{(1+\cos.\omega)}} \; ,$$

4. Dai testè dedotti valori dei semiassi a, b, dipendenti dall'area K^2 del triangolo CAQ, può essere inversamente ricavato quello dell'area K^2, dipendente dai due semiassi. In fatti ad una occhiata si scorge che

$$ab = \frac{(h-1)^2 K^2}{h^2} \; ,$$

laonde si ottiene

$$K^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2} ab \; ,$$

Ed è codesto ultimo risultato delle istituite ricerche, che racchiude la manifestazione di una notevole proprietà dell'iperbola, la quale si traduce nel seguente teorema.

Se dal centro A dell' iperbola sia condotta la retta AB a qualsivoglia

punto B della curva, e la stessa retta sia prodotta sino al punto P in guisa che sia il prolungamento BP uguale alla $(h-1)^{ma}$ parte di AB; e pel punto P sia tirata la QC fino a raggiungere i due asintoti AX, AZ, in guisa che i due segmenti PC, e PQ della interrotta QC sieno fra loro uguali; l'area del triangolo CAQ avrà un valore costante, che sarà

$$K^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2} ab .$$

5. Se dalla generalità delle ricavate formole si discenda ad un caso particolare, supponendo che sia $h=3$, sarà il punto N per tale supposizione il centro di gravità del triangolo, che da principio fu preso a considerare, e le equazioni allora ottenute (2, 3), apparterranno a quella iperbola, che costituisce il luogo geometrico dei centri di gravità del triangolo, nelle infinite sue trasformazioni fra le due linee, che comprendono il dato angolo ω, conservandosi costante il valore K^2 della sua area. E la scambievole dipendenza della stessa area, e dei due semiassi a, e b dell'iperbola, generalmente già determinata (4), addiverrà nella stessa particolare applicazione

$$K^2 = \frac{9ab}{4} = 2ab + \frac{ab}{4} :$$

vale a dire la superficie del triangolo uguale al doppio di quella del rettangolo, che ha per lati i due semiassi dell' iperbola, più la quarta parte della superficie dello stesso rettangolo.

6. Ma ritornando a quella essenziale proprietà dell' iperbola, che si venne indirettamente a conoscere colla soluzione del preannunciato problema, merita di essere avvertito, che quantunque non si trovi esplicitamente notata da Apollonio nel classico suo trattato delle sezioni coniche, tuttavia essa non è se non che un immediato corollario di due proposizioni da esso dimostrate; delle quali una si è la terza del secondo libro, l'altra è la quadragesima terza del libro terzo della già menzionata insigne sua opera.

Nella prima delle menzionate proposizioni era dimostrato che, nel punto C di contatto di una retta VZ coll'iperbola SOT, è divisa per metà quella parte RE della stessa retta, che è intercetta fra gli asintoti AX, AY.

Nella seconda è del pari geometricamente provato; che l' area del triangolo ARE racchiusa fra gli asintoti, e la parte RE ad essi intercetta, della tangente all' iperbola nel punto C, è costantemente uguale a quella del triangolo AMN racchiuso parimenti fra gli asintoti, e la tangente NM alla curva nel vertice O: che è quanto dire uguale all'area del rettangolo fatto coi due semiassi a, e b dell' iperbola.

7. Le dimostrazioni di codesti due interessanti teoremi, dall' antico geometra di Perga erano state rintracciate col metodo puramente sintetico; il solo che in quéll' età fosse conosciuto ed applicato dai sapienti in ogni ramo di matematiche investigazioni, ed al quale la scienza va tuttavia debitrice del primordiale suo ammirabile ordinamento, e, per molti secoli successivi, dei suoi felici progressi, e di molti splendidi trionfi: e con metodo non diverso furono altresì replicate in epoche meno remote, fino a non più di due secoli addietro, da geometri di alta celebrità, fra i quali segnatamente primeggiano il marchese Guglielmo Francesco Antonio de Lhôpital, e l' abate don Guido Grandi, nelle applauditissine loro opere intorno alle sezioni coniche. Il ripeterle in oggi con quei possenti soccorsi, che sono somministrati alla scienza dai moderni procedimenti dell'applicazione dell'algebra alla geometria, non richiederebbe se non che l'impiego di sì semplici e notori artifici, che non esigono e non meriterebbero di essere qui sviluppati.

8. Ma comunque o sinteticamente, o analiticamente possa essere convalidata la certezza dei due rammemorati apolloniani teoremi; il farne discendere, come immediato corollario, la dimostrazione sintetica di quella proprietà dell' iperbola, fattasi spontaneamente palese nello svolgimento della soluzione del problema, che costituiva l' obbietto prestabilito delle presenti disquisizioni, di–

pende da così ovvii e semplici ragionamenti, che sarebbe insana temerità il pensare che potessero essere sfuggiti al penetrantissimo acume del venerando autore dei libri conici. E più ragionevole sembra il credere, che da Apollonio non siasi curato di rimarcare espressamente quella ulteriore proprietà dall'iperbola, a cni si è stati condotti naturalmeute incontro dalle ricerche, le quali hanno data materia a questa breve nota, appunto perchè talmente spontanea discendeva dalle premesse proposizioni, da non potersi dubitare che non potesse non essere avvertita da chiunque di quelle due premesse proposizioni avesse ben gustato il nesso, e studiosamente considerate le possibili illazioni.

9. Quali erano in fatti le considerazioni ed i ragionamenti, di cui era d' uopo per dedurre dalle due proprietà dell' iperbole, rese note dalle due citate proposizioui di Apollonio, quella che oggi si è veduta scaturire spontanea della risoluzione del problema, che ha costituito l' obbietto di questa breve geometrica esercitazione? . . . Al punto C dell' iperbola è condotta dal cenrro A la linea AC, ed è questa protratta fino al punto K, talmente che l'intera risultante AK sia alla protrazione CK nel rapporto di $h : 1$. Ora condotta nel punto C la tangente VZ alla curva, la prima delle due rammemorate proposizioni di Apollonio, rende noto che della tangente VZ la porzione ER, intercetta fra i due asintoti, è divisa per metà nel punto C del contatto. Conseguentemente la linea PQ, condotta fra i due asintoti pel punto K, parallela alla tangente VZ, sarà anch' essa divisa per metà nel punto K: ed i due triangoli APQ, ARE saranno simili l' uno all' altro. E poichè sono pure fra loro simili i triangoli AKP, ed ACR; e parimenti fra loro simili gli altri due triangoli AKQ, ACE: sarà facile lo scorgere che dei due triangoli simili APQ, ARE i lati omologhi saranno tutti l' uno all' altro nello stesso rapporto $AK : AC : : AK : AK - CK : : h : h - 1$.

Ma per la seconda delle due commemorate proposizioni apolloniane, è noto che l' area, del triangolo ARE, compresa fra la tangente dell' iperbola nel punto C ed i due asintoti, è uguale costantemente all' area del triangolo isoscele ANM, racchiuso fra la tangente al vertice O della curva ed i due asintoti; la quale area, per la natura della curva, è uguale al rettangolo ab dei due semiassi. Dunque, intendendo che l'area dell'altro triangolo ANQ sia espressa da K^2, si avrà la proporzione

$$K^2 : ab : : h^2 : (h - 1)^2 ,$$

e conseguentemente

$$K^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2} ab ;$$

che è quanto si era proposto di dimostrare.

Quadro geologico dell' Italia centrale. Del prof. cav. GIUSEPPE PONZI.

Il lavoro che oggi ho l'onore di presentarvi, o illustri Colleghi, che porta il titolo di *Quadro geologico dell'Italia centrale.* Essa è un ristretto di tutti gli studi geologici, che ho potuto fare fin qui colle mie semplici forze, specialmente su quella parte della nostra penisola, che comprende il bacino di Roma e il suo prolungamento colla valle latina fino al regno di Napoli.

A destra di questo prospetto si vedono ordinate tutte le formazioni acquee componenti quelle contrade, e costituite dalle rocce sedimentarie giacenti le une sulle altre, in ragione delle epoche geologiche , che si succedettero nei tempi passati, e che rimontano fino alle formazioni del Lias, nel periodo secondario. A ciascun piano di questa scala, nella contigua colonna corrispondono gli avanzi degli antichi organismi che vi furono rinvenuti, o i nomi dei fossili che possono accettarsi come caratteristici di quelle stratificazioni. Finalmente sono indicati appresso i luoghi, dove si rinvengono e possono essere rincontrati e studiati.

Le colonne di sinistra contengono le formazioni ignee, o gli effetti di quelle operazioni derivate dall'azione del fuoco interno proprio del pianeta terrestre, per le quali comparvero successivamente tutte le regioni che ora rappresentano questa parte media italiana. Essi sono collocati precisamente a fianco di quel piano sedimentario corrispondente al tempo in cui avvennero , e indicano la qualità dell'operazione, la natura delle materie eruttive, e i loro risultati, ovvero le diverse emerzioni dalle acque marine delle catene di montagne, e inoltre la formazione delle colline vulcaniche sopra un suolo già messo in secco, e sottoposto all'azione dell'atmosfera.

Finalmente non ho voluto trascurare l' indicazione delle diverse circostanze che accompagnarono quegli avvenimenti cosmici , come sono lo stato relativo delle acque , la qualità dei movimenti sperimentati dalla crosta terrestre nelle parti emersive , e le vicende climatologiche dei tempi geologici trascorsi.

Lo scopo di questo quadro è stato quello di mettere sott'occhio, un frammento della storia fisica della nostra penisola , almeno di quella parte che

ho potuto fin qui investigare. Io non istarò ora a ripetere tutti quei fatti avvenuti, e la loro cronologica successione che ognuno può rilevare nel quadro medesimo, o leggere nelle mie passate pubblicazioni (1).

Solamente io vorrei riepilogare :

1.° Che questa parte dell' Italia non è stata prodotta ad un tratto, ma le sue diverse regioni sorgettero una dopo l'altra per un'alternanza di periodi di azione e di quiete, come in genere ha sempre usato la Natura in tutte le sue operazioni.

2.° Che le forze eruttive del pianeta terrestre spiegarono in principio un energia massima e violenta nel sollevamento plutonico delle diverse catene di montagne, schierate nel senso della direzione italiana :

3.° Che per effetto di questi sollevamenti prima comparvero le rocce più antiche rappresentate dalle calcarie ammonitifere, dando origine ad una serie di sommità insulari formanti i primi rudimenti della nostra penisola : poi le grandi masse Appennine costituite da giganteschi banchi di calcarie cretacee a ippuriti, e quindi le catene terziarie argillose e calcari a nummuliti, che per essere più depresse accennano ad una notabile diminuzione di forze emersive:

4.° Che scemando sempre più la loro intensità, il plutonismo si cangiò in una vulcanicità parimenti decrescente, che aprendosi una via attraverso una frattura intermontana, nei punti di minor resistenza, su di essa si produssero tanti gruppi di monti eruttivi, dai quali si versarono le lave. Così si formò la catena vulcanica italiana paralella agli appennini sul piovente tirreno.

5.° Che le spinte vulcaniche a lungo protratte, furono causa di nn lento innalzamento di tutta la penisola italiana, per cui si scuoprirono per emerzione le due zone subappennine in ambedue i pioventi , e gli stessi vulcani in origine sottomarini si fecero atmosferici:

6.° Che in questo modo messa in secco quasi tutta l' Italia nell' epoca quaternaria, si spensero i vulcani cimini, e il fuoco si trasferì nel Lazio già messo in secco per il ritiro del mare, dove nel seno istesso dell'atmosfera, per ben tre periodi distinti eruttarono, tanti materiali da rilevare i monti crateriferi posti al S.E. di Roma.

7.° Finalmente che cessata ogni esterna comparsa del fuoco della Terra, tutto prese il carattere dei tempi che corrono. Ma i lenti movimenti del suolo localizzati e ristretti ad alcuni punti, le sorgenti termali, le emanazioni gassose disseminate sulle vaste pianure italiane, fanno tuttora scorgere che le interne potenze sebbene rese impotenti a manifestazioni di maggior entità , non sono interamente spente.

---

(1) Sul sistema degli Appennini Giornale Arcadico 1861 - Sul periodo glaciale - Vedi i nostri atti. Sessione II dell' 8 Gennaio 1865 - e Sui diversi periodi eruttivi avvenuti nell' Italia centrale, negli atti medesimi, Sessione III del 14 Febraio 1864.

QUADRO GEOLOGICO DELL'ITALIA CENTRALE

FORMAZIONI ACQUEE

Periodi	Epoche	ROCCIE	FOSSILI	UBICAZIONI
PERIODO QUATERNARIO	MODERNO	25. Sabbie marine dei tumuleti in via di sedimentazione, formate da materie trasportate dai fiumi moderni.	Pesci, conchiglie, zoofiti, e fucoidi viventi, e resti di opere umane.	Coste marittime a spiaggia sottile.
		24. Sabbie e ghiaie fluviali composte dei detriti delle rocce precedenti miste ad argille, limo, e torbe. Tartari e sabbie calcari.	Resti di animali e piante terrestri e d'acqua dolce, viventi, e resti opere umane.	Lungo il decorso dei fiumi e dei laghi moderni. Paludi sul littorale.
	PLEISTOCENE	23. Sabbie e ghiaie marine con ciottoli di ferro idrato.	Resti di animali quasi tutti viventi nella contrada, o in regioni straniere.	Spiagge emerse, lungo il littorale dove le acque non giungono più.
		22. Travertini in grossi banchi.	Resti di vegetabili terrestri moderni, con conchiglie lacustri tutte viventi. Resti umani misti ad ossa di animali, parte dei quali non vivono più nella contrada.	Sulle fiancate degli alvei diluviali, ad un livello superiore alle acque moderne.
		21. Sabbie e brecce fluviali e lacustri, formate dai detriti delle rocce precedenti.	Ossa di grandi Pachidermi frantumate e disperse per trasporto delle grandi correnti. *Eleph. antiquus. Eleph. meridionalis. El. primigenius*, miste alle ossa dei contemporanei poco o niente logorate, di Mammiferi, Rettili. *Meles*, *Felis*, *Testudo*. ec.	Nel fondo dei grandi alvei diluviali, ad un livello superiore alle acque moderne.
		20. Lave scorie, lapilli, ceneri incoerenti, e peperini, circoscritti entro un'area circolare, siccome deposito atmosferico.	Ossa di animali e vegetabili terrestri. *Cervus elaphus. Fagus silvatica, Lolium perenne, Pteris aquilina*. ec.	I monti del Lazio.
PERIODO TERZIARIO	PLIOCENE	19. Lave, scorie e ceneri vulcaniche senza amfigeni. Superiormente incoerenti, inferiormente in banchi di tufi più o meno compatti e litoidi. I superiori atmosferici, gli inferiori sottomarini.	Grossi tronchi di alberi, foglie e frutti di vegetabili terrestri.	Valle del Sacco sotto Frosinone.
		18. Tufi vulcanici compatti e litoidi, o impasto per acque marine delle materie eruttate dei Vulcani Cimini, con pomici.	Legni e foglie di piante terrestri, specialmente sul contorno dei depositi che ne disegnano le spiagge.	Formano il soprassuolo della campagna Romana e Viterbese.
		17. Brecce e ciottoli siliceo-calcari composte dei detriti dei prossimi Appennini.	Ossa di Mammiferi di grossa mole riuniti in ischeletri, o poco disperse e non logorate. *Mastodon arvernensis. Eleph., antiquus, Bos primigenius, Cervus elaphus* ec.	Superiori alle sabbie gialle, lungo tutti i pioventi Tirreno e Adriatico.
		16. Sabbie gialle siliceo-calcari, risultanti dai detriti delle rocce appennine sciolte o conglutinate in arenarie, qualche volta sostituite da una calcaria bianca terrosa.	Conchiglie e zoofiti dei quali parte estinti, parte emigrate, parte viventi nei prossimi mari. *Buccinum semistriatum. Pecten latissimus. Hinnites Cortesi. Mactra triangula. Corbala striata. Cardiun hians. Pecten opercularis. Panopaea Fujassi. Ostren foliosa, Balanus tintinnabulum*. ec. Ossa elefantine non logorate. *Eleph. antiquus*.	Costituiscono le colline subappennine di ambedue i pioventi italiani, come a Monte Mario, Porto d'Anzio, Formello, e Corneto.
		15. Marne bigio-turchine superiori, alternanti con letti di sabbia giallastra e bigia.	*Elephas antiquus. Natica epiglottina. Buccinum semistriatum. Turritella terebra* ec. Ossa di Cetacei.	Monte Mario, Vaticano e Gianicolo. Rignano ec.
	MIOCENE	14. Marne bigio-turchine inferiori, rappresentanti i primi sedimenti subappennini.	*Argonauta biarmata. Pecten cristatus. Cleodora pyramidata. Dentalium laevigatum. D. Noae. Solemya solida. Pholadomia vaticana. Ostrea corrugata. Cidaris remiger. Emyaster vaticani. Flabellum vaticani. Trococyatus umbrella*. ec.	Monte Vaticano.
		13. Arenarie compatte, bigie, verdastre, e giallognole, con letti di argille schistose interposte. Continuazione delle precedenti.	Ligniti con impressioni di tronchi, foglie e frutti, di Querce, Salci. ec.	Gerano, Rocca S. Stefano ec.
	EOCENE	12. Potenti letti di arenarie compatte bigie, alternanti con potenti letti di argilla.	Fin' ora senza resti organici.	Colline di Paliano, Anagni, Ripi ec.
		11. Schisti argillosi bruni.	*Fucoides intricatus, F. bifurcatus, F. Targioni*.	Vallinfreda, Percile ec.
		10. Calcaree grossolane a frattura scagliosa, variabili, granulari, tenaci, cristalline, bianche, grigiastre e rossastre.	Nummuliti, Pettini, ed altre conchiglie e Zoofiti.	Monti di Scalambra e di Ferentino, Civitella di Subiaco.
PERIODO SECONDARIO	CRETA	9. Schisti argillosi intercalati da calcarie argillose, a frattura scagliosa, bigie o rossastre per manganese. (*Scaglia*).	Molte specie di fucoidi, grosse Nemertiliti. Pesci cicloidi e qualche conchiglia.	Monti di Affile, Tolfa ec.
		8. Calcarie bianche, dure, cristalline in grossi banchi, qualche volta colorate in rosso, le quali passano superiormente a calcarie argillose per associarsi agli schisti.	*Ippurites organisans. Ippurites cornu vaccinum*. Radioliti, Caprine. *Caprinula Boissyi*. Nerinee, Zoofiti.	Le principali creste degli Appennini, e della catena littorale Lepino-pontina.
		7. Una serie di banchi di calcarie bianche, più o meno cristalline, tenaci e compatte.	Sin qui non sono stati rinvenuti resti organici.	Contro forti delle principali catene Appennine. Monti di Trevi, Jenne, la Mentorella.
		6. Calcarie compatte bianco-latte a frattura concoide, in piccoli strati, con piromache e brecce policrome. (*Marmo Maiolica*).	Ammoniti, Belemniti Terebratule *T. dyphia*. Attici. *Ap. lamellosus. Ap. incrassatus* ec. Conchiglie e Zoofiti. Dente d'un Sauriano (*Crocodilus?*)	Monticelli, a Colle largo, Colle Rampazzolo ec.
	OOLITE	5. Calcarie cristalline giallastre con venature spatiche e macchie lineari gialle serpeggianti, associate a calcarie verdastre granulari, compatte, a frattura scagliosa con piromache.	Belemniti, Terebratule *T. dyphia*. Attici, fra i quali di un volume gigantesco. Echini. Encriniti ec.	Monticelli, alle Cese grandi, Colle grosso, Belvedere ec.
		4. Arenarie calcari bigio-scure-giallastre, inquinate di macchie nere ferrugginose, a straterelli tabulari.	Ammoniti, Attici, Pesci, Crostacei. ec.	Monticelli al Notaro. S. Polo sulla via di Ronci.
	LIAS	3. Calcarie argillose con letti di argille schistose rosso di mattone più o meno carico, talvolta giallastre o bigie. (*calcaria rossa ammonitifera.*)	Nautili *Nautilus lineatus*. Ammoniti *Ammon. tatricus. A. bifrons A. serpentinus. A. fimbriatus* ec. Trococere Belemniti, Pettini, Terebratule, Spiriferi, Astarti, Attici. Compariscono per la prima volta negli strati superiori. Foladomie. Cidariti. Denti di pesci placoidi. ec.	Monti Cornicolani, S. Polo, Civitella di Tivoli ec.
		2. Calcaria bigio-chiara compatta, intercalata da letti sottili di argille.	*Ammonites subarmatus. Amm. heterophillus*. Rinconelle, Terebratule, Pettini, Ortoceropsi. ec.	Monticelli, sulla via di S. Maria, Murilli, Canepine ec.
		1. Calcaria grigio-giallastra o rossastra, con venature spatiche, a frattura scagliosa e concoide.	Ammoniti. *A serpentinus* ec. Terebratule *T. undata T. amygdaloides*. Rinconelle, *Rh. dolabriformis, Rh. sphenoidea; Rh. variabilis*, Spiriferi *S. rostratus*, Pettini, Encriniti, Echini Straparolli, denti di pesci. ec.	Monticelli alle Cese grandi, Colle grosso ec.
		Calcaria cristallina bianca candida, compatta saccaroide con arnioni di focaia ferruginosa.	Ammoniti, Spiriferi, Terebratule, Rinconelle, *Rh. subdecorata*, Spine d'Echini, Straparolli, Trococere, Pettini, Encriniti. ec.	Monticelli sulla via di S. Biagio, Montano Borghese, Cese grandi, Colle grosso ec.

FORMAZIONI IGNEE

	ERUZIONI	PRODOTTI	RISULTATI	Sollevamenti	Temperatura
DOPO IL RITIRO DEL MARE	*VIII. Emanazioni gassose.*	Solforose e mofete, spesso accompagnate da sorgenti termali acidule e solforose.	Concrezioni tartarose attorno le sorgenti. Acque Albule, Caje, Stigiane ec.	SOLLEVAMENTO LENTO E GENERALE PER VULCANISMO COLLA FORMAZIONE DEI CONI CRATERIFERI	FISSAZIONE AL GRADO MODERNO
	VII. Vulcanica Atmosferica del Lazio.	3.° periodo eruttivo Ceneri e lapilli impastati (*peperini*).	Formazione dei peperini attorno il cratere di Albano.		RIELEVAZIONE DI TEMPERATURA
		2.° periodo eruttivo Lave Amfigeniche con poche pirosseni.	Formazione del sistema minore, o del Monte Cavo.		
		1.° periodo eruttivo Lave pirosseniche con poche Amfigeni.	Formazione del sistema maggiore, o dell'Artemisio.		
NEL RITIRO DEL MARE	*VI. Vulcanica Sottomarina e Atmosferica degli Ernici.*	Lave pirosseniche senza amfigeni.	Crateri di Tichiena, Pofi, Ceccano ec.		FREDDO GLACIALE
AVANTI IL RITIRO DEL MARE	*V. Vulcanica Sottomarina dei Cimini.*	Lave amfigeniche, pirosseniche, feldespatiche.	Crateri Vulsinio Cimino e Sabatino, sotto le acque marine, loro emersione e spandimenti delle materie eruttate.		ABBASSAMENTO STRAORDINARIO
	IV. Plutonico-vulcanica 2ª Ceritia	*Trachiti con Solfuri.*	Seconda emersione dei monti di Tolfa, con iscoprimento del Terreno miocenico.	SOLLEVAMENTI RAPIDI PER PLUTONISMO CON EMERSIONE PARZIALE DEI MONTI	ABBASSAMENTO LENTO E NORMALE DELLA TEMPERATURA TERRESTRE
	III. Plutonico-vulcanica Ernica, e 1ª Ceritia.	*Trachiti?*	Emersione della catena della Scalambra, Porciano.ec.		
		Trachiti senza solfuri.	Prima emersione dell' isola Ceritia o dei monti di Tolfa, con iscoprimento del terreno eocenico.		
	II. Plutonica Appennina.	*Ofioliti*	Emersione delle principali catene Appennine e della littorale tirrena, con iscoprimento del terreno cretaceo.		
	I. Plutonica Giurese.	*Graniti?*	Emers. del M.e Gennaro con iscopr. del terr. Giurese.		

LETTERE ASTRONOMICHE

V.

LA SPECOLA PRIVATA DEL SIG. MARCHESE R. MONTECUCCOLI IN MODENA.

PARTE II.

Nella parte I. dell'attuale trattazione (Lett. III.) io mi limitai ad accennare soltanto gli oggetti e strumenti di questa Specola, che servono precipuamente alle osservazioni celesti nel meridiano locale, rimettendomi ad aggiungere in questa Parte II. una simile e succinta descrizione degli altri comodi e mezzi di osservazione verso qualunque plaga e direzione libera del cielo, de'quali è stata pur corredata riccamente la Specola stessa dall'illustre suo Fondatore e proprietario. E quì tosto piacemi di trattenermi sopra l'eccellente cannocchiale o rifrattore di Merz, che fu l'acquisto primo di macchine astronomiche dal Marchese commesso per mio mezzo al rinomato Fabbricatore di Monaco, siccome il circolo meridiano di Starke in Vienna è stato l'ultimo o il più recente, e che inviatoci di colà in Baviera qualche anno innanzi che l'edificio di questa Specola fosse compiuto, nel frattempo depositatomi dal nobile Acquirente presso il R. Osservatorio, venne da me non di raro e assai utilmente adoperato, all'uopo in ispecie di ben osservare le occultazioni, eziandio di piccole stelle, dietro la luna. Imperocchè a vero dire il nostro pubblico Osservatorio non possedeva un cannocchiale acromatico e mobile a mano, di tali dimensioni e di tanto potere amplificativo, eguagliato ivi soltanto in cotai pregi da quello di Fraunhofer fissamente unito e girevole col circolo meridiano di Reichenbach. Ma, comecchè sciolto e da rivolgersi liberamente a qualsivoglia parte, il novello e grande Acromatico di Merz non è perciò meno uno strumento fornito di artifizi meccanici per giovarsene con esattezza in alcune specie di osservazioni, e degno perciò di essere particolarmente descritto.

Pertanto esso ha la lente oggettiva dell'apertura di linee 48 e di piedi parigini 6 di distanza focale, cinque oculari astronomici per ingrandimenti di 54, 80, 120, 180 e 270, un oculare terrestre con ingrandimento di 66, due vetri colorati, un micrometro anulare, ed è armato di buon piccolo ricercatore; questo e le incassature delle lenti in ottone, mentre nella sua lunghezza l'intero tubo è di

moagani, e quindi più leggiero senza mancar di solidità. Il piede o sostegno, costrutto con massima precisione in legno di ottima qualità, e che non ha mostrato una minima screpolatura nè gonfiezza dopo dodici anni, si compone di un prisma o tronco di colonna verticale dell'altezza di $0^{m},36$ a base esagona del lato di $0^{m},085$, al cui asse d'altezza è concentrica una grossa verga cilindrica di ferro, intorno alla quale aggirasi liberamente il cannocchiale, e fortemente fissata con viti nella base inferiore del prisma. Alla base superiore ed orizzontale di questo è fissato e concentrico all'asse un circolo in ottone del diametro di $0^{m}, 18$, della grossezza di $0^{m},013$ e diviso alla circonferenza di mezzo in mezzo grado. Alla metà inferiore del prisma s'incastrano, divergenti dall'asse verticale o all'infuori, e fermati ciascuno con due robuste viti a chiave, tre travicelli similmente incastrati e chiusi da vite nel telajo di base dello strumento, ove internamente a ciascun travicello o piedritto son fermate le rotelle, che servono a girare e strascinar dolcemente la macchina, ed esternamente muovonsi a larga testa di ottone tre grosse viti di acciajo, che servono a porre la macchina stessa in livello. Concentrica al sovrindicato circolo diviso, e girevole intorno all'asse verticale è applicata una grossa piastra quadrata di ottone, fissamente congiunta da una parte con un piccolo livello a bolla rettificabile , e in altra col nonio del circolo che porge $1'$ d'arco. Quindi una vite perpetua fermata in quest'ultimo pezzo e che, ingranata nella grossezza del circolo a scanellature , apresi e chiudesi, a molla di pressione, somministra col suo manubrio il piccolo moto orizzontale. Perocchè sopra la lastra precedente e centrale ne è fissata un'altra di eguale grossezza in ottone, e che ai due lati opposti curvandosi e ripiegandosi in una specie di due ale, coll'estremità di queste impernasi in due grosse anella di ferro nella direzione dell'asse trasverso del cannocchiale, alla metà circa del longitudinale. E concentricamente a tali anella sporgendo di quà e di là due grossi cilindri di ferro, fissi nel tubo e diametralmente opposti, questi poggiano all'estremo di una leva pure di ferro e di 1.° ordine col suo fulcro nelle dette ale, e che all'altro estremo porta un ponderoso cilindro, che serve di contrappeso al cannocchiale. Questo alla metà della sua lunghezza è abbracciato, esternamente al tubo, da una larga lastra di ottone infissavi con otto viti, della grossezza di 13^{mm}, e cui solidamente si congiunge altro e più grosso pezzo di ottone, destinato a tener un arco verticale di raggio uguale al circolo orizzontale, di oltre a 90.°, diviso parimente di mezzo in mezzo grado, e che porge quindi, mediante il nonio, $1'$. Legandosi il detto pezzo di ottone anche all'armatura o costruzion orizzontale coll'ingranaggio del nonio verticale nella grossezza scanellata dell'arco, a molla di pressione e col rispettivo manubrio, l'arco stesso unitamente al cannocchiale rendesi mobile, o fermasi a qualunque altezza , restandone libero soltanto il piccolo e dolce moto della vita perpetua. Così costrutto con ogni cura e precisione, e coi pregi della maggiore fermezza , complessiva e parziale, insieme alla maggiore facilità e dolcezza dei grandi e piccoli movimenti, il descritto Rifrattore di Merz, ripeto, non è tanto un eccellente ma semplice cannocchiale da rivolgersi a mano comecchessia, che non debba anche dirsi

un ottimo strumento per utili operazioni di esatte misure. Io ne fui sempre invaghito.

A considerar infatti primamente il solo cannocchiale qual mezzo di appagare una dotta e dilettevole curiosità, come a dire fra le mani di un amatore di celesti apparenze, esso è certamente il più idoneo a tal uso; ed io sovente impiegandolo per contemplar io stesso e far altrui ammirare le più singolari circostanze dei celesti corpi e fenomeni, ebbi sempre a rimanerne piacevolmente soddisfatto. Guardata con esso la luna, specialmente a falce ristretta di primo e ultimo quarto, e tenendo dietro alle sue successive mutazioni d'aspetto, gli accidenti che se ne offrono coll' uso degli oculari di maggior ingrandimento, e le nettissime imagini delle ombre de' monti lunari e dei vertici illuminati di essi lungi e fuor della fase, costituiscono uno spettacolo il più bello e meraviglioso. Del pari adoperando gli oculari più forti e mirando al Sole, in questo veggonsi con tutta distinzione le più minute particolarità e i cangiamenti continui delle sue macchie, penombre e facule; sì che dall'osservazione assidua di cotali apparenze può raccogliersene con vantaggio una storia della formazione e del disfacimento loro. Nè importanti meno alla scienza nè dilettevoli meno hanno a dirsi col cannocchiale medesimo le semplici e immediate ispezioni de'pianeti, delle comete, de'gruppi e delle nebulose stellari; come altresì le osservazioni degli eclissi e delle occultazioni lunari de'pianeti e delle stelle, riuscendo per quest'ultima specie un fenomeno de'più imponenti e magnifici a contemplarsi l'occultamento lunare di Giove col corteggio de'suoi satelliti. In prova dell'utilità di somiglianti osservazioni col detto mezzo, siami qui permesso di richiamarmene un esempio a me avvenuto, e che può illustrare o chiarire una singolare controversia.

La sera 29 Maggio del 1854 dalla Specola R. io mi godeva di contemplare a ciel sereno la luna in quarto giorno col novello Rifrattore di Merz posseduto dal Marchese Montecuccoli, e ne stesi l'annotazione seguente. = Col più forte ingrandimento di 270 ho veduto assai distinta nel corno australe, non molto distante alla punta, presso alla macchia Pingrè e nel perimetro esterno della fase, una larga incavatura o discontinuità nel perimetro, somigliante ad una foce o stretta gola di alti monti. Vedevasi questa pure coll'ingrandimento primo e più debole. La sera seguente del 30 Maggio l'incavo stesso era visibile, ma il Sole ivi sorgendo sulle pareti del taglio, ne appariva la cavità o valle più ristretta e prossima a riempirsi di luce. Ciò potrebbe servire a spiegar le stelle, i pianeti e i satelliti nelle occultazioni lunari, talvolta veduti projettati sul disco della luna. = Ora sentasi quello che scriveva il celebre e a me tanto caro Biot nel primo de'suoi tre articoli inseriti nel *Journal des Savants* pel 1831 intorno alle Memorie della Società astronomica di Londra negli anni 1822–1830. Ivi alla pagina 495 si legge : « On rémarque un effet pareil dans l' observation faite par M.[r]
» South de l'occultation de δ des poissons sur le bord obscur de la lune; l'ima-
» ge brillante de l'ètoile parut aussi pendant quelques instants projetèe sur le
» disque avant de disparaître. Quoique ce phênomène ait été souvent vu par
» des observateurs differents, (e innanzi citansi i satelliti di Giove, il pianeta

» stesso e Urano veduti coi loro dischi sopra il lembo lunare da Ramage, Comfièld e il Cap. Ross) dont le témoignage et l'habilité sont incontéstables, on l'avait, non moins souvent, révoqué en doute, peut-être, parce qu'il a paru jusqu'à present impossible de l'expliquer. M.r South y ajoute l'autorité de son assertion, pour les Astronomes anglais, qui s'etaient montrés les plus incredules, et il a rassemblé avec soin dans son mémoire tous les cas semblables jusqu'à present publiès. Mais la diversité des circonstances dans les quelles ils ont eu lieu, ne fait que mieux montrer l'impossibilité, au moins actuelle, d'en concevoir la cause. » Io dirò a proposito che collo stesso Rifrattore di Merz a massimo ingrandimento nelle sere 3 e 31 Maggio dell' anno medesimo 1854 a cielo purissimo potei osservare due stellette, una di 11–12ma e l'altra di 12ma, in contatto precisamente del lembo oscuro della luna, però assai visibile di lume cinereo, e disparirvi o a così dire spegnersi momentaneamente, in guisa da notarsene l'esatto istante dell'immersione, senza ch'esse fossero menomamente vedute sopra il disco lunare. Per altro non negando a rispettabili testimonianze di esperti osservatori, che talvolta e per alcun istante sia stata giudicata l'apparente sovraposizione di una stella o di un pianeta, occultantisi, nel lembo oscuro della luna, io ne proporrei una spiegazione di reale possibilità qual sono per esporre. In alcuni casi di occultazioni di stelle o pianeti dietro la luna, comecchè rari o poco frequenti, perchè non potrebbe combinarsi che l'immersione avvenisse in un punto del perimetro lunare oscuro, ma visibile di lume cinereo, dove si trovasse una concavità più o meno lunga, o una specie di fenditura, ma di profondità pressocchè insensibile anche all'occhio armato, cui però sfugisse di avvertire in quel punto la discontinuità della circonferenza lunare del disco? Per tale inavvertenza la stella o il pianeta, penetrando e rimanendo momentaneamente visibile nella cavità, giudicherebbesi projettato sul disco medesimo. A ciò potrebbe influir eziandio il noto e ben dimostrato fenomeno della librazione della luna, pel quale, ai lembi del disco lunare permanente a noi rivolto, del continuo, e alternativamente colle parti attigue dell'opposto emisfero invisibile a noi, alcune di questo ci appajono e ci scompajon altre di quello. Quindi all'atto e nel luogo di una immersione di stella o pianeta potrebbe avvenire che appunto una concavità del perimetro lunare oscuro verso di noi si rivolgesse, donde il giudizio della stella sul disco projettata. Frattanto altro singolar caso e fenomeno, inverso del precedente, parmi possibile, avvegnacchè a quanto io mi sappia non osservato; ed è che la luna passando col perimetro del suo disco tangenzialmente ad una stella, tolgala per alcun istante di vista all'osservatore, nè segua più oltre ad occultarla, sicchè l'immersione confondasi quasi coll'emersione della stella. Ciò avverrebbe in un punto del perimetro lunare ove, anzichè un'incavatura, si trovi una prominenza, o elevisi una montagna, che farebbe disparir per pochi momenti la stella a contatto del detto perimetro. E ognuno che abbia contemplato la luna coi canocchiali di forte ingrandimento, specialmente negli eclissi del Sole, conosce abbastanza che il disco lunare al suo lembo presenta quà e là notevoli dentellature di monti, che appaion poi e costituiscono le punte lucide più staccate dalle corna della fase nelle vicinanze del Novilunio.

Dalla fatta digressione rimettendoci al nostro soggetto, il bel cannocchiale di Merz può inoltre vantaggiosamente servire qual teodolite alla misura di angoli orizzontali che, riferendosi ad una mira meridiana in conveniente distanza, faranno conoscere per differenza ed entro uno o due minuti d'arco li azzimuth de' terrestri oggetti elevati e lontani, come le sommità de'monti circostanti, da porgerne quindi alla topografia una serie di punti trigonometrici ben determinati. A tal fine basterà mettere e mantenere a livello nel suo movimento il cannocchiale, mediante le tre grosse viti alla base del suo sostegno. E con questa sola condizione adempiuta, può esser del pari usato lo strumento e dirizzatone il cannocchiale a un punto qualunque di nota posizione celeste, per azzimuth ed altezza in un tempo dato; laonde se ne trovi e si osservi di pieno giorno un oggetto, invisibile all'occhio nudo ed eziandio con lenti di piccola forza ed ampiezza, come Venere, la polare o altra delle stelle più cospicue. Benchè io non ne abbia mai tentato la prova, non ho dubbio tuttavia ch'essa riuscirà, tentandola, non meno agevole che soddisfacente.

Ma l' uso astronomico più diretto e importante del grande Rifrattore offresi per mio avviso all'uopo di osservare accuratamente le posizioni relative delle comete, per indi calcolarne l'orbita, riferendole a conosciute stelle, non molto distanti dalla Cometa in ascensione retta e assai vicine in declinazione. A questo fine, principalmente in riguardo alle comete, o anche per misurar le distanze e i movimenti dei satelliti intorno al rispettivo pianeta, serve il micrometro circolare, di cui venne fornito il Rifrattore, e dal quale con molta facilità si ottengono determinazioni sufficientemente precise. Consiste il detto Micrometro in una laminetta o banda metallica di qualche larghezza e piegata in figura di zona circolare, fermata nel fuoco dell'oculare e a questo concentrica, ma di un raggio alquanto minore di quello del campo ottico del cannocchiale; perlocchè a campo aperto e chiaro la zona vi comparisce oscura e sospesa, e dietro di essa occultansi gli oggetti esteriori. Però a trarne profitto nelle indicate osservazioni celesti richiedendosi dalle opportune formole di calcolo , che sia ben conosciuto il raggio del micrometro, io mi sono di recente occupato a determinarlo, seguendone il metodo esposto dal mio illustre Maestro ed amico , il Commendatore prof. Santini al §. 267. de'suoi Elementi d'Astronomia (Tom. I. pag. 278. dell'edizione 2ª. Padova 1830). E poichè seguendo tal metodo è necessario scegliere due stelle di Catalogo, ossia, di esatta conosciuta posizione che, per l'apparente moto diurno, attraversino a breve distanza di parallelo e di tempo l'interno spazio del Micrometro mantenuto immobile, così a me non potevan offerirsi perciò più idonei a tal uopo, e il cielo purissimo costantemente nell'Aprile di quest'anno, e il bel gruppo delle Plejadi, ancora molto alto e visibile, a occidente, vicinissimo in questa sera a Venere, che brilla fulgidissima e discendente alla congiunzione inferiore. Oh, se fosse accaduto che il pianeta in questa sua elongazion vespertina dal Sole raggiunto avesse il detto gruppo di stelle, quanto sarebbe stato vago e gradevole ad osservarsi l'occultamento di alcune fra le maggiori di esse, p. e. di Alcione o di Elettra, nella stretta falce luminosa

o nell'oscura e larga parte del disco di quello? Io trascelsi appunto quattro di queste, e ne feci le osservazioni seguenti al micrometro circolare del Rifrattore di Merz. Chiamate pertanto i, e l'immersione e l'emersione rispettivamente di una delle plejadi dall'orlo circolare interno del micrometro, e i', e' l'ingresso ed egresso della medesima dall'orlo esterno, per questa e per altra plejade vicina tenuto immobile il cannocchiale, e notando gl'istanti che udiva battere al pendolo Dent regolato al tempo sidereo, io trovai :

Sera 6 *Aprile* 1865.

1.ª oss.	Alcione....	$i'.=8^h.56^m.59^s,5$;	Atlas....	$i'.=8^h.58^m.39^s,5$	immob. il can.
		$e.=$ 37. 7, 0		$e.=$ 58. 47, 0	
		$i.=$ 58. 42, 0		$i.=$ 0. 24, 2	
		$e'=$8. 58. 49, 0		$e'.=$9. 0. 32, 0	
2.ª oss.	Alcione....	$i'.=$9. 8. 43, 0 ;	Atlas....	$i'.=$9. 10. 21, 5	immob. il can.
		$e.=$ 8. 50, 2		$e.=$ 10. 29, 0	
		$i.=$ 10. 24, 2		$i.=$ 12. 6, 3	
		$e'=$9. 10. 31, 0		$e'.=$ 12. 14, 0	

Sera 8 *Aprile* 1865.

	Alcione....	$e.=$8. 46. 3, 2 ;	Atlas....	$e.=$8. 47. 40, 5	immob. il can.
		$i.=$ 47. 31, 2		$i.=$ 49. 16, 2	
		$i'.=$8. 51. 52, 3 ;		$i'.=$8. 53. 32, 1	immob. il can.
		$e'.=$ 53. 41, 0		$e'.=$ 55. 24, 8	
1.ª oss.	Elettra....	$e.=$9. 2. 45, 0 ;	Maja....	$e.=$9. 3. 18, 2	immob. il can.
		$i.=$ 2. 28, 0		$i.=$ 4. 43, 7	
		$i'.=$9. 7. 3, 5 ;		$i'.=$9. 7. 45, 2	immob. il can.
		$e'.=$ 8. 17, 5		$e'.=$ 9. 27, 0	
2.ª oss.	Elettra....	$e.=$9. 11. 47, 8 ;	Maja....	$e.=$9. 12. 37, 0	immob. il can.
		$i.=$ 12. 51, 8		$i.=$ 13. 55, 3	
		$i'.=$9. 15. 44, 5 ;		$i'.=$9. 16. 42, 3	immob. il can.
		$e'.=$ 17. 16, 8		$e'.=$ 18. 11, 7	

Nella prima sera del 6 Aprile io notai d'un solo tratto, per la stessa posizione del cannocchiale e per le due stelle, Alcione e Atlas, li otto istanti i, e,

i', e'; ma come questi s'intrecciavano e succedevansi con troppa rapidità per aver agio di scriverli tosto, e non confonderli fra loro, così in seguito preferii di staccare le due osservazioni di occultamento all'interno e all'esterno perimetro o lembo del micrometro. Dalla semisomma dei tempi dell'immersione ed emersione dallo stesso perimetro avendosi poi l'istante del passaggio della stella al diametro del micrometro, perpendicolare alla corda percorsa e che rappresenta perciò un circolo orario di declinazione, la differenza della detta somisomma per le due stelle in ogni osservazion conjugata, equivale alla differenza di Ascension retta delle stelle medesime. Così nel precedente quadro di osservazioni, paragonati gli istanti delle occultazioni che si corrispondono, risulta per un medio di sei valori concordi la differenza di Ascension retta delle prime due stelle, Alcione e Atlas, $= 1^m. 41^s, 2$ e questa dal Catalogo di Piazzi (ediz. del 1814) è data $= 1^m. 40^s, 4$. E similmente dai quattro confronti delle altre due stelle, Elettra e Maja, rilevasi per un medio di quattro valori l'analoga differenza $= 0^m. 55^s, 8$, che nell'indicato Catalogo è posta $= 0^m. 55^s, 5$. Una tale coincidenza, che non richiede la riduzion comune delle posizioni medie alle apparenti, dimostra di non aver io preso equivoco nel riconoscere il nome delle quattro stelle prescelte ed osservate.

Ritenute pertanto le denominazioni degli elementi, o dati del problema usate dal ch. Santiui ai citati volume e paragrafo dell'Astronomia; ossia per ogni osservazione conjugata delle due stelle denotatando, rispetto alla stella precedente, con δ la declinazione della stella, con t il tempo da essa impiegato a trascorrere la corda, con $2a$ la corda stessa, e con z l'angolo al centro nel micrometro; e rispetto alla stella seguente con δ', t', $2a'$ e z' le analoghe quantità, si otterrà il raggio r dell'interno lembo circolare del micrometro, dedotto dagl'istanti osservati e, i della duplice occultazione, calcolando le formule . . . $2a = 15t \cos.\delta$; $2a' = 15\, t' \cos.\delta'$; $\text{tang.}\, \frac{1}{2} (z' + z) = \frac{a' + a}{\delta' - \delta}$; $\text{tang.}\, \frac{1}{2} (z' - z) = \frac{a' - a}{\delta' - \delta}$; $r = \frac{a}{\text{sen.}\, z} = \frac{a'}{\text{sen.}\, z'}$.
E le stesse formule serviranno a determinare il raggio r' del lembo circolare esterno del micrometro, ma deducendolo invece dagl'istanti osservati i', e' della duplice occultazione corrispondente. Or ecco le determinazioni da me ottenute.

Stella		δ	a	z	r
Alcione	»	$\delta = +23^\circ.\ 41',4$	$a = 652'',46$	$z = 102^\circ.\ 29',0$	.... $r = 11'.\ 8'',3$
Atlas	»	$\delta' = +23.\ 38,6$	$a' = 667,80$	$z' = 92.\ 7,4$	
Alc.	»	. . . .	$a = 645,60$	$z = 105.\ 2,7$	.... $r = 11.\ 8,5$
Atl.	»	. . . .	$a' = 668,50$	$z' = 89.\ 37,7$	
Alc.	»	. . . .	$a = 604,39$	$z = 115.\ 3,5$	.... $r = 11.\ 7,2$
Atl.	»	. . . .	$a' = 657,59$	$z' = 80.\ 12,7$	
Elettra	»	$\delta = +23.\ 41,5$	$a = 295,33$	$z = 26.\ 11,0$	.... $r = 11.\ 9,3$
Maja	»	$\delta' = +23.\ 56,9$	$a' = 586,10$	$z' = 61.\ 7,6$	
Elet.	»	. . . .	$a = 439,55$	$z = 40.\ 34,9$	.... $r = 11.15,7$
Ma.	»	. . . .	$a' = 536,70$	$z' = 52.\ 34,8$	
				Medio	$r = 11.\ 9,8$

Stella			a	z	r'
Alcione	»	. . . .	$a = 752,05$	$z = 103.\ 21,4$	.... $r' = 12.\ 53,0$
Atlas	»	. . . .	$a' = 772,90$	$z' = 89.\ 18,4$	
Alc.	»	. . . .	$a = 741,75$	$z = 106.\ 48,3$	.... $r' = 12.\ 54,8$
Atl.	»	. . . . . , . .	$a' = 772,90$	$z' = 85.\ 56,5$	
Alc.	»	. . . .	$a = 746,55$	$z = 105.\ 4,4$	.... $r' = 12.\ 53,2$
Atl.	»	. . . .	$a' = 772,49$	$z' = 87.\ 38,4$	
Elettra	»	. . . .	$a = 508,23$	$z = 40.\ 57,2$	.... $r' = 12.\ 55,4$
Maja	»	. . . .	$a' = 697,78$	$z' = 64.\ 8,6$	
Elet.	»	. . . .	$a = 633,93$	$z = 54.\ 46,4$	.... $r' = 12.\ 54,3$
Ma.	»	. . . .	$a' = 612,79$	$z' = 52.\ 9,0$	
				Medio	$r' = 12.\ 54,1$

Abbiamo dunque il raggio del circolo interno del micrometro assai prossimamente $= 11'.\ 10''$, e quello del circolo esterno $= 12'.\ 54''$; laonde sarà la larghezza della zona circolare $= 1'.\ 44''$. E l'accordo degli ottenuti valori in due sere e da condizioni diverse di triangoli per le due coppie differenti di stelle osservate, ci affida che tali dimensioni del micrometro sono le vere e precise. Potrebbe tutto al più nascere dubbio che la diversità della rifrazioue dall'immersione all'emersione o viceversa della medesima stella da un lembo circolare del micrometro abbia un poco alterata la lunghezza della corda percorsa; di che tuttavia si conosce e potrebbe applicarsi la relativa correzione coi precetti e colle formule del Santini (§. 265. Op. cit.). Ma oltrecchè i concordi valori di r, r', dedotti da osservazioni variate e ripetute, provano che l' influenza della diversa rifrazione dev'essere stata pressocchè nulla, ciò è poi razionalmente confermato dalla tenuissima differenza delle rifrazioni ai due punti e al breve intervallo fra l'immersione ed emersione della stella , stante l' altezza piuttosto grande in cui a bello studio furon da me osservate al micrometro le occnltazioni delle plejadi. Nè, a conclusione del fin quì detto, sembrami inutile nè fuor di luogo avvertire che, appunto per siffatta occorrenza di misurar il raggio di un micrometro circolare, la scelta più opportuna di note stelle che l'attraversino a cannocchiale

immobile si ha nel magnifico gruppo delle plejadi, da osservarsi a notevole altezza su l'orizzonte.

Benchè di meno che mediocri dimensioni, l'equatoriale di Merz, che il Marchese, appena dopo ricevutone il grande Rifrattore, commetteva per mio mezzo al celebre Fabbricatore di Monaco, e che, inviatoci dopo due anni di colà, venne tosto montato stabilmente nel cupolino a tetto girevole della novella Specola (V. nella tavola, parte I. la sezione di alzato), costrutta a tal fine con ogni cura di fermezza o solidità e di comodi, esso pure è uno strumento di molto pregio e che può somministrare importante materia di osservazioni in qualunque parte del cielo visibile. Va fornito esso pure di un eccellente acromatico di Frannhofer, dell'apertura obbiettiva di linee parigine 43 colla lunghezza focale di pollici 54, portante con sè cinque oculari astronomici per ingrandimenti di 48, 72, 108, 162, 243, un oculare terrestre d'ingrandimento 60, un micrometro circolare, due vetri piani colorati o elioscopici, e un piccolo cercatore in ottone; mentre il lungo tubo del cannocchiale per leggerezza è stato squisitamente lavorato in legno. Questo è a dirsi il pezzo principale e più prezioso della macchina; giacchè valendo a riconoscere colla maggiore chiarezza e distinzione ottica gli oggetti celesti più minuti, e quindi a ben assegnare la precisa direzione de' raggi visuali, o la linea di collimazione, può esso molto utilmente servire a osservazioni delicate di astronomica specialità per pianeti e comete. Il rimanente della macchina è in ottone e acciajo. Dai due cerchii, ciascuno del diametro di 7 pollici, l'equatoriale diviso e col nonio porta la lettura e distinzione a $4.^s$ di di tempo, e l'orario o di declinazione a $20''$ d'arco. L'asse di rotazione, congiunto ai circoli, e da dirizzarsi coi perni flssi ai poli del mondo è stato inclinato da Merz fissamente all'orizzonte, come richiede la nota latitudine di Modena. Io non presenterò questa volta ragguagli più particolari sopra la costruzione di tale strumento, il suo collocamento ed esercizio nella Specola, e intorno alle sue rettificazioni; mancatomi finora il tempo di ben esaminarlo a prova di accurate osservazioni. Mi limiterò invece a produrre la recente determinazione del raggio interno ed esterno del suo micrometro circolare, da me ottenuta colle stesse formule, e colle stelle medesime delle plejadi precedentemente adoperate; locchè basterà per l'uso più frequente della macchina.

Sera 19 *Aprile* 1865.

Osservazione delle plejadi al micrometro circolare dell'equatoriale di Merz : i tempi sono presi ad un cronometro C di Dent e possono riportarsi al pendolo D sottoposto e regolato al tempo sidereo mediante l'accordo D–C ... $= + 4^m. 18^s, 5$.

Alcione	1.° $e . i. =$	$9^h.28^m.10^s,5$;	Atlas.	1.° $e . i. =$	$9^h.29^m.41^s,5$
	2.° $i . i. =$	29. 24, 8		2.° $i . i. =$	31. 15, 3
Alc.	1. $i'. e. =$	9. 38. 34, 2 ;	Atl.	1. $i'. e. =$	9. 40. 9, 3
	2. $e'. e. -$	40. 22, 0		2. $e'. c. =$	42. 8, 8
Elettra	1. $e . i. =$	9. 52. 0, 0 ;	Maja.	1. $e . i. =$	9. 52. 44, 5
	2. $i . i. =$	43. 13, 2		2. $i . i. =$	54. 20, 3
Elet.	1. $i'. e. =$	9. 58. 7, 2 ;	Ma.	1. $i'. e. =$	9. 58. 53, 5
	2. $e'. e. =$	59. 42, 0		2. $e'. e. =$	10. 0. 47, 2

Di qui ricaviamo per le formule, e colle preindicate avvertenze

Alcione » δ	$a = 510'', 29$;	$z = 136°. 44', 6$	.....	$r = 12'. 24'', 7$
Atlas » δ'	$a' = 644 , 43$	$z' = 59. 55 , 8$		
Elettra » δ	$a = 502 , 73$,	$z = 41. 59 , 5$	.....	$r = 12 . 31 , 4$
Maja » δ'	$a' = 656 , 66$	$z' = 60. 54 , 7$		
			Medio.	$r = 12 . 28 , 1$
Alcione »	$a = 740 , 37$;	$z = 121. 40 , 2$	.....	$r' = 14 . 29 , 9$
Atlas »	$a' = 821 , 02$	$z' = 70. 42 , 0$		
Elettra »	$a = 651 , 09$;	$z = 49. 14 , 5$	.....	$r' = 14 . 19 , 5$
Maja »	$a' = 779 , 35$	$z' = 65. 2 , 9$		
			Medio.	$r' = 14 . 24 , 7$

Quindi la larghezza dell'anello circolare, o dell'armilla sospesa, come lo appella il Santini, sarà $r' - r = 1'. 56'', 6$. La differenza un po' forte di $10''$ nei due valori di r', in senso contrario a quella dei due r per le medesime stelle , può esser derivata dal dubbio di 1^s in più o meno sopra gl'istanti numerati alle battute del cronometro C, che sono di mezzo in mezzo secondo; mentre coll'udito io sono abituato a numerar quelle del secondo intero alle oscillazioni di un pendolo. Però l'ottenuto risultamento parmi da ritenersi per una sufficiente approssimazione , che potrà in seguito verificarsi e rendersi più esatta.

La privata Specola Montecuccoli ha raccolto e possiede altri minori strumenti, come due cannocchiali acromatici con tubo e piede in ottone e di lodevol nettezza d'imagini, lavoro dell'ottico modenese Giuseppe Briadi , un barometro del meccanico Bertacchi alla Fortin, un termometrografo di Six, un psicrometro del P. G. Cavalleri eseguito a Milano dal Dall'acqua, e alcuni termometri sciolti. Se non che la collezione dei mezzi per un completo sistema di osservazioni meteorologiche, qual oggi specialmente richiedesi, finora quì è troppo scarsa e attende novelli acquisti, che non le mancheranno dalla nobile splendidezza del Possessore, ove a lui se ne offra l'opportunità di commetterli.

Poichè io non amo di terminar colla presente l'assuntami descrizione della Specola novella, senza recarne altro piccolo Saggio delle celesti osservazioni che vi si praticano, passerò infine ad esporre brevemente quanto ci venne fatto sin qui di raccogliere e determinare per occultazioni lunari di alcune stelle, fra le più rimarchevoli annunziate dall'effemeridi. La serie delle nostre notazioni e de'risultati fu la seguente.

1864, Maggio 23. In questa notte occultavasi dalla Luna, passato di due giorni il plenilunio, la 21 Sagittario di 5.ª Col Rifrattore di Merz a forte ingrandimento io vidi la stella piccolissima presso il lembo lunare illuminato fino a $10^h. 29^m. 4^s$ di tempo medio a Modena, e stimai ad occhio l'immersione dover succedere circa 20^s dopo. All'emersione stancatomi l'occhio fisso alla Luna per mezz'ora continua fino a $11^h. 38.^m$, ne abbandonai l'osservazione all'ingegnere Miselli, che riusci a coglierla, e la giudicò istantanea a $11^h. 42.^m 45^s, 9$ di tempo medio. Così la stella sarà stata occultata circa $1^h. 14^m.$, mentre secondo l'annunzio dell'astronomo di Milano (1864, pag. XXIII.) non doveva esserne celata se non $0^h. 36^m.$

1864, Giugno 17. Occultazione di ω^1 Scorpione, due giorni circa innanzi al plenilunio. Col Rifrattore Merz a piccolo ingrandimento giudicai avvenuta l'immersione o disparizione della stella di 4–5ª grandezza a $13^h. 36^m. 9^s, 1$ di tempo medio a Modena; dopo tal istante , in cui essa era vicinissima alle frastagliature della fase lunare, non avendola io più veduta. Nebbie atmosferiche però tratto tratto mi facevan perdere di vista le due stelle ω^1 e ω^2, delle quali doveva occultarsi a mio avviso anche la seconda, che l'effemeride di Milano (pag. cit.) annunziava passare a $5'$. di minima distanza dal lembo boreale della Luna. L'emersione mi fù tolta interamente da nubi e nebbie addensatesi all'orizzonte. Questa osservazione, se riusciva completa, mi era preziosa, accadendo fra i passaggi meridiani di α Lira, che presi al Circolo di Starke, e di α Cigno che ommisi.

1864, Ottobre 8. Occultazione di ρ^1. Sagittario di 4.ª : Luna in 1.º quarto.

Immersione istantanea osservata a $8^h. 11^m. 45^s, 6$ di tempo medio a Modena.
Emersione pure istantanea . . . . 9. 18. 23 , 3

Usando sempre dell'ottimo Rifrattore di Merz, per l'immersione , accadendo nel lembo lunare oscuro, vi applicai il minimo ingrandimento; non così per l'emersione dal lembo lunare fortemente chiaro, che richiede per la distinzione della stella emergente, e a minor fatica dell'occhio l'ingrandimento massimo di 270. Con questo vidi la stella propriamente balzar fuori e in contatto col lembo della Luna.

La ρ^2 Sagittario non fu occultata e oltrepassò la Luna alla minima distanza del lembo australe vero, o boreale apparente, che stimai da 3 a 4'. Questa volta ci siamo ben accordati coll'effemeride milanese, ed io ne crederei buona e precisa la mia osservazione.

1864, Ottobre 9. Occultazione di β^2 del Capricorno di 3ª, e di una piccola precedente di 8.ª

Immersione della piccola precedente a $9^h. 19^m. 27^s, 9$ di tempio medio a Modena.
Immers. di β^2 Capricorno. . . . . . 9 . 25. 56 , 6
Emersione di β^2 Capr. . . . . 10 . 32. 38 , 3

Per la immersione usai al solito il piccolo ingrandimento del Refrattore, e per l'emersione invece di β^2 Capricorno l'ingrandimento più forte di 270. Non bastò questo per altro a poter distinguere l'emersione della piccola stella di 8.ª, ch' era ben lungi dal lembo illuminato quando la riconobbi. Ma la β^2 Capricorno videsi a meraviglia in contatto col detto lembo, assai risplendente e di un bel giallo d'oro in vago paragone coll'argenteo della Luna. Questa e la occultazione di jeri quì osservate potranno impiegarsi a riconoscere la nostra longitudine relativa, o differenza de'meridiani con altra Specola, ove siane riuscita la completa osservazione del pari che fra noi.

1864, Ottobre 14. Occultazione di ε Pesci di 4ª, poche ore innanzi al plenilunio.
Emersione . . . . a $8^h. 16^m. 0^s, 2$ di tempo medio a Modena.

Col rifrattore di Merz a ingrandimento di 270 potei vedere all'emersione la stella propriamente e momentaneamente in contatto al lembo lunare illuminato. Riguardo all'immersione, essa mi sfuggì per essere avvenuta forse più di $20.^m$ precedentemente all'annunzio dell'effemeride di Milano, e mentre per avventura io stava prendendo al Circolo di Starke il passaggio meridiano di α Cigno per averne la correzion siderea dell'orologio Frodsham, e quindi il vero tempo astronomico locale. Perocchè, appena osservato il detto passaggio, avendo io mirato col grande rifrattore, già predisposto, alla Luna, la stella erane stata occultata, nè più si vedeva. Una delle sommità lunari illuminata, giacchè sul lembo orientale presso la fase del prossimo plenilunio, isolata, e di luce rassomigliante ad una stella di 4ª, mi tenne per alcun tempo fisso coll'occhio a mirarla, se mai fosse la stella in sul disparire, ma essa era veramente una montagna della Luna.

1865, Gennajo 4. Occultazione di ε Pesci di 4.ª : Luna in 1.º quarto.
Immersione . . . . . . a $7^h. 11^m. 46^s, 9$ di tempo medio a Modena : istantanea.

Nubi e nebbie atmosferiche ricoprivan di tratto in tratto luna e stella; ma si dileguaron fortunamente poco innanzi all'immersione, osservata col solito rifrattore a piccolo ingrandimento. Invece per la medesima stella del 14 Ottobre p. p. mi è mancata in questa l'emersione, ostando le nebbie che interrottamente velavan la luna, e vagando io troppo coll'occhio di quà e di là dal vero luogo dell'emersîone, che avvenne a più di 190.º dal vertice del lembo lunare. Quando io rividi la stella a $7^h. 39^m.$ di tempo medio, essa era già uscita dalla luna circa $4^m.$ innanzi.

1865, Aprile 12. Occultazione di $\alpha 2$ Libbra di 3.ª : circa due giorni dopo il plenilunio.

Immersione . . . . . a $11^h. 47^m. 38^s, 7$ di tempo medio a Modena.

Emersione . . . . . . 13. 0. 21 , 2

Con medio ingrandimento di 180 la stella, che vidi fino al contatto col lembo lunare illuminato, mi scomparve istantaneamente. All'emersione, usando un ingrandimento di 80 per abbracciare coll'occhio un maggior arco di lembo lunare, giudicai la stella già uscita da 5 in 6^s prima dell'istante notato in cui la vidi, e ciò, per non aver io l'occhio precisamente nel punto e all'atto della vera emersione, differisce un po' troppo dall'annunziatone rispettivamente nell' effemeride di Milano (1865. pag. IX.); mentre in altri casi, come per l'ultima immersione di ε Pesci, la mia osservazione è riuscita concorde all'annunzio e calcolo della detta effemeride. Insieme poi all' $\alpha 2$ Libbra, o Kiffa, occultossi eziandio la piccola precedente 8 Libbra di 6ª., ed io con ingrandimento di 180 distinguendola fin quasi a contatto del lembo lunare, ne stimai

l'immersione a $11^h. 35^m. 33^s$ di tempo medio a Modena ;

ma con incertezza da 4 in 5^s in meno dal vero, ossia da aggiungersi alla stima. Riguardo all'emersione io non riuscii a vederla, stante la piccolezza della stella, e il prossimo pleniluuio accaduto.

Giovami ora quì avvertire che gl'istanti osservati di tutte le precedenti occultazioni riferivansi da me immediatamente all'uno o all'altro dei due pendoli, Frodsham e Dent, dell'Osservatorio, entrambi quotidianamente regolati al tempo sidereo con passaggi meridiani, osservati al Circolo di Starke e corretti dalle deviazioni dello strumento. A tal fine, ossia per conoscere a un istante qualunque la vera e precisa equazion siderea o correzion dell'orologio e la sua diurna variazione, io seguo sempre il mio costume di osservar alcuna delle stelle zenitali più cospicue, quali α Cigno, α Auriga, e α Lira, il passaggio meridiano delle quali notato all'orologio, per esser corretto non richiede se non di applicarvi li noti errori dell'inclinazione dell'asse o di livello, e della linea di collimazione o di fiducia, nullo essendo allo zenit quello di azzimut. Così corretti dall'equazion del pendolo gl'istanti a questo immediatamente osservati in ciascuna occultazione, io ne ottenni le quantità corrispondenti di tempo siderale a Modena , e da queste poscia facilmente dedussi quelle del tempo medio a Modena che ho riportate.

Darò termine alla presente col richiamare semplicemente l'attenzione all'interessante fenomeno testè rinnovatosi (il 7 del corrente Maggio) della congiunzion inferiore di Venere. Poco dopo il mezzogiorno del 3 corrente io potei distintamente osservare al Circolo e cannocchiale di Starke l'altezza e il passaggio meridiano del pianeta sotto l'aspetto di una strettissima falce, che stava per volgersi e passare dall'occidentale al lembo orientale del disco nella parte inferiore o australe, per esser Venere di 4 in 5° più elevata o boreale del Sole. Io era curioso di vedere, se nei seguenti giorni, sino a quello inclusivo della congiunzione, io avrei potuto distinguere e osservar col piccolo cannocchial meridiano il

pianeta; come fortunatamente ciò mi avvenne per la simile congiunzion inferiore del Febbrajo 1854, però da me osservata col grande cannocchiale di Fraunhofer al Circolo meridiano di Reichenbach (V. la mia Memoria inserita negli Annali di scienze matematiche e fisiche del ch. Tortolini, Roma, Settembre 1854); ma intorbidatasi l'atmosfera, la mia curiosità ne venne delusa. Poche sere antecedenti Venere in elongazion vespertina brillava all'occhio nudo fulgentissima, tanto da esser creduta volgarmente una celeste novità meravigliosa, e di posizione passò vicinissima al bel gruppo delle plejadi, che mi occupavano ad altro intendimento. Ed oh, se ne fosse avvenuta l'occultazione di alcuna delle plejadi, quanto io avrei goduto di osservarla!

Modena, 22 Maggio 1865.

1865. Luglio 3. Occultazione di $\alpha 2$ libbra, prima del plenilunio.
Immersione a . . . $11^h. 16^m. 3^s, 7$ di t. m. a Modena
Emersione 11. 44. 45, 2

L'immersione istantanea col cannochiale Merz piccolo, ingrandì l'emersione veduta propriamente a contatto del lembo lunare illuminato, sfuggendone fuori la stella obbliquamente. Simultaneo all'emersione avvenne il passaggio meridiano di di α Lira.

L'immersione della piccola stella 8 Libbra mi fu tolta da una nube, e l'emersione mi mancò similmente.

G. B.

VI.

Il clima più regolare e meno variabile di Modena osservato nei ventun' anni dal 1830 al 1850.

Egli è da distinguere nel clima di un paese o luogo qualunque alla superficie terrestre la parte di esso clima che, durante un periodo o intervallo sufficiente di non pochi anni consecutivi, si osservi e possa dirsi molto prossimamente regolare o costante, dall'altra parte che alla continua e sagace osservazione abbia presentato nello stesso periodo e per gli elementi medesimi, onde il clima si compone, ineguaglianze o irregolarità enormi. Per clima di fatto intendendosi comunemente il complesso delle speciali condizioni e de'successivi cangiamenti de'fenomeni atmosferici nel dato luogo, ne viene che una parte di tal complesso, in quanto è solo prodotta dalle naturali cagioni e influenze dell'annuo invariabil giro delle stagioni, o del diurno e annuo moto apparente del Sole, modificate permanentemente dalle circostanze locali di latitudin geografica, di altezza del suolo e di topografiche specialità per vicinanza di monti, corso di acque e coltivazione de'campi, ne viene, io diceva, che questa parte, da nomarsi il vero e proprio clima, dovrebbe manifestarsi e rimanere invariata, qualora nella

parziale atmosfera sovrincombente al dato luogo non avvenissero altri moti e cangiamenti per comunicazione colla totale atmosfera del globo. Donde l'altra parte del clima perturbatrice della prima, e non di rado tanto forte per lo stesso luogo, comecchè di non lunga durata, da invertirne quasi l'ordine di quella. Così nel cuor dell'inverno ci scorrono talvolta giorni che per temperatura sembran quasi di avanzata primavera, e inversamente all'aprirsi testè fra noi la dolce stagione una passeggiera intemperie di freddi venti e di neve ci chiudeva la straordinaria e prolungata mitezza della rigida precedente. Ma cotali perturbazioni o inversioni costituenti la parte irregolare del clima nel seguito di alcuni anni , o elidendosi fra loro a vicenda, o bastevolmente diminuendosi nelle quantità medie dal divisore dell'intervallo fra gli estremi , tanto non affettan e nascondono la parte regolare e costante, che questa chiaramente non emerga e si appalesi nelle tenui differenze delle dette quantità medie osservate, in riguardo però sempre al dato luogo e periodo considerato di tempo. Dietro questi e somiglianti riflessi io presi ad esaminare un solo elemento del nostro Clima, qual è la pioggia che annualmente cade a Modena, e ne stesi la Memoria che leggesi fra quelle della Società Italiana delle scienze (T. XXV. Parte seconda, 1852). Ivi presentate e sotto varii rapporti discusse le osservate quantità della pioggia, qui caduta nei ventun anni dal 1830 al 1850 inclusivamente, io toccai delle ragioni, onde mi sembrarono sufficientemente ben fondate nel prescelto e limitato periodo dei ventun anni le ottenute determinazioni e relazioni delle quantità medie finali; sebbene poi a rimovere le rimanenti piccole incertezze di variabilità in quest'elemento del nostro clima io dichiarassi richiedersi per avventura di ripetere e confrontare analoghi risultamenti raccolti da quattro o cinque periodi eguali e successivi di osservazioni (Mem. cit. §§. II e III. n.[i] 13 e 17). Se non che a estenderne e compiere le ricerche relative al conoscimento della parte regolare o costante del clima di Modena io terminava la Memoria stessa col promettere di occuparmi, quando che fosse, alla disamina degli altri elementi del mio clima nel periodo stesso dei ventun anni; la quale promessa ora mi prefiggo appunto di liberare.

Fra le considerazioni generali della IV. di queste Lettere io avvertiva di aver estratto dai registri delle quotidiane osservazioni della R. Specola e di custodire presso di me in parecchi fogli di tabelle una copia esatta dei mensili riassunti meteorologici durante il detto periodo dei ventun anni. E già tutti sono d'avviso che lo studio e assegnamento del clima particolare di un luogo non può fondarsi e ammettersi fuorchè nel raccogliere ed esaminare nelle annue quantità medie i massimi, i minimi e i medii mensili , vuoi del barometro , termometro e igrometro, vuoi dello stato del cielo per serenità, nubi, pioggia e altri fenomeni dell'aria. Nè io qui riporterò tali riassunti, che occuperebbero troppo spazio di tabelle numeriche, bastandomi di asserirne in tutta coscienza la fedeltà del fondamento, cui ne verrò appoggiando l' esposizione o lo sviluppo e le successive deduzioni del mio soggetto. Ciò premesso e incominciando dall'investigare le relazioni o proprietà dei tre elementi atmosferici del clima, la pressione, la temperatura e l'umidità mediante le quotidiane indicazioni del barometro, termome-

tro e igrometro alle ore stabilite, io dirò che per ciascuno di tali strumenti misuratori trassi dai riassunti mensili dei ventun anni, e mi formai quattro quadri o prospetti ordinati e disposti come segue. Denotiamo innanzi con lettere d'alfabeto le varie quantità che vuolsi e importa di considerare. Chiaminsi

	barometriche	termometriche	igrometriche
l'annua media delle massime mensili	a	s	h
minime mensili	b	t	i
medie mensili	c	u	k
l'annua massima assoluta	A	S	H
minima assoluta	B	T	I
la massima delle medie mensili	C_a	U_s	K_h
la minima delle medie mensili	C_b	U_t	K_i
la massima delle medie annue	c_a	u_s	k_h
la minima delle medie annue	c_b	u_t	k_i
la massima delle massime annue	a'	s'	h'
la minima delle minime annue	b'	t'	i'

Mi convien inoltre avvertire che le ore fissate alle giornaliere osservazioni furon cangiate nei ventun anni e precisamente in questo modo. Nel triennio 1830–31–32 notavansi le condizioni atmosferiche alle 8 della mattina, e alle 0 e 8 della sera; nel biennio seguente vi si aggiunsero quelle delle 12 sera, o della mezzanotte; nel 1835 notaronsi alle 10 m. e alle 3, 6 e 10 s., nel 1836 alle 10 m., 0, 8 e 10 s., dal 1837 al 47 inclusive alle 9 m. 0, 6 e 9 s., e nel triennio 1848–50 alle 9 m., 3 e 9 s., essendosene dipoi continuata l'ultima distribuzione comunemente ammessa. Cotali cangiamenti delle ore non debbon però influir molto nelle indagini e risultanze attuali; nè ho io mancato di avervi riguardo nel calcolo di riduzione alle quantità medie. Pertanto ecco l' ordine e la formazione dei quattro prospetti o quadri poc'anzi accennati, dedotti con ogni attenzione e diligenza dai riassunti mensili, e che tengo sott'occhio, avvegnacchè per l'economia dello spazio io mi astenga di qui produrli. Come ho detto, l'ordinamento loro è uniforme, ossia comune al barometro, colla scala in linee del piede di Parigi, al termometro esterno a scala ottantigrada, e all'igrometro di Sausurre a capello e scala centesimale.

Nel quadro 1.° ho riportato semplicemente per l'intero periodo e a ciascun' ora di osservazione le annue medie a, b, c; s, t, u; h, i, k. A ciascun anno del periodo nel quadro 2.° e in quattro successive colonne ho riportato le quantità A, B, C_a, C_b : S, T, U_s, U_t : H, I, K_h, K_i, a lato di ciascuna indicando il mese e l'ora che la somministrava; e qui prese le medie dei ventun anni, esse mi risultano

	lin.		
medie	A = 343, 7242	S = + 24.° 4333	H = 90, 5238 ;
	B = 327, 0456	T — — 4, 2429	I = 2, 6905 ;
	C_a = 339, 2137	U_s = + 21, 4663	K_h = 81, 0640 ;
	C_b = 334, 4944	U_t = + 0, 3896	K_i = 35, 7938 ;

donde a vista di numeri e molto prossimamente, emergono le tre semplicissime proprietà o relazioni

$$(1) \; \ldots\ldots \; A = 2C_a - C_b \; \ldots\ldots \; S + T = U_s - U_t \; \ldots\ldots \; H = 2(K_h - K_i) \,,$$

le quali si enunciano assai di leggieri per ognuna delli tre atmosferici elementi del clima, pressione, temperatura e umidità. In tanta varietà e discordanza dei singoli valori, orarii, mensili e annui potrebbe il caso far nascere nei rispettivi medii valori del periodo o intervallo totale relazioni cotanto semplici, ove queste non dovessero attribuirsi per naturali cagioni alla parte più regolare del clima nel dato luogo e corso di tempo ?

Nel 3.° quadro, distintamente già s'intende rispetto al barometro, termometro e igrometro, a lato di ciascun anno dei ventuno disposi l'ora diurna di osservazione o corrispondente alle

$$a',\; b',\; c_a\,,\; c_b\,; \quad s',\; t',\; u_s\,,\; u_t\,; \quad h',\; i'\,,\; k_h\,,\; k_i\,,$$

e qui si scorge che le a', c_a pressocchè sempre accadono di mattina e invece le b', c_b di sera; che per contrario le s', u_s offronsi di sera, e le t', u_t di mattina; e che le h', k_h avvengono tanto di mattina che di sera, mentre le i', k_i avvengono costantemente di sera. Seguono altre sei colonne dello stesso quadro, triplicato come li due 1.° e 2.°, nelle quali sono riportate per ciascun anno le differenze

$$a'-b'\,,\quad c_a-c_b\,,\quad A-B\,,\quad C_a-C_b\,,\quad A-C_a\,,\quad B-C_b\,;$$
$$s'-t'\,,\quad u_s-u_t\,,\quad S-T\,,\quad U_s-U_t\,,\quad S-U_s\,,\quad T-U_t\,;$$
$$h'-i'\,,\quad k_h-k_i\,,\quad H-I\,,\quad K_h-K_i\,,\quad H-K_h\,,\quad I-K_i\,.$$

Prese le medie di ciascuna di tali differenze per l'intero periodo, si ha

medie .... $a'-b' = \overset{\text{lin.}}{8}\,,\,9106$; $c_a-c_b = 0^1,\,3241$; $A-B = 16^1,\,6786$; $C_a-C_b = 4^1,\,7193$;
$A-C_a = 4^1,\,5105$; $B-C_b = -\,7^1,\,4488$;

$s'-t' = +\,8,\,9682$; $u_s-u_t = +\,1^\circ,\,5478$; $S-T = +28^\circ,\,6762$; $U_s-U_t = +21^\circ,\,0768$;
$S-U_s = +\,2,\,9670$; $T-U_t = -\,4^\circ,\,6335$;

$h'-i' = 55\,,\,0386$; $k_h-k_i = 10\,,\,8289$; $H-I = 87\,,\,3333$; $K_h-K_i = 45\,,\,2702$;
$H-K_h = 9\,,\,4598$; $I-K_i = -\,33\,,\,1033$.

Raccogliamo di qui tre nuove semplici relazioni o proprietà, empiricamente scaturite o a *posteriori*, e sono

$$(2) \; \ldots\ldots \; a'-b'+c_a-c_b = 2(C_a-C_b);\quad s'-t'+U_s-U_t = S-T+u_s-u_t;\quad h'-i' = K_h-K_i+H-K_h = H-K_i:$$

ma si guardi bene di non confondere queste medie differenze colle originarie o singole annue del quadro 3° dedotte dal 2°. Egli è poi singolare che le sole ul-

time tre $B - C_b$, $T - U_t$, $I - K_i$ sieno risultate negative, mentre tutte le antecedenti son positive.

Finalmente nel quadro 4.°, pure triplicato, io riportai per ciascun anno e ad ognî ora di osservazione, tratte sempre dai riassunti de'mesi, le quantità combinate annualmente in medie

$$c - \frac{a+b}{2}, \quad u - \frac{s+t}{2}, \quad k - \frac{h+i}{2},$$

e che util sembrami di quì presentare, insieme alle richiamate altezze corrispondenti dell'annua pioggia caduta.

Anno	Medie bar. $c - \frac{a+b}{2}$	Medie ter. $u - \frac{s+t}{2}$	Medie igr. $k - \frac{h+i}{2}$	Altezza dell'annua pioggia	ANNOTAZIONE
	lin.	°	°	millim.	
1830	+ 0, 6200	+ 0, 0484	+ 0, 2608	740, 04695	Non pochi ne'lievi riscontri si manifestano in queste differenze medie. Io mi limito a rimarcare il senso positivo di tutte pel barometro non meno, che pel termometro e l'igrometro. Ciò significa che nel nostro clima le c, u, k risultando maggiori delle rispettive semisomme $\frac{a+b}{2}$, $\frac{s+t}{2}$, $\frac{h+i}{2}$, nel corso dell'anno la somma delle massime mensili corrispondenti supera quelle delle minime, ossia che in genere presso di noi prevale colla maggiore altezza del barometro il buon tempo, il maggior calore colla naturale temperatura, e un piccolo eccesso di umidità, dovuto forse alla bassa situazione del nostro suolo, e alle non lontane valli e risaje.
1831	+ 0, 1769	+ 0, 2375	+ 3, 9115	586, 40259	
1832	+ 0, 4289	+ 0, 4063	+ 2, 1133	604, 90042	
1833	+ 0, 8314	+ 0, 2158	+ 5, 8128	1109, 82244	
1834	+ 0, 5668	+ 0, 1552	+ 3, 0282	299, 79962	
1335	+ 0, 4719	+ 0, 4511	+ 3, 8633	814, 55690	
1836	+ 0, 8415	+ 0, 4840	+ 5, 7422	614, 14921	
1837	+ 0, 7092	+ 0, 1243	+ 3, 8407	576, 38680	
1838	+ 0, 5332	+ 0, 1647	+ 3, 7555	801, 45065	
1839	+ 0, 1900	+ 0, 3642	+ 3, 2269	1176, 30172	
1840	+ 0, 2910	+ 0, 3042	+ 3, 2399	548, 68517	
1841	+ 0, 5434	+ 0, 0184	+ 4, 8450	658, 22817	
1842	+ 0, 5596	+ 0, 2637	+ 1, 8514	860, 30513	
1843	+ 1, 4000	+ 0, 1670	+ 2, 4802	636, 86550	
1844	+ 0, 4577	+ 0, 3143	+ 3, 2960	825, 13678	
1845	+ 0, 6631	+ 0, 0564	+ 3, 9886	915, 84582	
1846	+ 0, 4216	+ 0, 0147	+ 3, 2610	898, 04095	
1847	+ 0, 8960	+ 0, 3878	+ 2, 6632	657, 17267	
1848	+ 0, 4855	+ 0, 0819	+ 3, 8651	652, 13282	
1849	+ 0, 6814	+ 0, 0318	+ 4, 8240	650, 73882	
1850	+ 0, 5952	+ 0, 2433	+ 5, 4837	1010, 15774	

Come rilevai per l'elemento solo della pioggia (Mem. cit. §. II. n. 13), parmi giovevole di tirar eziandio e raffrontar per gli altri elementi le medie triennali della precedente tavoletta; e sono queste le seguenti, comprendendovi le già note dell'ultima colonna, o della pioggia.

MEDIE TRIENNALI

triennio	del barometro	del termomet.	dell'igrometro	della pioggia
	lin.	o		mm
1.°	+ 0, 4086	+ 0, 2307	+ 2, 0952	643, 78332
2.°	+ 0, 6267	+ 0, 2740	+ 4, 2348	741, 39299
3.°	+ 0, 4775	+ 0, 2577	+ 4, 4461	663, 99556
4.°	+ 0, 3415	+ 0, 2289	+ 3, 7706	794, 40502
5.°	+ 0, 8058	+ 0, 2483	+ 2, 5425	774, 10247
6.°	+ 0, 6602	+ 0, 1530	+ 3, 3043	823, 68648
7.°	+ 0, 5874	+ 0, 1187	+ 4, 7243	771, 00979
Medie totali o dell'intero periodo	+ 0, 55824	+ 0, 2169	+ 3, 5883	744, 67271

Scorgesi ora immediatamente il rapporto, secondo il quale diminuiscono le differenze o escursioni dei quattro elementi, dalle medie annue alle triennali. Abbiamo infatti l'escursioni dalla massima alla minima nelle annue medie precedenti, del barometro = $1^{\text{lin.}}$2231, del termometro = 0°, 3370, dell'igrometro = 5, 2229, della pioggia = 876^{mm}50210 ; e nelle medie triennali collo stess' ordine 9^{1}, 4643 ; 0°, 1553 ; 2, 6291 ; 179, 90316 : perlocchè dalle une alle altre avvennero le diminuzioni, barometrica di $\frac{1}{3}$, termometrica di $\frac{1}{2}$, igrometrica di $\frac{1}{2}$, e della pioggia di $\frac{1}{5}$ circa. Quindi pure la conseguenza che ad annullar siffatte differenze o escursioni, e definirne stabilmente la parte regolare del clima, si richiederanno, come io asseriva poc'anzi, le medie di quattro o cinque periodi di ventun anni consecutivi, ossia circa un secolo di osservazioni continuate.

Consideriamo ancora le a, b, c ; s, t, u ; h, i, k ; ma prese per esse dai riassunti mensili rispettivamente, non più le medie anuue semplici, o singole a ciascun ora fissata di osservazione; ma eziandio medie, o composte da tutte le ore di osservazione degli stessi giorno, mese ed anno; le quali già differiscon poco fra loro, e si raccolgono dal mio quadro 1.° Dicansi di queste novelle medie, orario-annue, per l'assunto periodo dei ventun anni

pel barometro

a_1 la minima della massima ;

a_2 la media delle massime

a_3 la massima delle massime

—

b_1 la minima delle minime

b_2 la media delle minime

b_3 la massima delle miuime

—

c_1 la minima delle medie

c_2 la media delle medie

c_3 la massima delle medie

pel termometro e per l'igrometro indicando similmente le analoghe quantità

con s_1, s_2, s_3 ; t_1, t_2, t_3 ; u_1, u_2, u_3 ;

h_1, h_2, h_3 ; i_1, i_2, i_3 ; k_1, k_2, k_3 .

Si ottiene così

$$a_2 - \frac{a_1+a_3}{2} = -0{,}1679 \text{ lin.}; \quad s_2 - \frac{s_1+s_3}{2} = +0^\circ, 2347;$$

$$b_2 - \frac{b_1+b_3}{2} = -0{,}1720; \quad t_2 - \frac{t_1+t_3}{2} = -0, 1312;$$

$$c_2 - \frac{c_1+c_3}{2} = -0{,}3341; \quad u_2 - \frac{u_1-u_3}{2} = -0, 1591;$$

$$h_2 - \frac{h_1+h_3}{2} = +1, 7508 ;$$

$$i_2 - \frac{i_1+i_3}{2} = -1, 3739 ;$$

$$k_2 - \frac{k_1+k_3}{2} = +2, 2413 ;$$

Dalla quale risultanza conseguono a vista di numeri le proprietà o relazioni approssimative

$$(3) \quad \begin{cases} c_2 - \dfrac{c_1+c_3}{2} = a_2 - \dfrac{a_1+a_3}{2} + b_2 - \dfrac{b_1+b_3}{2} ; \\ \dfrac{u_1+u_3}{2} - u_2 = s_2 - \dfrac{s_1+s_3}{2} + t_2 - \dfrac{t_1+t_3}{2} ; \\ \dfrac{k_1+k_3}{2} - k_2 = h_2 - \dfrac{h_1+h_3}{2} + 3\left(i_2 - \dfrac{i_1+i_3}{2}\right) . \end{cases}$$

Pertanto nella significazione delle formule (1) , (2) e (3), sebben empiricamente ottenute, abbiamo, se non tre leggi costanti e dimostrate, almeno tre fatti semplici e singolari, che debbono attribuirsi alla sola parte più regolare o meno variabile del nostro clima in riguardo alla pressione, temperatura e umidità dell'atmosfera, col qual triplice elemento collegasi poi anche quello dell'annua media della pioggia. Attesa la piccolezza dei trovati valori delle differenze $a_2 - \frac{a_1+a_3}{2}$, ecc., dai quali certamente è scomparsa per compensazione l'intensità perturbatrice della parte del clima irregolare e variabile, nondimeno in un altro periodo di ventun anni queste non potranno presentarsi alquanto variate dalle precedenti le analoghe relazioni e formole (3). In seguito di ciò tornerà curioso e interessante di conoscere ed esaminare li avvenuti cangiamenti che costituiranno a

così dire le formule differenziali di fatto, da doversi poscia convenientemente integrare per conchiudere la vera determinazione del clima regolare di Modena.

Altro elemento del clima è somministrato dalle orario-quotidiane annotazioni dello stato del cielo o dell'atmosfera nel dato luogo per serenità e limpidezza, o intorbidamento di nubi e nebbie. Dalla mia copia de'riassunti mensili durante il noto intervallo dei ventun'anni, altro quadro io ne formai per questo elemento, e denotando a ciascun anno e a ciascuna delle quattro ore di osservazion giornaliera

con l il numero dei giorni di atmosfera limpida o serena,
con m quello dei giorni di cielo mezzo fra sereno e nuvoloso,
con n quello dei giorni di cielo interamente nuvoloso
con p quello dei giorni di pioggia, neve e grandine comprese,

e per l'anno e l'ora in cui avvennero

con m_2 le massime di l, m, n, p distintamente l'una dall'altra,
con n_2 le minime delle stesse allo stesso modo,

e per l'intero periodo con l_2 le medie totali di l, m, n, p, ottenni

	mattina 9^h prossim.^te				sera 0^h prossim.				sera 3^h prossim.				sera 9^h prossim.			
	l	m	n	p	l	m	n	p	l	m	n	p	l	m	n	p
	g	g														
m_2	192	132	134	39	189	172	124	37	208	115	114	35	218	110	139	32
n_2	97	51	71	10	79	89	62	9	96	59	49	12	144	45	71	11
l_2	140, 81	92,95	105,48	24,62	121,79	128,58	91,84	20,32	130,38	86.71	86,76	24,43	163,00	69,93	107,43	22,71
e	95	81	63	29	110	83	62	28	112	56	65	23	74	65	68	21
d	+3, 7	—1,5	—3,0	—0,1	+12,2	+1,9	+1,2	+2,7	+21,6	+1,3	—5,3	—0,9	+18,8	+7,6	—1,9	—1,2

Nella 4ª fila orizzontale della tabella, coll'argomento e (escursione), ho posto le differenze delle due file 1ª. e 2ª., ossia degli estremi delle condizioni atmosferiche l, m, n, p, avendosi perciò $e = m_2 - n_2$ espressa in numero di giorni. E nella 5ª. fila orizzontale, coll'argomento d (differenza) ho scritto il risultamento o la combinazione delle prime tre file costituita dall' espressione o formola $\dots d = \frac{m_2 + n_2}{2} - l_2$. Quest'ultima, come si vede, si compone di assai tenui differenze in unità di giorni, con vario segno, meno che nelle ore di sera per la sola condizione l tali differenze riuscite alquanto maggiori e positive. Ma evvi altra singolare proprietà emergente dal mio quadro dei ventun anni, ed è che se formansi da questo le condizioni $\frac{l+n}{2}$, $m+p$ raccolte nelle medie totali l_2, si trova per le quattro ore diurne di osservazione

$$(4) \qquad \frac{l+n}{2} - (m+p) = +\overset{g}{5},58 \dots = -\overset{g}{1},44 \dots = -\overset{g}{2},57,\ \frac{l+n}{2} - (m+3p) = -\overset{g}{2},84\ ;$$

proprietà o relazione che, insieme all'ultima precedente, per le tenui quantità ottenute nel periodo considerato dei ventun anni, sembrerebbe un carattere di-

stintivo del nostro clima in riguardo all'aspetto apparente, sereno e tranquillo, fosco e procelloso del cielo. Tradotto in linguaggio fisico. essa indicherebbe che quì la semisomma dell'annuo numero de'giorni di cielo tutto sereno e tutto coperto eguaglia in media e prossimamente l'analoga somma de'giorni di cielo fra sereno e coperto e di pioggia.

Come per lo stato del cielo, così per la direzione osservata dei venti nei ventun anni io mi formai da ultimo altro prospetto o quadro generale, ordinandovi per ciascun anno il numero delle volte, in cui aveva spirato ciascuno dei quattro venti principali, e dei quattro intermedii, secondo le indicazioni di una banderuola molto elevata e mobilissima del R. Palazzo; e ciò alle ore 9 della mattina, alle 3 della sera, e per undici anni anche alle 6 della sera. Fatte a ciascun' ora e per l' intero periodo le somme di ogni colonna esprimente l' annuo numero delle volte dello spirare degli otto venti, e di tali somme prese le medie totali, dividendole pel rispettivo numero degli anni, ecco l'ordine in cui quelle e queste, dalle maggiori gradatamente alle minori, mi si offrono distribuite :

9h MATTINA			9h SERA			6h SERA		
venti	somme	medie	venti	somme	medie	venti	somme	medie
O	1751	83,4	N–O	1669	83,5	E	644	58,5
N–O	1620	77,1	E	1364	68 2	N–E	411	37,4
S–O	1170	55,7	O	1056	52,8	N–O	372	33,8
E	1148	54,7	N	932	46,6	N	329	29,9
N	677	32,2	N–E	882	44,1	S–E	307	27,9
N–E	663	31,6	S–O	726	36,3	O	241	21,9
S–E	358	17,0	S–E	466	23,3	S–O	181	16,5
S	241	11,5	S	150	7,5	S	77	7,0

E qui pure, prese dal mio quadro ad ogni colonna le massime e minime degli anni singoli, e confrontandole fra loro e nelle rispettive medie della tabella precedente ne trovo coll'ordine e successione della tabella stessa

massime – minime, o escursioni

22 | 49 | 61 | 77 | 26 | 27 | 85 | 80 || 15 | 49 | 55 | 61 | 28 | 73 | 83 | 58 || 9 | 29 | 29 | 29 | 37 | 44 | 35 | 21 ||

$\frac{\text{massime} + \text{minime}}{2}$ – medie, o differenze

(5) ... +2,5 | +2.8 | +1,3 | +8,1 | +1,0 | —0,1 | +2,4 | +1,3 || 0,0 | +0,3 | —5,5 | +4,7 | +5,7 | +10,4 | +5,0 | +9,7 ||
+1,5 | —1,0 | +3,6 | +2,6 | —1,4 | +5,6 | +3,7 | +1,0 ||

Le piccole differenze (5) indicano che nell'esaminato periodo dei ventun anni anche i venti spiegarono in media una tal quale regolarità che appartiene e caratterizza il nostro clima.

Di qualche interesse ora sarebbe investigare e conoscere i rapporti che passarono fra le misurate quantità della pioggia caduta e il succedersi o predominar contemporaneo dei venti. Ma di questa e di altre simili considerazioni io non entro in discorso, dacchè può consultarsene in riguardo alla pioggia la mia più distesa Memoria sopracitata. Ben è a lamentare piuttosto che presso di noi non siasi finora istituita nè praticata una serie di osservazioni elettriche e magnetiche, siccome con tanto studio e profitto per la meteorologia de'nostri giorni altrove si è promosso ed attuato, mancandone a questa Specola R. la necessaria suppellettile di squisiti mezzi e strumenti di misura , nè alcun Fisico essendosene fra noi occupato. In rapporto perciò all'elemento elettro-magnetico del clima, la discussione o disamina, che ne abbiam fatto della parte regolare per un sufficiente corso di anni, ce ne rimane incompleta e mancante. Io debbo inoltre avvertire, che nei registri delle quotidiane osservazioni alla Specola e nella mia copia di riassunti mensili pei ventun anni le altezze barometriche non sono corrette dalla capillarità e dalla dilatazion della scala; nè furon ridotte a comune temperatura e al livello del mare. Quindi esse non servirebbero, prive, come io le ho adoperate, di tali correzioni e riduzioni, alla comparativa discussione con altri climi e luoghi. Però non avendo riguardo se non all'assoluto riconoscimento del nostro clima più regolare, senza cioè relazione ad altri luoghi, e non trattandosi nè discutendosi per me se non di differenze di quantità medie a lungo intervallo di tempo, le anzidette correzioni e riduzioni del barometro mi erano pressocchè inutili alla espressione de'risultamenti ottenuti. Che se non era d'altronde il risparmiarmene una vana fatica, io avrei potuto correggere e ridurre le indicate medie mensili del barometro con quelle, che pure conservo in copia del termometro unito, le quali mi gioveranno per altre quistioni e ricerche, ben più ardue e delicate di quella del clima, e voglio dire per l'argomento delle variazioni periodiche o regolari delle condizioni atmosferiche di pressione, temperatura e umidità, e delle loro naturali cagioni.

Nulla, dopo il sin quì esposto , avendo io a soggiungere intorno alla parte più regolare del nostro clima, ben poco si è quello che posso dirne della parte irregolare, non essendosi tenuta una menzione abbastanza circostanziata di questa nei registri meteorologici della Specola modenese. Tuttavia , per quanto io ne serbo memoria di mia sperimentata conoscenza, posso affermare con sicurezza di verità che, nei ventun anni da me trascelti e considerati, niuna quì mancò delle straordinarie cagioni e influenze, parziali o generali, de'grandi fenomeni e moti atmosferici. Ardori estivi forti e prolungati , invernali rigori diuturni e talora con masse esorbitanti di neve caduta, un velo nebbioso, uniforme e permanente che in tempo di estate occupò e si distese per un vastissimo spazio di atmosfera e che permetteva di affissar all'occhio disarmato il disco del Sole e scorgere distintamente le maggiori macchie sino all' altezza meridiana (soggetto di quistioni per iscoprirne e ammetterne la sorgente più verosimile), quà e là nelle vicinanze di valli, pianure e monti piombati nembi con fulmini, uragani, e grandine devastatrice, fiumane, straripamenti, e inondazione di ampii terreni , fiere

burrasche di aria e di oceani più o men lontane da noi, e qui ben anco il gagliardissimo terremoto nella notte dal 12 al 13 Marzo del 1832. De'quali avvenimenti straordinarj a me non fu dato fuor di stenderne alcuni cenni e riflessi intorno al singolar inverno del 1845, raccogliendoli nella mia Memoria pubblicata fra quelle della Società Italiana delle Scienze (T. XXIII. P. Mat. pag. 330). Però io ripeto che, sebben grandi per estensione, violenza, svolgimento , progresso e conseguenze, i detti avvenimenti distribuiti e in parte compensandosi in un corso di anni abbastanza lungo per un dato luogo, non alterano molto sensibilmente il clima regolare di questo; e credo poi sempre la posizion topografica di Modena esser assai favorevole a questa ultima specie di determinazioni, come io annunziava fin dall'apertura e attuazione del R. Osservatorio (Atti ecc. pag. 344).

Mentre, cotanto ferve nel mondo scientifico di Europa e di America l'amore degli studii meteorologici, ed ora che in Italia specialmente una Commissione d'illustri Fisici e Astronomi per disposizioni di Autorità Governative è incaricata di promoverne l'avanzamento, proponendone un piano di ben combinate ricerche e operazioni a ben riconoscerne, com'è detto, il clima della Penisola, pare a me che ad alcuni riguardi non mancherà di ottenersene il successo più vantaggioso. Però sembrami inesatta l'espressione usata di raggiugnerne e assegnarne il proprio e vero clima, come se questo fosse omogeneo ed unico, di un' ampia regione, la quale, come ogni altra, ne'varii suoi luoghi ne offre cento fra loro diversi, ed anzi il clima dello stesso luogo a breve tempo vario e incostante. Se nondimeno intendasi il clima della maggior parte « *del bel paese, che Apennin parte e'l mar circonda e l'Alpe* » ove godesi mitezza di stagioni estreme , e un limpido Sole in un cielo il più sovente sereno, le poetiche frasi del privilegiato clima italico esprimono di fatto una realtà, ma salvo a rigor logico di scienza il fisico significato della parola clima, che richiede più sottili e precise distinzioni. Ad ogni modo frattanto , e in quest' ultimo senso di procedimento scientifico, nulla di meglio poteva idearsi per la felice riuscita delle novelle indagini sopra le condizioni meteorologiche di tutta Italia, quanto col prenderne a base, come si è adottato, la disamina e comparazione di tali condizioni, raccolte e risultanti dalle diligenti e a lungo continuate serie di osservazioni conservate nelle Specole italiane. Da una siffatta discussione comparativa, ed eseguita con esattezza possibile , ne conseguirà la più fondata determinazione del clima particolare di ciascun Osservatorio, in relazion eziandio di uno all' altro di essi; e questi punti fondamentali ben riconosciuti saranno come a dire i punti trigonometrici nelle geodetiche triangolazioni per collegarne e rappresentarne topograficamente tutte le parti di un vasto paese. E nel nostro caso ne uscirà una specie di topografia italico-meteorologica. Badisi contuttociò che nell'assegnare i climi di ogni Specola si dovrà sempre distinguerne la parte regolare o men variabile della irregolare o perturbata; e il metodo che dovrà impiegarsi a riconoscere la prima non potrà per avventura esser diverso dal sovraesposto e da me praticato (col solo introdurvi le riduzioni e correzioni barometriche necessarie per la comparabilità colle osservazioni contemporanee di altri luoghi), e consi-

stente nella discusrione dei riassunti mensili e annui per le quantità osservate, massime, minime e medie, nella formazione per queste di quadri o prospetti sinottici, estesi ciascuno ad un periodo comune di non pochi anni, e nel dedurre da essi quadri le medie finali, che si può ritener caratteristiche della detta parte, e ne costituiscon le leggi più costanti del clima. Di seguito poi, e congiungendovi altri luoghi della Penisola, intermedii ai fondamentali, e fra gli esterni principalmente quelli situati alle spiaggie marittime, potrà studiarsi la natura, l'origine, l'andamento, e l'effetto dei grandi moti atmosferici, costituenti la parte irregolare del clima, perturbandosene o essendone in qualunque modo alterata la parte regolare.

A dare un passo più innanzi dalla situazione, tuttora incerta e confusa, in che ritrovasi la scienza meteorologica, generalmente parlando, a me sembra indispensabile di separarne in ogni argomento e questione gli elementi diversi che vi s'intrecciano e a vicenda vi si modificano. Un qualunque fenomeno atmosferico infatti per un dato luogo, e la sua indicazione e misura somministrata con precisione da un relativo strumento, è il prodotto complessivo di tante, e sì svariate cagioni che le semplici leggi, onde ciascuna di queste agisce, e che trattasi di scoprire, si frammischiano e ricopronsi con quelle delle altre, sì che torna impossibile di averne un sicuro e chiaro conoscimento (nel quale consiste la vera scienza), senza un opportuno processo di separazione o eliminazione delle altre influenze e leggi a quelle collegate che si ricercano. Sotto questo aspetto la Meteorologia, sorella minore dell'Astronomia, e infante ancora mentre la maggiore ha toccato pressocchè l'apice dell'età perfetta, incontra di sua natura al proprio svolgimento e perfezionamento difficoltà e ostacoli assai più forti e ardui a superarsi che non fossero quelli dalla maggiore sorella sormontati felicemente. E a tale rispetto di paragone fra le due scienze la difficoltà principale e comune all'avanzamento loro per mio debole avviso essendo riposta nel poter disgiungere e considerar separatamente i moti e cangiamenti più semplici e costanti dagli effetti più complicati e variabili delle cagioni perturbatrici, nell'Astronomia per la vera cognizione del nostro sistema planetario, i primi o effetti semplici eran molto grandi al confronto de'secondi, o delle perturbazioni di quelli; perlocchè al paziente genio di Keplero non riuscì al tutto malagevole, per non dir impossibile, di trar fuori dalle copiose osservazioni di Ticone le sue famose leggi del moto elittico de'pianeti e delle comete intorno al Sole, e de'satelliti intorno ai rispettivi pianeti. Per contrario nella Meteorologia gli effetti più semplici e costanti d'ordinario sono quantità o valori piuttosto tenui, laddove grandi s'appalesano gli effetti composti e perturbati. Alla considerazione della quale diversità di condizione fra le due scienze sorelle io mi espressi altra volta, che ben tardi sorgerà per la Meteorologia il suo Keplero, e assai più tardi ancora il suo Newton.

È innegabile d'altra parte la Meteorologia de'nostri tempi e per gli sforzi e studi incessanti di sagaci cultori essersi arricchita di novelle, importanti e utilissime cognizioni, specialmente intorno alle grandi burrasche dell'atmosfera, me-

diante i nuovi sussidj delle elettro–magnetiche indicazioni, che le precorrono, e la rapidità delle telegrafiche comunicazioni che le annunziano; laonde non è al tutto da disperare che anche nelle cognizioni meno vaghe o più esatte, comecchè più intralciate e recondite, essa potrà col tempo e per simili continuati studi notevolmente progredire. Quindi forse un po'troppo severo, avvegnacchè ragionevole, giusto e coscienzioso fu il voto e giudizio, pronunziato pochi anni fa da da una dottissima Commissione dell'I. Accademia delle Scienze di Parigi, disapprovante al Governo il progetto di eriggere e dotare nell' Algeria una linea o catena di Specole meteorologiche, a imitazione di quella dell'Impero Russo, e al solo fine di ben conoscerne le condizioni di clima del paese, e giovarne, coll'igiene degli abitatori, l'agreste coltivazione e i prodotti del suolo. Il celebre Biot, Relatore, dovea ben intendersi della materia; ma nel rapportarne al Consesso accademico il discorso della Commissione , egli ebbe la franchezza di addurre la precipua ragione della coscienza, che non permetteva di nascondere al Governo interpellante, che il pubblico dispendio per l'attuazione dell'indicato progetto eccederebbe non poco i reali vantaggi da conseguirne, e ne recò in mezzo le prove.

Modena, 8 Luglio 1865.

G. B.

VII.

Variabilita' dei moti proprj di non poche stelle.

Il titolo e argomento di questa lettera volgesi ad un oggetto e ad un genere di fenomeni celesti che, mentre da una parte per l'apparente loro piccolezza sfuggono pressocchè impercettibili alla vista e alle più delicate misure, ed eziandio comparativamente fra osservazioni disgiunte da intervallo di molti anni , costituiscon per l'altra il più vasto campo della scienza, e nell'ordine de'più grandi corpi e movimenti, comprendono lo spazio indefinito del mondiale sistema, ossia del fisico Universo. Tale oggetto si è quello dei moti proprii delle stelle , intorno ai quali, scoperti e determinati la prima volta dal cel. Tobia Mayer, or'è poco più di un Secolo, e dipoi riconosciuti da Piazzi ed altri insigni Astronomi, vennero tuttavia fino agli ultimi tempi ammessi con qualche dubitazione per alcuni de'moderni maggiori Astronomi, come l'Oriani, e dal Piazzi medesimo, in riguardo almeno alla precisa e annua piccola quantità che ad essi attribuivasi. Ora però, dopo i moltiplicati e meglio approfonditi lavori e raffronti de'Cataloghi siderali, questa dubbiezza in proposito è svanita, e convengon tutti, sì nella realtà come nell'annua ottenuta quantità del moto proprio , specialmente delle stelle, e non son poche, in cui esso più notevole si appalesa, sia in Ascension retta che in declinazione : ma v'è di più. Conciossiacchè le indagini e scoperte più recenti del moto proprio siderale non arrestavansi a ben accertarne per una data epoca l'annuo valore, che nella sua tenuità sembrava doversi ritener inva-

riabile, ossia di moto rettilineo e uniforme nello spazio per alquanti secoli; ma considerato il principio della gravitazione universale, e dimostratane una verificazion effettiva nei movimenti orbiculari di alcune stelle binarie fra esse le due componenti, ne veniva di conseguenza che lo stesso principio meccanico applicandosi anche al moto proprio di ogni stella individua, questo dovrebbe col tempo apparirci variabile e curvilineo. Di che penetrato il sommo Bessel col suo perspicacissimo ingegno, riuscì a spiegarne una variazione da lui riconosciuta, per l'intervallo di 75 anni fra le osservazioni comparate, nei moti propri di Sirio e di Procione, variazione che venne in tal modo e a così dire teoricamente fermata. E ben a ragione questa brillante scoperta dell' Astronomo di Konisberga fu appellata da W. Struve *una delle più importanti che siano mai state fatte nell'Astronomia Stellare*, comecchè poi il medesimo Struve soggiungesse = *J'avoue qu'il me paraît permis de révoquer en doute l'effet d'un mouvement non uniforme attesté par l'observation, et d'attribuer la déviation apparente à l'imperfection des observations. En tout cas c'est un objet qui mérite la plus haute attention, et qui nous engage à augmenter au possible l'exactitude des observations, qui déterminent les lieux apparents des étoiles* =.

Per altro, un anno circa innanzi che avvenisse o fosse annunziata la detta scoperta di Bessel intorno la variabilità del moto proprio di Sirio e di Procione, occupato io alla rivista del Catalogo di Piazzi, di cui tenni discorso nella 3ª di queste mie Lettere, nell'esaminare che feci le mie posizioni medie delle 220 stelle fondamentali al confronto di quelle determinate da Bradley e da Piazzi, per parecchie di tali stelle rinvenni fra l'epoche o date dei tre Cataloghi variazioni o differenze del moto proprio, che di certo e notevolmente non potevano attribuirsi alle piccole incertezze delle osservazioni paragonate. All'occasione pertanto che nel Settembre del 1843 io mi recai al 5.° Congresso degli Scienziati Italiani , e avendone io allora già eseguita la disamina delle mie osservazioni al confronto di quelle di Bradley e di Piazzi per le prime 50 delle 220 stelle fondamentali anzidette, ne dedussi e ne lessi alla pubblica adunanza della Sezione di Fisica il 23 Settembre la conclusione, a prove di fatto, che alcune delle 50 stelle aveano presentato una sensibile variazione del loro annuo moto proprio nei due intervalli pressocchè uguali dall'una all'altra delle tre epoche di posizioni medie. E siccome il breve scritto che allora ne produssi mi è rimasto sempre inedito, avvegnacchè nel verbale dell'adunanza indicata (Atti del 5.° Congresso ecc. Lucca 1843, pag. 477) ne fosse pubblicata per sunto una notizia precisa e fedele, così ora non dispiacerà, spero , che io quì richiami e presenti lo scritto medesimo nella sua originale integrità, quale da me conservasi, a fine di riconoscerne il mio qualunque dritto di anteriorità nello scoprimento ben comprovato e di fatto della variabilità del moto proprio di non poche stelle individue o semplici. Nel che non vorrà darmisi colpa di orgoglio, dichiarando io di essere stato condotto naturalmente a tale scoperta dal caso di occuparmi ad una Rivista o Catalogo siderale, e non già, come il profondo Bessel da ingegnose considerazioni teoriche desunte dalla legge dell'universale gravitazione. Dopo ciò ecco l'antico mio scritto.

« Come saggio e primo risultamento dî un vasto e arduo lavoro, a cui mi sono accinto da qualche anno, e non cesso di attendervi, per la rinnovazione di un Catalogo di stelle, io godo l'onore di presentare a questo illustre adunamento dei Dotti italiani le posizioni medie di alcune stelle da me osservate e ridotte per epoca generale e comune al solstizio estivo dell' anno 1840. Tali stelle sono le prime cinquanta fra le 220 assunte per base del suo grande Catalogo dal celebre P. Piazzi, distinte in questo dalle altre col nome in lettere majuscole, e delle quali, a prodromo pure del suo intero Catalogo, il lodato Astronomo pubblicò in due Cataloghi parziali le posizioni medie che ne avea determinate pel principio dell'anno 1800, inserendole nel libro VI. dell'Opera intitolata dal R. Osservatorio di Palermo. Nel mio simile imprendimento avendo io giudicato di dover attenermi ai metodi fondamentali e alle eccellenti norme spiegate nella detta Opera da un Osservatore sì esperto qual fu il Piazzi, fra le altre cose non ho trascurato di riconoscere precisamente i luoghi medii delle mentovate 220 stelle, riferendole per le Ascensioni rette alle due di esse, Altair e Procione, le quali anche da me furono comparate direttamente col Sole nei quattro consecutivi equinozj, dall'Autunno del 1839 alla primavera inclusive dell'anno 1841. Fatto poi riflesso che le stelle medesime furon osservate pressocchè tutte dall'immortale scopritor dell'aberrazione, il Bradley, e ritrovansi nel suo Catalogo di 3222 stelle, calcolate e ridotte dall'ingegnoso e instancabile Bessel al principio dell'anno 1755 nell'Opera elaboratissima e insigne dell'ultimo, *Astronomiae Fundamenta*, ho creduto molto utile per la ricerca e determinazione dei moti proprii l'instituire un confronto dei luoghi medii di ogni stella nelle tre epoche, mia, del Piazzi e del Bradley, disgiunte da intervalli, di poco diseguali e considerabili sufficientemente. Da questo confronto, che io terminerò col calcolo delle riduzioni di tutte le 220 stelle, e spero di render pubblico in breve, comincian ad emergere conclusioni pel moto proprio delle stelle calcolate, che mi sembran di qualche sicurezza, importanza e novità per la scienza; onde io sarò ardito di produrne un cenno in prevenzione e sottoporlo al giudizio vostro, preclari Colleghi, nobili e cultissimi Uditori.

» Ma per fissare con opportuno criterio il grado e limite di confidenza che accordar si possa alle mie indagini e deduzioni, è di mestieri che io qui premetta una triplice avvertenza. E in primo luogo le Ascensioni rette di ciascuna stella essendo state agevolmente ottenute per differenza de'passaggi meridiani da quelle di Altair e di Procione, trovate ne'quattro equinozii dal paragone col Sole, ecco quali mi risultarono le Ascensioni rette e le Declinazioni dell'una e dell' altra stella fondamentale, ridotte all'istante del Solstizio estivo nel 1840, e prendendone i medii valori da due consecutivi equinozj :

Procione AR. media dagli equinozii

di Sett. 1839 e Marzo 1840 =	$7^h. 30^m. 57^s, 31$; decl. =	+ 5°. 37′. 43, 98
Marzo 1840 e Sett. 1840 =	57 , 11 . . , . =	43, 30
Sett. 1840 e Marzo 1841 =	56 , 96 . . . . =	43, 02
Medio totale di 82 osservazioni =	7. 30. 57, 12 . . . . =	+ 5. 37. 43, 44
Secondo Bessel, dall'effemeridi di Berlino e per la stessa epoca si ha	56, 86 . . . . =	40, 57
Differenza con Bessel B — b =	— 0 , 26 . . . . =	— 2, 87

Altair AR. media degli equinozii

di Sett. 1839 e Marzo 1840 =	$19^h. 43^m. 0^s, 33$; decl. =	+ 8°. 27′. 5″, 54
Marzo 1840 e Sett. 1840 =	0 , 40 . . . . =	7 , 11
Sett. 1840 e Marzo 1841 =	0 , 29 . . . . =	7 , 74
Medio totale di 90 osservazioni =	19. 43. 0 , 34 . . . . =	+ 8. 27 . 6 , 80
Secondo Bessel, dall'effemeridi di Berlino e per la stessa epoca si ha	42. 59, 95 . . . . =	5 , 78
Differenza con Bessel B — b =	— 0, 30 . . . . =	— 1 , 02

Le ascensioni rette delle stelle principali, dette di Maskeline, determinate da Bessel meritando il maggior credito di esattezza, sembra di qui che le mie abbian a ritenersi troppo forti dal vero di circa $0^s, 3$ in tempo, ovvero dai 4 ai 5″ in arco; nè sarebbe maraviglia che io avessi potuto commettere un tal errore, se persino il Maskeline trovò necessaria una correzione della stessa quantità alle proprie osservazioni , delle quali affermava il Piazzi esser inarrivabile quella diligente precisione, con cui furono istituite. Del pari alludendo il Piazzi alla somma perizia e sagacità degli Astronomi Mayer e Bradley, rifletteva nella sua dotta prefazione al Catalogo = *et revera forte dubitandum, an vel diligentissime horum astronomorum positiones a trium aut quatuor secundorum errore immunes sint. Novi enim ipse, et norunt Astronomi quantę sit difficultatis , vel repetitis quotcumque observationibus , optimisque et meliori qua licet diligentia adhibitis instrumentis, Ascensiones rectas adamussim definire.* = Nell'esame delle cagioni che produr possono un errore costante nei singoli valori dell'Ascension retta di Procione e di Altair derivata dal Sole io già ho concepito il sospetto sopra una di quelle, e non ommetterò di esplorarla con una serie di osservazioni a tal fine raccolte; ma frattanto io ritengo i valori miei precedenti dell'Ascensione retta delle due stelle; poichè mi sarà facile in seguito applicar la correzion comune alle altre stelle, se per avventura io la discopra, ed or mi basta avvertire che la corrispondente correzione degli annui moti proprii per l'intervallo fra le posizioni di Bradley, di Piazzi e le mie non può eccedere per l'indicata cagione la tenue quantità di 0″, 1 in arco.

» In secondo luogo fra le 220 stelle di Piazzi essendo comprese tutte le 36 stelle di Maskeliue, e le posizioni di queste dai moderni Astronomi, e specialmente dal Bessel, essendo state riconosciute con ogni accuratezza e perfezione di metodi, ho io pure in esse un mezzo di riscontro per avvisare al grado di precisione de'miei risultamenti. Prese pertanto dall'effemeridi di Berlino le posizioni medie delle prime dieci stelle determinate da Bessel, e riducendole alla mia epoca nel solstizio estivo del 1840, ottengo le seguenti differenze in Ascensione retta, e in declinazione fra i valori di Bessel ed i miei :

STELLE	Differ. di Ascen. retta B – b	Differ. di declin. B – b
α Andromeda	in arco . . . . + 1″, 86	in arco.... – 0″, 18
γ Pegaso	– 0 , 27	+ 1 , 20
α Cassiopea	– 1 , 68	+ 2 , 69
α Ariete	– 7 , 80	+ 3 , 01
α Balena	– 3 , 03	– 2 , 71
α Perseo	+ 0 , 31	+ 2 , 02
α Toro	– 1 , 94	+ 0 , 85
β Orione	– 2 , 12	– 0 , 81
β Toro	+ 0 , 60	– 1 , 51
α Orione	– 2 , 27	+ 0 , 36
Media, ommessa in AR α Ariete....	– 0 , 95	. . . . + 0 , 49

Queste differenze sono abbastanza piccole, dello stess'ordine di grandezza per le Ascensioni rette e per le declinazioni, e cangian di segno per entrambe, sì che il medio aritmetico delle une e delle altre riesce minore di 1″. Soltanto quella in AR. di α Ariete, che ho esclusa dal medio rispettivo , indica o un errore troppo forte nelle mie osservazioni, che è cosa più probabile, o un errore di stampa nell'effemeridi di Berlino, che pur potrebb'essere. Ma comunque ciò si spieghi, sembrami anche dall'attuale confronto delle posizioni delle dieci stelle dimostrato che, generalmente almeno, il limite degli errori da temersi e residui nei luoghi delle stelle da me osservati, non sorpassi la quantità stabilita poc' anzi di 4 ai 5″. Ed essendo poi certamente minore di assai l'errore probabile nelle posizioni ridotte di Bradley e di Piazzi, torna vero che l'incertezza negli annui moti proprii delle stelle per l'intervallo fra tali posizioni e rispetto alle mie, non deve sorpassar di molto il decimo di un secondo d'arco.

» A ridurre finalmente in terzo luogo le posizioni dall'una all'altra epoca dei Cataloghi summentovati, occorre di conoscere e calcolar coll'ultima precisione le rispettive quantità di precessione annua in Ascensione retta e in declinazione.

Per tale oggetto essenzialissimo in ciascuna delle epoche ho adoperato le costanti *m* ed *n* della precisione date da Bessel nelle sue *Tabulę Regiomontanę*, più recenti e da lui fondate sopra gli elementi più certi. Quindi nel ridurre le posizioni del Bradley all'epoca del Piazzi ho potuto verificare le quantità di moto proprio, ossia le differenze col Catalogo di Piazzi da Bessel assegnate nei *Fondamenti dell'Astronomia*, e ne ho trovato solamente una diversità costante, dai 1″, 5 in Ascensione retta, e di mezzo secondo in declinazione, proveniente da valori di *m* ed *n* antecedentemente da Bessel adottati. In questo calcolo di riduzione ho sempre avuto riguardo per l'annua precessione al coefficiente del quadrato del tempo, trascurati i termini delle potenze superiori, la quale approssimazione è sufficente per se all'esattezza sensibile del risultamento, finchè non si tratti, o dell'intervallo di più secoli, o di stelle al polo vicinissime. Rimane dunque che anche dal calcolo della precessione le quantità dei moti proprii da me ottenuti non debban credersi affette di errore soverchiamente, e quindi ammetter se ne possa le deduzioni o conseguenze che ne usciranno. Era però tanto più necessario che io premettessi queste avvertenze, quanto il soggetto dei movimenti proprii delle stelle è di sua natura molto malagevole e delicato, e savissimo essendo il consiglio del Piazzi nel libro VI. del R. Osservatorio di Palermo, che *convien andar molto cauti nell'investigazione di tali moti.*

» Ora gettando uno sguardo sul quadro delle cinquanta stelle che io presento, e nel quale sotto il simbolo (B, P) ho scritto le quantità calcolate di annuo moto proprio dedotte dalle differenze fra Bradley e Piazzi, e sotto l'altro simbolo (P, b) le analoghe quantità ottenute dal confronto delle posizioni di Piazzi colle mie, di leggieri si vedrà che per alcune stelle questi valori del moto proprio in Ascensione retta hanno cangiato notabilmente dall'uno all'altro intervallo. Tali cangiamenti che sono di 0″45 per β Cassiopea; di 0″, 43 per κ Cassiopea; di 0″, 30 per δ Andromeda; di 0″, 38 per μ Cassiopea; e giungon oltre a 0″, 5 per γ Cassiopea non sono certo da attribuirsi in massima parte ad errori probabili delle raffrontate osservazioni; poichè questi errori nell'intervallo corrispondente arriverebbero al di là di 20″; cosa di certo inamissibile. Convien dunque, mi sembra, che quei cangiamenti siano in realtà e di fatto avvenuti; dal che segue che il moto proprio delle nominate stelle non è uniforme, e forse nemmen rettilineo, apparendo esso variato sensibilmente nell'intervallo alcun poco minore di un secolo. Quindi pur non sussiste per tutte le stelle osservate, quanto il celebre I. Herschel nel suo trattato di Astronomia dice del moto proprio comune alle due componenti la 61 Cigno, che cioè questo moto per lo spazio di alcuni secoli può risguardarsi rettilineo ed uniforme. La quantità poi della variazione dell' annuo moto proprio di una stella costituendo nella teorica di tali moti il secondo coefficiente differenziale di essi, nella determinazione di quella sarebbesi avanzata di un passo la nostra conoscenza intorno a questi che finora, e solo da circa un secolo, è stata limitata al primo coefficiente differenziale, e val a dire alla parte di essi proporzionale al tempo. E invero, finchè non si confrontarono che le migliori osservazioni disgiunte di un mezzo secolo, come quelle di Bradley e di Piazzi,

era pur da conchiudere con Bessel circa i moti proprii delle stelle = *Theoria motuum propriorum nobis adhuc plane ignota est; et credo nos perdiu etiam non admodum multum in ea profecturos. Dubitari quidem non potest et Solem et Stellas fixas, ob mutuam attractionem; motum proprium habere; sed sunt ejusdem ordinis, et rebus ita se habentibus, ut nunc, cum primum tamen coefficientem differentialem cognitum habeamus, non jam fieri potest, ut utraque separetur.* = Ma le conclusioni di un confronto simile dopo altro mezzo secolo ne pare che debban essere alquanto diverse, e lascino sperare un progresso di cognizioni sopra i moti proprii delle stelle assai più rapido e sicuro di quello che la tenue loro quantità ha finora sembrato concedere.

» Alla prima ispezione intanto potrebbesi credere o sospettare, che i notati maggiori cambiamenti del moto proprio in Ascensione retta sieno particolari e crescano eziandio colla declinazione boreale delle stelle. Presto però ci persuaderemo ch'essi non seguon alcuna legge nè rapporto colla declinazione; ed infatti la $\varkappa$ Cassiopea, più vicina al polo che la γ, offre un cambiamento minore che questa, ed eguale pressocchè a quello che notasi nella μ della stessa costellazione, la quale dista dal polo più che la γ di alcuni gradi. E fra le stelle di declinazione australe rileviamo che la 18 Balena ebbe un cambiamento di annuo moto proprio nell'Ascension retta di $0''$, 36, ossia quasi come una delle precedenti stelle boreali; nel mentre che la 9 Balena, poco diversa in declinazione dalla 18 non ha presentato sensibile variazione al suo moto proprio equatoriale. Per lo contrario le due stelle φ 3 e φ 4 Balena, solo di un grado e mezzo lontane in declinazione dalle altre due nominate, ci offrono il caso di un moto proprio in Ascension retta comune ed egualmente cangiato per entrambe. Dunque il fenomeno delle variazioni del moto proprio che abbiam avvertito, appartiene individualmente alle stelle che ne sono affette, nè pare sottoposto sin quì ad alcuna relazione o dipendenza scambievole.

» Giacchè abbiam rimarcato qualche accidente particolare di moto proprio, tratteniamoci un istante a considerarne un altro ben singolare di due stelle, vicine fra loro in Ascension retta non meno che in declinazione. Sono queste la ε e la δ dell'Eridano, la prima delle qnali ha un moto considerabile, sfuggito non so come al P. Piazzi, in Ascension retta, e pressocchè nessun moto in declinazione; mentre per converso la seconda, immobile pressocchè in Ascension retta, muovesi in declinazione considerabilmente. Così le due stelle si scostan del continuo fra loro, una movendosi per un cateto, l'altra per l' altro del triangolo rettangolo, di cui è ipotenusa la retta che apparentemente le congiunge. Ciò sapevasi ponendo attenzione ai moti proprii calcolati da Bessel nel Catalogo di Bradley; ma oltrecchè ne abbiam ora una conferma, sappiamo di più che l'allontanamento delle due stelle per ciascun cateto è costante ossia uniforme. Per questo ed altri casi speciali di moto proprio il Catalogo delle 220 stelle di Piazzi è molto interessante, e comprende, oltre alle stelle semplici di moto più distinto, quelle doppie, come la 61 Cigno, il Castore, il β Cigno, nelle quali è anche più degno di attenzione il moto proprio, standone al giudizio di Bessel = *Phe-*

nomenon observatione dignissimum id mihi videtur, quod inter stellas motu proprio notabili prȩditas permultȩ extant stellȩ duplices, quȩ igitur systemata efficiunt attractione copulata =.

» Ma se la variazione rinvenuta del moto annuo in Ascensione retta per la sua sensibile quantità eccedente gli errori probabili delle osservazioni, sussiste ed è individuale nelle stelle che la manifestano, essa poi d'altra parte apparisce generale e comune alle nostre stelle rispetto alla direzione o al senso in cui avviene, e tanto in Ascensione retta che in declinazione, laonde per questa parte essa indicherebbe una fisica generale cagione da cui deriva. Rilevasi infatti dal nostro quadro che dal primo intervallo fra l'epoche di Bradley e di Piazzi al secondo fra quest'ultima e la mia, le variazioni distinte del moto annuo in Ascensione retta sono tutte accadute con aumento nel senso diretto, eccettuata la sola stella Tabit, ossia ι Orione, che presenta il caso contrario. Per tal modo alcune delle cinquanta stelle, che avean moto retrogrado, lo hanno acquistato diretto, e quindi per un tempo intermedio fra gli estremi dell'intervallo totale esse doveano apparir, come i pianeti, stazionarie. In riguardo alle declinazioni le valutabili variazioni del moto annuo, che nell'istituito confronto arrivarono presso chè a $0'', 2$ per le due stelle η e γ dell'Eridano, riusciron tutte col progresso del tempo in diminuzione, vale a dire scemando le declinazioni boreali e accrescendosi le australi. Qualunque ne possa esser la verosimil cagione, che io ricercherò a compiuto lavoro, a me basta di presente conoscerne l'effetto ripetuto, e in certa guisa costante, del senso eguale in cui avvennero le osservate variazioni del moto annuo delle stelle.

» Un altro vantaggio del calcolo e confronto di posizioni medie da me istituito è per non poche delle 220 stelle il vederne confermato, ossia non cangiate nei due intervalli semisecolari, le quantità del moto proprio, sopra le quali con saggia dubitazione gli Astronomi più riputati non si tenevan sin qui certi abbastanza. E tale conferma in molti casi vale poi anche di novella prova per gli altri casi delle stelle che palesarono una variazione considerabile di moto proprio, non essendovi ragione sufficiente della diversità di tai casi, quand'essa non sussista in natura. Per le stelle più australi, come α della Fenice e α dello Scultore, che non poteron essere osservate da Bradley, è questa la prima volta che ne vengon riconosciuti i moti proprii, che dal Piazzi pure non potevan essere investigati e furon ommessi, per la mancanza di antiche osservazioni comparabili. Delle due stelle australi testè nominate il moto proprio è riuscito piuttosto forte in Ascension retta del pari che in declinazione; ma per quest'ultimo debbo avvertire che la mia declinazione può essere incerta di alcuni secondi, comunque le singole osservazioni si accordino, dipendentemente dai dubbii della rifrazione a così piccole altezze; ed è per l'analogo motivo dei vapori dell'orizzonte, onde vien intorbidata la distinta vision degli oggetti, che io non ho dato la stima della grandezza per α della Fenice, e α dello Scultore, le quali non mi appajon mai più brillanti di una stella di quinta.

» Del rimanente che le indagini e determinazioni del moto proprio delle stelle

siano un soggetto astronomico di molta importanza è facil cosa il persuadersene = *Un sujet de recherches très interessantes dans l'histoire phisique des étoiles*, dice Herschel figlio, *c'est leur mouvement propre . . . . Jusqu'à présent*, egli aggiunge, *on connaît d'un manière trop imparfaite les grandeurs et les directions de ces mouvemens pour s'occuper de les rattacher à des lois* =. Però una cognizione più sicura e precisa di tai movimenti guidando allo scoprimento delle loro leggi, varrà un giorno a risolvere le più vaste questioni dell' Astronomia, quali sono ad esempio quella di un'*aberrazione solare* ingegnosamente immaginata e proposta dall'Astronomo Pond, l'altra di una *paralasse sistematica*, concepimento ardito e sublime di Herschel–padre, e infine quella di provar estesa ai confini dell'Universo la semplicissima e costante natura della Newtoniana gravitazione. Ma senza pur entrare in queste o somiglianti ardue speculazioni della Fisica celeste, a rilevar l'utilità delle ricerche su i moti proprii delle stelle e sui progressivi loro cambiamenti basta riflettere che niun Catalogo di stelle, dopo il non lungo intervallo di un secolo dall'epoca delle sue posizioni, conservar può la sua esattezza originale, nè può servire agli usi col rigor necessario, qualora in esso non siano ben definiti i detti moti e cambiamenti. Gli esempi da ultimo e le prove, che ne ho recato in questo breve mio scritto, dimostrano, se mal non avviso, non essere così remota e debole la speranza di un pieno e felice successo nell'indicato genere di ricerche, quanto lo darebbero a credere le seguenti parole del Piazzi = *Quamvis enim nec præsens Astronomiæ status, nec ætas nostra , nec fortasse longa sæculorum series ad hæc assequenda par esse queat, nihil tamen negligendum, nihil parvi faciendum: quo enim nobis progredi non licet , haud desperandum perventuros tandem seros nepotes nostros* =. Raggiunta or quasi da noi la metà del secol nostro, abbiamo già tre luoghi o posizioni dell'orbita di alcune stelle. Gli Astronomi del 1900, e nel corso del secolo vigesimo ricomponendo da fondamenti, come ad essi lo raccomandiamo, il picciol Catalogo delle 220 stelle , ne assegneranno il quarto ed altri luoghi per le stelle di moto proprio variabile; donde emergerà una cognizione rassicurata delle rispettive orbite siderali. Quanti siamo quì radunati, confidiamo di poter allora penetrare d'un colpo d'occhio istantaneo gli arcani più profondi e ammirabili della natura; e forse allora pur ci sarà grato di rammentare che la determinazione più esatta, comecchè lenta e faticosa, dei moti proprii delle stelle , e delle variazioni di alcuni , era da noi prenunciata agl'immediati nostri successori nella ben augurata circostanza del quinto Congresso Scientifico italiano in Lucca nell'autunno dell'anno 1843. »

Nel seguente anno 1844 compiuti da me per tutte le 220 stelle i calcoli delle riduzioni alle posizioni medie nell'epoca del solstizio estivo 1840, io ne stendeva la Memoria col titolo = *Posizioni medie delle* 220 *stelle* ecc. *e Considerazioni intorno ai loro moti proprii* =, che venne pubblicata nell'anno stesso fra quelle della Società Italiana delle Scienze (T. XXIII, Parte Matematica). Ivi nelle Considerazioni sui moti proprii e la variabilità loro io richiamava gli argomenti e raffermava le deduzioni, esposte nel precedente discorso letto a Lucca limitatatamente alle prime cinquanta stelle, non solo; ma estendevane le analoghe conclusioni a casi ed esempi di altre stelle, e trattenevami eziandio con riflessi e congetture intorno le più verosimili cagioni e influenze astronomiche atte a spiegar i fenomeni dei moti proprii siderali. Più tardi e nel 1846 avendo io calcolato in sufficiente numero le mie osservazioni delle stelle circompolari comprese nell'ora O del Catalogo di Piazzi, ne traeva una mia piccola Memoria o Nota, che vide nel detto anno la pubblica luce nel Giornale di Roma = *Raccolta di lettere e scritti intorno alla Fisica e alla Matematica* = (T. II. pag. 97 e 153), ove aggiunsi pure nuovi confronti fra le posizioni medie di 22 stelle (pag. 154) alle tre epoche di Bradley, di Piazzi e della mia fissata al principio del 1845 (*). Le variazioni dei moti proprii che me ne risultarono dal primo al secondo intervallo di tali epoche in Ascensione retta e in declinazione furono avvertite e ricordate, con troppo gentil encomio alla mia meschinità, dal ch. nostro Collega il professore Ab. Ignazio Calandrelli in nota al §. 26. della sua ben elaborata Memoria intorno ai moti proprii delle stelle (Atti de'Nuovi Lincei, Sessioue V. del 2 Aprile, 1857, pag. 328). E in proposito particolarmente della stella Cefeo 43 di Evelio egli facea rimarcare con verità, che una mia congettura o ipotesi intorno al moto proprio variabile di tale stella *altro non era, se non quella stessa di Bessel relativamente a Sirio*, la quale di certo allora (nel 1846) non mi era cognita per alcun pubblico annunzio che ne avessi veduto. Quanto però al concepire ed ammettere con Peters di Altona che, a somiglianza dei sistemi delle stelle binarie, Sirio e Procione (e lo stesso direbbesi delle mie stelle di moto notevolmente variabile) col moto loro variato e curvilineo si aggirino intorno ad un corpo, apparentemente vicino, di massa maggiore, e invisibile perchè oscuro, l'ipotesi mi sembra divenirne troppo ardita e strana, come quella che non conformasi cogli altri due casi, di fatto e finora unicamente dimostrati, di corpi oscuri e pianeti di un luminoso, e di Soli pianeti di altro Sole. Piuttosto perchè non potrebbero Sirio, Procione, la 43 Cefeo di Evelio e altre stelle sem-

(*) Veggasi anche nel T. IV degli Annali di Fisica e Matematica del ch. Tortolini un mio Articolo a pag. 320....326 e una mia Lettera al Compilatore a pag. 481—483.

plici aggirarsi intorno rispettivamente ad una fra le minori di luce , vicine e anche piccolissime che appajono insieme alla mobile e principale nel campo ottico del canocchiale ? Con Sirio ad esempio io notava nel campo oscuro e ad un tempo dodici piccole stelle, due di 10–11ª, tre di 11–12ª, quattro di 12ª, e tre telescopiche; e nel campo di Procione altre dodici, una di 6ª, una di 9–10ª, una di 10ª, tre di 11–12ª e tre telescopiche. Ma quali poi di tali stelle sarebbe la centrale, o il Sole rispettivo nel sistema binario? Ai futuri Astronomi il quesito.

Modena, 9 Ottobre 1865.

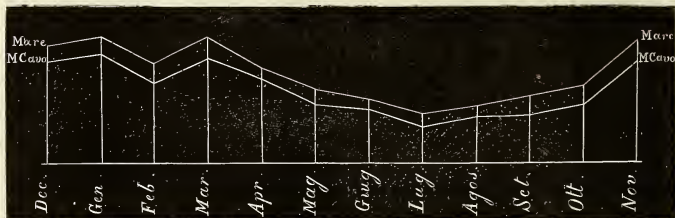
Giuseppe Bianchi.

Sulla escursione barometrica in rapporto coll'altezza locale sul livello marino, e colla direzione del vento – Ricerche di Giuseppe Serra Carpi *ingegnere.*

Le oscillazioni barometriche, siccome quelle che rappresentano gli squilibri dell'atmosfera che ne involge, hanno ognora richiamato la più seria considerazione dei fisici, a fine di indagare i rapporti che intercorrono fra le variazioni della pressione atmosferica, e quella dei vari altri elementi meteorologici. Nello studiare pertanto la serie di osservazioni meteoriche da me istituita sul Monte Cavo, ho potuto determinare quale sia la differenza che l' altezza sul livello marino produce nella escursione barometrica, e quali le variazioni che subisce nelle diverse stagioni, come ancora ho potuto scorgere qualche relazione fra l' epoca dei massimi e minimi barometrici nelle due stazioni che ho preso a considerare e la direzione del vento. Le quali ricerche mi permetto di presentare all'Accademia, siccome quelle che servono alla completa cognizione del nostro clima, ed alla conferma di importanti conclusioni da altri fisici dedotte su questo argomento.

Ed innanzi tutto giova avvertire che l'escursione media barometrica al mare è stata da me desunta dal Bullettino Meteorologico dell'Osservatorio del Collegio Romano ove trovansi con bell'ordine disposte le epoche ed i valori dei massimi e minimi barometrici, ridotti al livello del mare, non che l' escursioni medie mensili. Egli è pertanto istituendo paragone fra queste osservazioni e quelle eseguite al Monte Cavo, che ho trovato ciascun massimo o minimo avvenuto in Roma, avere *sempre* il suo corrispondente in quell'altura lo che dimostra chiaramente quale fiducia meriti la serie di osservazioni colà eseguita dai RR. PP. Passionisti, e come le comparazioni che ora sono per fare, siano basate sopra due stazioni che non ammettono eccezione per parte degli Osservatori. Con tali mezzi, dopo avere dedotto la escursione media barometrica di quella vetta, ho potuto ottenere l'andamento comparativo di questa escursione al livello marino ed a 960 metri sopra di esso come trovasi il monte Cavo. Il quale andamento si riferisce all' anno meteorologico 1865, e viene espresso graficamente nel seguente quadro ; il quale

rappresenta le escursioni medie barometriche in una scala doppia della naturale, per rendere più sensibili anche le piccole variazioni. Mi si potrebbe però dimandare ragione del perchè da me si prenda l'escursione barometrica dell'Osservatorio del Coll.° Romano, come se fosse al livello marino, mentre nell' encomiato Osservatorio il barometro è a 49^m su questo livello. A questa ragionevole dimanda rispondo, che l' errore che si commette è solamente di — 0^{mm}, 08. Errore che come ho reputato trascurabile in questo lavoro, così ho creduto di riportare, per uso di chi volesse raggiungere un' esattezza maggiore. Inoltre giova avvertire che non essendovi al monte Cavo un barometro grafico, così l' escursione venne dedotta da quei massimi e minimi che venivano somministrati dalle giornaliere osservazioni.

Quadro rappresentante le escursioni medie barometriche mensili in Roma e al M.e Cavo, nel 1865.

Da tali confronti da me istituiti posso dedurre le seguenti conseguenze.

1.° L'annua escursione media barometrica nella nostra latitudine per un altezza di 960^m sul livello marino decresce di 1^{mm}, 473. Quindi si potrebbe concludere che nelle nostre regioni e dentro certi limiti la oscillazione barometrica media diminuisce di un millimetro per ogni 650^m di altezza. Questa seconda conclusione sarebbe vera *assolutamente*, se l' escursione barometrica diminuisse ognora nello stesso rapporto coll'altezza in qualsiasi elevata regione, però ciò non essendo in natura, resta vera solo *condizionatamente*, cioè per quelle altezze che non molto si discostano da quella del monte Cavo, col quale furono istituiti i confronti ora accennati.

2.° I mesi che hanno presentato la massima differenza d'escursione nelle due stagioni sono stati il Febbraio ed il Settembre (1^{mm}, 88). Nel mese di Aprile la detta differenza è stata la minima (0^{mm}, 87); mentre nel mese di

Maggio la differenza di escursione media fra le due stagioni ha pressochè eguagliato la differenza media dell'anno, essendo stata 1^{mm}, 57.

3.° Prendendo la differenza media fra le escursioni nelle varie stagioni, si deduce che quella di Autunno è la massima (1^{mm}750), la minima è quella di Estate (1^{mm},036); e la differenza che più si avvicinava alla media annuale è in Primavera 1^{mm},456. La differenza poi di escursione media nell' Inverno è 1^{mm},653. I quali risultamenti mi sembra che potrebbero ancora servire di norma per chi volesse in seguito istituire somiglianti confronti, e non potesse ottenere su qualche altura un' intero anno di Osservazioni.

Ho procurato inoltre di confermare, per mezzo delle differenze barometriche, quale fosse l'altezza del monte Cavo sopra il livello marino; ed a tal fine ho adottato la formola che viene data da Laplace nella quale il dislivello viene espresso in metri da

$$D = 18395\,(1 + 0{,}002837\ \cos.2\varphi)\left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right)\log.\frac{H}{h}\,,$$

ed avendo in essa sostituito i valori numerici corrispondenti per ambedue le stazioni, ho ottenuto

$$D = 963.$$

Possiamo adunque ammettere che il monte Cavo sia a 960 metri circa sul livello marino; risultamento che non è lungi altresì da quello ottenuto dai chiarissimi prof.[ri] Ricchebach e Conti, che assegnarono a quella vetta l'altezza di 954 metri sul mare.

Da ultimo nell' indagare quali rapporti potevano esistere fra la simultaneità dei massimi e minimi barometrici e la direzione del vento, ben mi sono avveduto che essendo la stazione da me istituita ad una grande altezza su Roma, produceva una notevole complicazione su questo fenomeno. Pur nondimeno ecco quanto posso asserire su tale argomento.

Quando i massimi e minimi sono simultanei in ambedue le stazioni e la direzione del vento è comune, questa tende ad essere normale alla linea di congiunzione delle due stazioni stesse.

Allorquando poi i massimi e minimi non sono simultanei nelle due stazioni, ho dovuto osservare che il minimo o il massimo prima di propagarsi da una stazione all'altra impiega talvolta sei ed anche più ore; il quale tempo è certamente molto grande, per due stazioni poste a poche miglia di distanza fra loro. Da questo ritardo di propagazione che sì di frequente ho notato, mi

sembra poter trarre un importante argomento in favore dell'opinione di quei fisici , che ritengono essere i massimi e minimi barometrici generati da un moto vorticoso dell'atmosfera. Difatti questa ipotesi spiegherebbe benissimo, a preferenza d'ogn'altra, la grande tardanza dei massimi o minimi nel propagarsi da una all'altra stazione. Poichè non è difficile l'ammettere a tutto intero il vortice un lento ed irregolare movimento di traslazione, per il quale potrebbe trascorrere un lungo spazio di tempo, prima che il pozzo del vortice, nel caso del minimo, o uno dei suoi labbri, nel caso del massimo, facesse passaggio per ambedue le stazioni, sebbene a non molta distanza fra loro. Ne questa stessa ipotesi troverebbesi affatto in contradizione con quei casi nei quali il massimo o minimo avviene simultaneamente in ambedue le stazioni; giacchè il caso di due minimi contemporanei, troverebbe facile spiegazione nell'ammettere due vortici producenti un massimo intermedio e per conseguenza due minimi verso le due stazioni. Il caso del massimo simultaneo poi potrebbe riferirsi ad un vortice di maggiore ampiezza che avesse il centro o il minimo intermedio, e giungesse cogli orli a passare per le due stazioni.

Il non avere poi trovato quasi mai la direzione del vento secondo la linea congiungente le due stazioni, quando in esse avveniva la simultaneità di massima o minima pressione, mi rende ancora più favorevole per la riferita spiegazione. Però dessa sola non basterebbe a renderci conto di questo ritardo nel quale molta parte si ha certamente la differenza di altezza delle due stazioni.

Inoltre questa ipotesi se riesce lusinghiera per ispiegare questi fenomeni, ha nondimeno bisogno di maggiore appoggio e di più numerose esperienze, prima di essere positivamente accettata; e voglio sperare che più lunghe ed opportune ricerche, porteranno luce maggiore sulla spiegazione di queste vicende, che meritamente c' interessano, per l' importanza che esse hanno nella fisica dell'Atmosfera.

Ricerche analitiche, relative al geometrico luogo, tanto dei punti di tangenza fra uno, e due sistemi di parallele, con una serie di coniche omofocali; quanto dei punti d' intersecazione delle tangenti parallele di un sistema, colle rispettive di un altro. — *Memoria del prof.* P. Volpicelli (Continuazione) (*a*).

Parte terza, concernente le intersecazioni, formate da due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, con altre analoghe ricerche.

§ 20.

Nei precedenti paragrafi ci occupammo del geometrico luogo dei contatti, sia di uno, sia di due dati sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, e delle proprietà, che alla curva del medesimo luogo geometrico sono appartenenti. Nei paragrafi che sieguono ci occuperemo similmente del geometrico luogo *delle intersecazioni* , fra due sistemi di parallele , tangenti ad una serie di coniche omofocali; e troveremo consistere questo luogo geometrico anch'esso in una iperbola equilatera, che denomineremo *d' intersecazione*. Si passerà inoltre a considerare i luoghi geometrici dei *fuochi* delle iperbole equilatere, tanto di tangenza, quanto d' intersecazione, che corrispondono ai sistemi tutti possibili di parallele, tangenti alle date coniche omofocali. Da ultimo ricercheremo il geometrico luogo appartenente ai *vertici* delle stesse iperbole equilatere. Vedremo , in ambedue questi ultimi casi , che i luoghi geometrici stessi, consistono rispettivamente in una lemniscata.

Per generalità maggiore collochiamo il sistema delle coordinate in guisa, che uno dei due fuochi , comuni alle coniche della serie , sia la origine delle coordinate medesime; come già fu praticato (§ 1, 4.°) sul principio della presente memoria.

56.° Sappiamo (*b*) che l' equazione della tangente ad un punto (x, y) di qualsiasi curva, si esprime colla

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

ovvero mediante la

$$y' = \frac{dy}{dx}x' + y - \frac{dy}{dx}x, \tag{46}$$

in cui le x', y' rappresentano le coordinate *correnti* del sistema.

(*a*) Per quello che precede, v. questo vol. pag. 53.

(*b*) Volpicelli, Annotazioni al corso di matematica del Caraffa. vol. 3.°, pag. 164. Roma 1843

Per assegnare poi la equazione della tangente, che forma coll'asse delle ascisse un dato angolo α, basterà sosituire nella (46) tang.α in luogo del rapporto $\frac{dy}{dx}$; ed avremo la

(47) $$y' = x' \operatorname{tang}.\alpha + y - x \operatorname{tang}.\alpha .$$

Da questa equazione, per avere senza le coordinate x, y, quella che appartiene alla tangente indicata, dovremo eliminare le coordinate medesime, valendosi tanto della equazione della curva, cui la tangente appartiene, quanto della sua derivata

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}.\alpha .$$

57.° Nel caso della serie di coniche omofocali, già conosciamo (§ 1) che una qualunque delle coniche stesse, viene rappresentata dalla prima delle (8), cioè dalla

$$y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \sqrt{[a^2 - (x - c)^2]} ,$$

da cui, derivando, avremo la (11), cioè la

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}.\alpha = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \cdot \frac{c - x}{\sqrt{[a^2 - (c - x)^2]}} ;$$

in guisa che la equazione finale della tangente indicata, si otterrà, come ora fu detto, dalla eliminazione delle x, y dal sistema delle tre precedenti equazioni, cioè dalle

(48) $$\left\{ \begin{aligned} & y' = x' \operatorname{tang}.\alpha + y - x \operatorname{tang}.\alpha , \\ & y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \sqrt{[a^2 - (x - c)^2]} , \\ & \operatorname{tang}.\alpha = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \cdot \frac{c - x}{\sqrt{[a^2 - (x - c)^2]}} . \end{aligned} \right.$$

Risolvendo la terza delle (48) rispetto $x - c$, otterremo

$$a^2[a^2 - (x - c)^2] \operatorname{tang}.^2\alpha = (a^2 - c^2)(x - c)^2 ,$$

donde la

(49) $$x - c = \pm \frac{a^2 \operatorname{tang}.\alpha}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}} .$$

Sostituendo questo valore nella seconda delle (48), si avrà

$$y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \sqrt{\left(a^2 - \frac{a^4 \text{tang.}^2 \alpha}{\frac{a^2}{\cos.^2 \alpha} - c^2}\right)},$$

$$= \pm \sqrt{(a^2 - c^2)} \sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{\frac{a^2}{\cos.^2 \alpha} - c^2}\right)},$$

donde

$$(50) \qquad y = \pm \frac{a^2 - c^2}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2 \alpha} - c^2\right)}}.$$

58.° Per decidere in qual modo si debbono corrispondere fra loro i segni, che doppiamente precedono i secondi membri delle (49), (50), necessita *in primo luogo* riconoscere analiticamente, come viene misurato l'angolo α nelle ricerche di cui ci occupiamo. Per tanto, riguardo alla ellisse ed alla iperbola, pongasi $x_1 = x - c$, affinchè la origine delle coordinate stia nel centro di queste due coniche; perciò la seconda e terza delle (48), nelle quali si corrispondono i segni secondo l'ordine loro, perchè una è derivata dell'altra, diverranno come sieguono,

$$(51) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \sqrt{(a^2 - x_1^2)}\ , \\ \\ \text{tang.}\alpha = \mp \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \frac{x_1}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)}}\ ; \end{array} \right.$$

ed anche in queste i segni si corrisponderanno secondo l'ordine loro. Siccome poi nella ellisse abbiamo

$$a^2 - c^2 > o\ , \quad \text{ed } a^2 - x_1^2 > o\ ,$$

così avremo, per questa conica, le (51) reali sempre. Conseguentemente se nella ellisse abbiasi la

$$x_1 > o\ , \qquad \text{sarà per le (51),} \qquad \text{tang.}\alpha < \text{, ovvero } > o\ ,$$

vale a dire α sarà ottuso od acuto, secondo che prenderemo

$$y > \text{, ovvero } < o\ ;$$

cioè secondo che il punto $(x_1\ , y)$ si trovi nel primo, o nel quarto quadrante.

Inoltre, se nella medesima conica si ponga

$x_1 < o$, sarà per le (51), $\text{tang.}\alpha >$, ovvero $< o$,

vale a dire α sarà acuto od ottuso, secondo che abbiasi

$y >$, ovvero $< o$;

cioè secondo che il punto (x_1, y) si trovi nel secondo, o terzo quadrante.

59.° Le medesime conclusioni hanno luogo per la iperbola; infatti, poichè abbiamo da questa conica

$$a^2 - c^2 < o, \quad \text{ed} \quad a^2 - x_1^2 < o,$$

perciò le (51) si ridurranno alle

$$(51, bis) \quad \begin{cases} y = \mp \dfrac{\sqrt{(c^2 - a^2)}}{a} \sqrt{(x_1^2 - a^2)}, \\ \text{tang.}\alpha = \mp \dfrac{\sqrt{(c^2 - a^2)}}{a} \dfrac{x_1}{\sqrt{(x_1^2 - a^2)}}, \end{cases}$$

in cui debbono i segni corrispondersi coll'ordine loro, ed essere le radici reali. Per conseguenza se nella iperbola porremo

$x_1 > o$, sarà per le (51, *bis*), $\text{tang.}\alpha <$, ovvero $> o$,

vale a dire α sarà ottuso, od acuto, secondo che prenderemo

$y <$, ovvero $> o$;

cioè secondo che il punto (x_1, y) sia collocato nel primo, o nel quarto quadrante. Inoltre se nella medesima conica si ponga

$x_1 < o$, sarà per le (51, *bis*), $\text{tang.}\alpha >$, ovvero $< o$;

vale a dire α sarà acuto, od ottuso, secondo che prenderemo

$y <$, ovvero $> o$;

cioè secondo che il punto (x_1, y) si trovi nel secondo, o nel terzo quadrante.

60.° Da quanto abbiamo qui osservato, riguardo alla natura dell'angolo α, ed ai corrispondenti segni delle coordinate (x_1, y), relativi al punto cui si riferisce l' angolo medesimo ; è chiaro che questo viene misurato , nella presente analisi , con un arco , il quale da un punto qualunque della tangente, raggiunge l'asse delle ascisse, ruotando (fig. 1) nel senso da $+$OY a $+$OX, o viceversa ; però fissato uno qualsiasi di questi andamenti, dovrà sempre conservarsi.

61.° Passiamo *secondariamente* a riconoscere, dopo ciò, la corrispondenza reciproca dei segni nelle (49), (50), ridotte al centro, come origine delle coor-

dinate; cioè ridotte alle

$$(52)\quad \begin{cases} x_1 = \pm \dfrac{a^2 \tan g.\alpha}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}}\,, \\[2ex] y = \pm \dfrac{a^2 - c^2}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}}\,. \end{cases}$$

Riguardo alla ellisse, vediamo chiaramente, da quanto prende sul modo col quale deve misurarsi l'angolo α, che quando questo è ottuso, cioè quando sia $\tan g.\alpha < o$, i segni delle x_1, y debbono essere fra loro eguali; cioè debbono corrispondere ad un punto, collocato sia nel primo, sia nel terzo quadrante. Però se l'angolo α sia acuto, cioè se abbiasi $\tan g.\alpha > o$, i segni delle x_1, y debbono essere fra loro contrari; cioè debbono corrispondere ad un punto, collocato nel secondo, o quarto quadrante. Per tanto già osservammo, che nella ellisse abbiamo sempre

$$a^2 - c^2 > o\,,$$

e che quando sia

$$\tan g.\alpha < o\,,$$

debbono le x_1, y essere positive o negative ambedue; mentre quando abbiasi

$$\tan g.\alpha > o\,,$$

allora i segni delle stesse x_1, y, debbono essere fra loro contrari. Dunque chiaro apparisce, che dovranno i segni di una delle (52), per questa curva, rovesciarsi, e perciò ridursi alle

$$(53)\quad \begin{cases} x_1 = \mp \dfrac{a^2 \tan g.\alpha}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}}\,, \\[2ex] y = \pm \dfrac{a^2 - c^2}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}}\,. \end{cases}$$

In queste formule adunque si debbono i segni corrispondere coll'ordine loro; cioè al superiore dell'una corrisponderà il superiore dell'altra, e così per l'inferiore, affinchè le x_1, y appartengano ai due punti di tangenza, corrispondenti ad un valore di α.

62.° Riguardo alla iperbola, osservammo già che

$$a^2 - c^2 < 0 ,$$

ed inoltre che, quando abbiasi

$$\text{tang.}\alpha > 0 ,$$

le x_1, y debbono ambedue risultare o positive, o negative; mentre se abbiasi

$$\text{tang.}\alpha < 0 ,$$

debbono le stesse x_1, y avere segni contrari. Da ciò risulta, che le (53), appartengono altresì alla iperbola, nello stesso modo, rispetto ai segni, col quale appartengono alla ellisse. Eliminata dalle (53) la x_1, avremo le

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= c \mp \frac{a^2 \,\text{tang.}\alpha}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}} , \\ y &= \pm \frac{a^2 - c^2}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}} . \end{aligned} \right.$$

Perciò tanto nella ellisse, quanto nella iperbola, le coordinate x, y dei punti di tangenza, corrispondenti all'angolo α, saranno date dalle (54), che hanno l' origine nel fuoco, e nelle quali si dovranno i segni accoppiare secondo lo stess'ordine loro.

63.° Finalmente, riguardo alla parabola, riflettiamo in *primo* luogo, che non occorre, per assegnare la corrispondenza dei segni nella (54), conoscere i valori *determinati* delle x, y, già ottenuti (§ 17); e che il punto di tangenza nella medesima curva, dev'essere uno soltanto per lo stesso valore di α (50.°). In *secondo* luogo è da riflettere, che in questa curva, dev'essere $c = \infty$, ed $a = \infty$; perciò nel caso di

$$\text{tang.}\alpha > 0 ,$$

si dovrà prendere per x il segno $-$, cioè il superiore, affinchè il suo valore sia *finito:* quindi per y il $+$, cioè anche il superiore ; giacchè in questo caso, il punto si trova nel primo, o secondo quadrante, ove le *ordinate* sono tutte di segno positivo.

Avendosi poi

$$\text{tang.}\alpha < 0 ,$$

dovremo per la x prendere il segno $+$, cioè l' inferiore, a fine di averla

finita: quindi per la y dovremo prendere il —, cioè anche l' inferiore; giacchè in questo secondo caso, il punto si trova nel terzo, o quarto quadrante, ove le *ordinate* sono tutte di segno negativo.

Dopo quanto fu esposto dobbiamo concludere, che in qualunque delle tre coniche ora considerate, le x, y dei punti di tangenza, sono espresse dalle (54); in ognuna delle quali si debbono i segni prendere nell' ordine stesso, che ai medesimi appartiene: vale a dire o ambedue superiori, o ambedue inferiori.

64.° Sostituendo i valori delle (54) nella prima delle (48), avremo

$$y' = x' \operatorname{tang}.\alpha \pm \frac{a^2 - c^2}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}} - \left[c \mp \frac{a^2 \operatorname{tang}.\alpha}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}}\right] \operatorname{tang}.\alpha =$$

$$= (x' - c) \operatorname{tang}.\alpha \pm \frac{a^2 - c^2 + a^2 \operatorname{tang}.^2\alpha}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}} =$$

$$= (x' - c) \operatorname{tang}.\alpha \pm \frac{\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)}} ,$$

ovvero

$$(55) \qquad y' = (x' - c) \operatorname{tang}.\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{\cos.^2\alpha} - c^2\right)} .$$

Questa equazione, di cui le coordinate hanno l'origine in uno dei fuochi delle coniche, appartiene alla tangente, che forma coll'asse focale delle ascisse l'angolo α, per qualunque delle curve stesse. La quantità radicale, col doppio segno che la precede, fa conoscere che possono esistere, per *un valore* di α, due tangenti, od una, se y sia reale; o niuna, se y sia immaginaria, come fu osservato (§. 16, 45.°).

§. 21.

Dopo quanto precede, possiamo passare alla ricerca del luogo geometrico delle intersecazioni, fra tangenti che appartengono a *due* sistemi di parallele. Chiamando β l'angolo formato da quelle di un sistema, e γ l'angolo formato da quelle dell'altro, coll' asse focale delle ascisse; l' equazioni di queste tangenti,

si avranno dalla (55), e saranno le

$$(56)\quad \begin{cases} y' = (x' - c)\text{tang.}\beta \pm \sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos.^2\beta} - c^2\right)}\,, \\ y'' = (x'' - c)\text{tang.}\gamma \pm \sqrt{\left(\dfrac{a^2}{\cos.^2\gamma} - c^2\right)}\,; \end{cases}$$

nelle quali, come facilmente s' intende, i doppi segni della prima, non hanno veruna relazione con quelli della seconda.

65.° Ciò posto è chiaro, che il geometrico luogo delle intersecazioni, fra due qualunque tangenti ad una qualsiasi conica, presa nella serie delle omofocali, si troverà: 1.° considerando identiche le coordinate nelle (56), lo che si farà sopprimendo gli accenti nelle medesime : 2.° eliminando la variabile a da esse , analogamente a quanto si praticò nel (§ 27.°). La equazione risultante, rappresenterà il geometrico luogo dei punti d' intersecazione dei due sistemi , di parallele, ognuna tangente alle coniche omofocali della serie stessa.

Per effettuare questa eliminazione , avremo primieramente dalle (56), sopprimendo gli accenti, le

$$[y - (x - c)\text{tang.}\beta]^2 = \frac{a^2}{\cos.^2\beta} - c^2\,,$$

$$[y - (x - c)\text{tang.}\gamma]^2 = \frac{a^2}{\cos.^2\gamma} - c^2\,;$$

ovvero le

$$([y - (x - c)\text{tang.}\beta]^2 + c^2)\cos.^2\beta = a^2\,,$$

$$([y - (x - c)\text{tang.}\gamma]^2 + c^2)\cos.^2\gamma = a^2\,;$$

ed uguagliando fra loro questi due valori di a^2, si otterrà

$$([y - (x - c)\text{tang.}\beta]^2 + c^2)\cos.^2\beta = ([y - (x - c)\text{tang.}\gamma]^2 + c^2)\cos.^2\gamma\,,$$

quindi riducendo avremo

$$[y^2 + (x - c)^2\text{tang.}^2\beta - 2(x - c)y\text{tang.}\beta + c^2]\cos^2\beta =$$

$$= [y^2 + (x - c)^2\text{tang.}^2\gamma - 2\,(x - c)y\text{tang.}\gamma + c^2]\cos.^2\gamma\,,$$

ovvero

$$(\cos.^2\beta - \cos.^2\gamma)y^2 + (\text{sen.}^2\beta - \text{sen.}^2\gamma)(x - c)^2 + 2(\text{sen.}\gamma\cos.\gamma - \text{sen.}\beta\cos.\beta)(x - c)y$$

$$+ c^2(\cos.^2\beta - \cos.^2\gamma) = 0\,.$$

Ma dalla trigonometria (a) sappiamo dover essere

$$\cos.^2\beta - \cos.^2\gamma = - \text{sen}.(\beta + \gamma)\text{sen}.(\beta - \gamma)\ ,$$

$$\text{sen}.^2\beta - \text{sen}.^2\gamma = \text{sen}.(\beta + \gamma)\text{sen}.(\beta - \gamma)\ ,$$

$$2(\text{sen}.\gamma\cos.\gamma - \text{sen}.\beta\cos.\beta) = \text{sen}.2\gamma - \text{sen}.2\beta =$$

$$= 2\text{sen}.(\gamma - \beta)\cos.(\gamma + \beta) = - 2\text{sen}.(\beta - \gamma)\cos.(\beta + \gamma)\ ;$$

perciò, introducendo questi valori nell' ultima equazione, otterremo la

$$(x-c)^2\text{sen}.(\beta + \gamma) - y^2\text{sen}.(\beta + \gamma) - 2(x-c)y\cos.(\beta + \gamma) - c^2\text{sen}.(\beta + \gamma) = o\ ,$$

ovvero la

$$(57) \qquad (x - c)^2 - y^2 - 2(x - c)y\cot.(\beta + \gamma) - c^2 = o\ .$$

66.° Questa eguaglianza, che appartiene ad una curva, rappresenta il luogo geometrico dei punti d' intersecazione, fra due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali: perciò la chiameremo *curva d' intersecazione*; ed ordinandola per le sue variabili x, y, si ridurrà nella

$$(58) \qquad x^2 - y^2 - 2xy\cot.(\beta + \gamma) - 2cx + 2cy\cot.(\beta + \gamma) = o\ ;$$

Trasportando il sistema delle coordinate parallelamente a loro stesse, in guisa che la origine delle medesime, dal comune fuoco, si collochi nel comune centro delle coniche indicate; trasporto che non potrebbe applicarsi ad una serie di parabole, dovremo cangiare la x in $x + c$; quindi la (57) si ridurrà nella

$$(59) \qquad x^2 - y^2 - 2xy\cot.(\beta + \gamma) - c^2 = o\ ,$$

equazione che appartiene soltanto ad una serie sia di ellissi e iperbole, sia di una sola specie di queste coniche omofocali, esclusa sempre la parabola.

§. 22.

67.° Paragonando l'equazione della curva *d' intersecazione*, ossia la (57) colla (16); vediamo che cangiando in questa 2α in $\beta + \gamma$, si trasforma nella (57) stessa, e viceversa; perciò dobbiamo concludere, che anche la curva d'intersecazione, sarà una *iperbola equilatera*, la quale passa pei due fuochi comuni alle coniche della serie, non altramente chè *la curva di tangenza* (§ 3, teorema I).

(a) v. Lotteri, Lezioni d'introduzione al calcolo sublime; Pavia 1821, parte 1, p. 361.

In seguito, per maggior chiarezza, riterremo l' angolo α solo, quando si tratti della iperbola di tangenza, e continueremo a denotare con β, γ gli angoli dei due sistemi di tangenti parallele, quando si tratti della iperbola d'intersecazione. Dalla coincidenza della (16) colla (57) discende chiaro, che quelle proprietà le quali appartengono alla iperbola di tangenza, dovranno avere le analoghe nella iperbola d'intersecazione, cangiando senza più nella prima l'angolo α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Così, a modo di esempio, come per fare coincidere gli assintoti della iperbola di tangenza cogli assi coordinati, fa d' uopo (§ 5, 12.°) che questi ruotino attorno la origine, sino a formare un angolo $(xx') = \alpha$; analogamente, per ottenere la stessa coincidenza riguardo alla iperbola d'intersecazione, fa d'uopo una simile rotazione, sino a formare l'angolo

$$(xx') = \frac{\beta+\gamma}{2}. \tag{60}$$

Dunque una retta passante pel centro delle coniche omofocali, e formante coll'asse delle x un angolo $\frac{\beta+\gamma}{2}$, è assintoto della iperbola d' intersecazione (§ 5, 12.°). Siccome poi questa iperbola è ancora equilatera, così l'altro assintoto suo, formerà coll'asse medesimo l'angolo espresso da

$$\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\pi}{2}. \tag{61}$$

68.° La significazione geometrica dell' indicato cangiamento (67.°) di α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$, viene dichiarata dal seguente raziocinio. Se abbiansi due tangenti MN, PQ, (fig. 15), che rispettivamente formino coll' asse $\overline{X, -X}$ gli angoli β, γ, dei quali supponiamo essere il primo β maggiore del secondo γ, le medesime formeranno fra loro l' angolo $\beta - \gamma$; quindi la retta HK, che per essere un assintoto, forma coll' asse $\overline{X, -X}$ un angolo $\delta = \frac{\beta+\gamma}{2}$, dividerà in mezzo l' angolo $\beta - \gamma$, compreso fra le tangenti stesse: poichè abbiamo evidentemente

$$\delta = \frac{\beta+\gamma}{2} = \gamma + \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Quindi è chiaro, come anche risulta dalla (60), che si ottiene la direzione di un assintoto HK della iperbola d'intersecazione, dividendo in mezzo l'angolo $\beta-\gamma$, compreso fra i due sistemi di parallele tangenti alle coniche omofocali.

Riguardo all'altro assintoto RS, si rifletta che questo, essendo perpendicolare al primo, dovrà dividere pure in mezzo l'altro angolo POM, formato dalle medesime tangenti, e adiacente all' altro $\beta-\gamma$. Concludiamo adunque che si ottengono gli assintoti della iperbola d'intersecazione, guidando pel centro delle coniche omofocali due rette, ad angolo di 90.° fra loro, delle quali una divida in mezzo l'angolo $\beta-\gamma$, compreso fra *le direzioni* dei due sistemi di tangenti.

69.° La giustezza di questa conclusione, si può riconoscere ancora, immaginando che l'asse maggiore a delle coniche omofocali, cresca senza fine ; allora l'ellissi della serie di coniche, si trasformeranno in circoli (§ 9, 27.°) ; ma in tal caso è chiaro che il parallelogrammo,circoscritto alle ellissi dalle tangenti ad esse, del quale i vertici rappresentano le intersecazioni delle tangenti medesime, diviene un rombo; e le diagonali, sue debbonsi ad angolo retto intersecare nel centro, e debbono inoltre dividere per metà gli angoli del rombo indicato. Da ciò risulta che i vertici di questo rombo, infinitamente grande, si debbono trovare sopra due rette, le quali passando pel centro, dividono in mezzo gli angoli compresi fra le due date direzioni. Si rifletta inoltre, che le diagonali stesse, debbono finalmente confondersi cogli assintoti della iperbola equilatera d'intersecazione; poichè partendo esse dal centro, passano ciascuna pei vertici opposti, dei quattro, appartenenti al rombo infinitamente grande, i quali vertici si trovano sulla stessa iperbola equilatera. Dobbiamo quindi concludere nuovamente, che quelle rette , le quali , passando pel centro , dividono in mezzo l'angolo delle date due direzioni, rappresentano gli assintoti della iperbola d'intersecazione.

70.° Riassumendo quanto fu ora esposto, possiamo enunciare il seguente

Teorema XII. *Guidando a una serie di coniche omofocali, due sistemi di tangenti parallele fra loro, i punti d' intersecazione delle medesime, si troveranno sopra una iperbola equilatera; la quale, passando pei fuochi delle omofocali stesse, avrà gli assintoti che s'intersecheranno nel centro, e divideranno rispettivamente in mezzo gli angoli adiacenti, compresi fra le date due direzioni di quelle tangenti.*

Questo teorema viene dichiarato dalla (fig. 16), nella quale la serie delle coniche, aventi gli stessi fuochi a', b', viene rappresentata da una ellisse μ, τ, e dalle quattro iperbole

ABA'B', IKI'K', TZT'Z', PQP'Q'.

Le tangenti parallele fra loro dei due sistemi, sono: pel primo le

UE, *pa'*, *lc*, *p'a*, GH, G'H', *bq'*, *rh*, *b'q*, DL ,

ognuna delle quali forma l'angolo $pa'X = \beta$ coll'asse $\overline{X,-X}$: pel secondo le

EF , *a'q* , *ch*, *aq'*, *mn* , *bp'*, *rl*, *b'p*, DS ,

ognuna delle quali forma coll'asse medesimo l'angolo $lrX = \gamma$.

In quanto alla iperbola d' intersecazione, essa è, come si vede, rappresentata dalla

E *a' c a* M *m p' l p* D *b' r b* M' *n q' h q* ,

la quale ha per assintoti *uv*, e *u' v'*. È chiaro altresì,che guidando la retta *st* pel centro O, parallelamente alla direzione delle tangenti del primo sistema, l'assintoto *uv* divide in mezzo l' angolo *sOm* , compreso dalle direzioni dei due sistemi di tangenti, mentre l'altro assintoto *u'v'*, ad angolo retto col primo, divide parimente in mezzo l'altro angolo *mOt*, compreso dalle medesime direzioni, e adiacente al primo.

71.° Dopo quanto abbiamo esposto, potremo dichiarare ancor meglio, come siegue, la significazione geometrica dell'indicato(67.°)cangiamento, di α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Poichè innanzi tutto ricordiamo, essere allora due iperbole coincidenti fra loro, quando, avendo esse un punto comune, hanno ancora gli assintoti comuni. Ora in *primo* luogo viene stabilito dal teorema I, che guidando con qualunque direzione $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$, ad una serie di coniche omofocali, un sistema di tangenti parallele fra loro; la iperbola equilatera di tangenza, passando pei due fuochi, comuni alla serie stessa, possiede un assintoto parallelo alle tangenti medesime. In *secondo* luogo poi, sappiamo dal teorema XII, che guidando ad una serie di coniche omofocali, due sistemi di tangenti parallele, formanti rispettivamente gli angoli β , γ coll' asse delle ascisse; la iperbola equilatera d'intersecazione , passando *anch' essa* pei fuochi comuni , possiede un assintoto, che divide in mezzo l' angolo compreso fra le due direzioni β e γ dei due sistemi. Per tanto supponendo che le due serie di coniche omofocali, sieno in ambedue questi casi le medesime, apparisce chiaro, che allora la iperbola di tangenza del primo caso , coinciderà con quella d' intersecazione del secondo, quando i rispettivi assintoti di queste due iperbole equilatere , coincideranno

fra loro. Ma dai fatti ricordati ora, deve concludersi, che questi assintoti coincidono fra loro, quando quello bisettore dell' angolo compreso fra le due direzioni β, γ del secondo caso, coincide coll'assintoto del primo. Dunque se avrà luogo questa coincidenza, le indicate due iperbole coincideranno una coll'altra.

72.° Quindi possiamo, dal ragionamento che precede, argomentare il seguente

Teorema XIII. *Guidando ad una serie di coniche omofocali tre sistemi* P, Q, R, *di tangenti parallele fra loro, in guisa che la direzione di* P, *divida in mezzo l'angolo compreso fra* Q, *ed* R, *la iperbola di tangenza del sistema* P, *coinciderà colla iperbola d' intersecazione dei due sistemi* Q *ed* R.

L'angolo compreso fra le due direzioni Q, R, si può prendere tanto dall'apertura acuta , quanto dalla ottusa ; perciò date le direzioni di questi due sistemi, se ne potranno trovare sempre altri *due* diversi P, soddisfacenti al teorema XIII, perpendicolari fra loro. Ma, secondo il teorema I, e più esplicitamente secondo il teorema VI, questi due sistemi P, forniscono la medesima iperbola di tangenza; dunque il teorema XIII valerà sempre , sia pure acuto od ottuso, l'angolo compreso fra le due date direzioni P, Q, da dividere in mezzo.

73.° Per tanto il significato geometrico del cangiamento di α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$, cioè quello dell'eguaglianza

$$\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2},$$

consiste in questo che, prendendo un sistema di tangenti parallele, aventi ognuna la direzione

$$\frac{\beta+\gamma}{2},$$

avremo una iperbola di tangenza, corrispondente alla direzione medesima, ed un altra d' intersecazione, corrispondente a due sistemi di tangenti parallele, relativi rispettivamente alle due direzioni β, γ; ma queste due iperbole coincideranno fra loro: significato che si trova espresso nel precedente teorema, e graficamente dichiarato dalla (fig. 17).

In questa figura, per non complicarla molto, abbiamo limitato la serie delle coniche omofocali alle due sole ellissi, AB, A'B'. Nella medesima il primo sistema P, si compone delle tangenti parallele

$$cd,\ c'd',\ c''d'',\ c'''d''' ;$$

il secondo Q, delle

$$ef,\ e'f',\ e''f'',\ e'''f'''\ ;$$

ed il terzo R, delle

$$eg,\ e'e'',\ f'f'',\ f'''g'\ .$$

I vertici dei corrispondenti parallelogrammi, formati dai due sistemi Q, R, sono

$$f',\ f'',\ f''',\ e,\ e',\ e'',$$

mentre i punti di tangenza del sistema P, sono

$$h,\ h',\ h'',\ h'''.$$

Si vede per tanto che la iperbola equilatera $f'\ a'\ h''\ f''\ h'''\ f'''\ e''\ b'\ h'\ e'\ h\ e$, passa pei fuochi a',b', comuni alla serie di coniche, incontrando, come trovasi enunciato nel teorema XIII, tanto i nominati vertici dei sistemi Q, R, quanto i punti di tangenza del sistema P. Inoltre ognuno potrà verificare che i due sistemi Q, R comprendono col primo P angoli eguali ; cioè che la direzione $f'r$ di questo sistema P, divide in mezzo l'angolo $e'f'f''$, formato dalle direzioni degli altri due Q, R. Finalmente l'assintoto tt' della iperbola stessa, è parallelo al sistema P, come fu concluso nel teorema I.

Abbiamo già veduto (72.°), che l'angolo fra i due sistemi Q, R, si può prendere in due modi ; e che perciò dovranno esistere sempre due sistemi, ognuno P, soddisfacenti al teorema XIII. Uno di questi due sistemi, quello già considerato (73.°), risulta (fig. 17) delle parallele

$$cd\ ,\ c'd',\ c''d'',\ c'''d'''.$$

L'altro sistema poi, viene rappresentato dalle parallele

$$dd''',\ d'd'',\ c'c'',\ ce'''.$$

ed anche per questo sistema vale il teorema XIII, cioè che i punti di tangenza del secondo sistema P, giaciono essi pure sulla iperbola d'intersecazione dei sistemi Q, R. In fatti si osserva nella figura stessa, che questi punti

$$l\ ,\ l',\ l'',\ l''',$$

appartenenti al secondo sistema P, si trovano anch'essi nella medesima iperbola equilatera.

§. 23.

74.° Riprendendo la (59), che rappresenta la iperbola d' intersecazione, osserviamo come la medesima non è funzione degli angoli β, e γ, separatamente considerati; ma bensì è funzione della somma loro $\beta+\gamma$. Da ciò dobbiamo concludere, che tutte le coppie dei sistemi di tangenti parallele, pei quali sistemi la somma $\beta+\gamma$ è costante, debbono anche avere la medesima iperbola d' intersecazione. Volendo inoltre precisare il significato geometrico della costanza di questa somma $\beta+\gamma$, riflettiamo che l'angolo compreso fra un assintoto della iperbola d' intersecazione coll'asse delle x, deve (§ 22, 67.°) per ognuna delle indicate coppie di sistemi, essere lo stesso, ed espresso da

$$\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\beta'+\gamma'}{2}=\frac{\beta''+\gamma''}{2}=\ldots.$$

come sappiamo dalla (60).

75.° Inoltre, si conosce (teorema XII), che l'assintoto divide per metà, in ciascuno dei due sistemi di tangenti parallele, l'angolo compreso dalle direzioni dei medesimi; quindi apparisce ad evidenza, per la costanza della somma $\beta+\gamma$, che debbono riescire parallele fra loro tutte le rette, da cui viene diviso in mezzo l'angolo, formato dalle direzioni dei due sistemi: la direzione poi costante di queste rette, appunto è quella di un assintoto della iperbola d' intersecazione. Possiamo quindi stabilire il seguente

10°

Teorema XIV. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, tanti sistemi di tangenti parallele, in guisa che le rette, da cui vengono divisi per metà, gli angoli, formati dalle coppie dei sistemi stessi, riescano parallele fra loro; in tal caso i vertici degli angoli tutti, corrispondenti a queste coppie, si troveranno sulla medesima iperbola equilatera, ed un assintoto di questa, riescirà parallelo alla direzione comune delle indicate bisettrici.*

76.° Il teorema ora enunciato viene posto sott'occhio dalla stessa (fig. 17), nella quale sono disegnate due sole ellissi omofocali, per non complicarla di molto. In questa figura si veggono sei sistemi di tangenti parallele, combinati due per due, cosicchè la direzione tt', divida in mezzo ciascun angolo delle combinazioni stesse, dalle quali nascono tre sistemi di coppie; il primo formato dalle

$$(ef,\ f'''g'),\ (e'f',\ f'f''),\ (eg,\ f'''e''),\ (e'e'',\ e''f''),\ \ldots$$

il secondo dalle

$$(ki\,,\; ii''')\,,\; (k'i'\,,\; i'i'')\,,\; (kk'''\,,\; k'''i''')\,,\; (k'k''\,,\; k''i'')\,,\; \ldots$$

il terzo dalle

$$(nm\,,\; mm''')\,,\; (n'm'\,,\; m'm'')\,,\; (nn'''\,,\; n'''m''')\,,\; (n'n''\,,\; n''m'')\,,\; \ldots$$

come si enuncia nel teorema XIV. La iperbola

$$f'i\,m\,i'm'a'h''f''i''h'''f'''m''i'''m'''n\;k\,n'e\;h\;k'e'h'b'n''k''n'''k'''e''\;,$$

la quale passa pei fuochi comuni a', b' delle coniche, rappresenta la iperbola equilatera d' intersecazione, che appartiene ai tre indicati sistemi di coppie; ed un assintoto tt' di questa iperbola, è parallelo alla *direzione* rf', che divide in mezzo ciascuno degli angoli, compresi da qualunque delle tre coppie indicate; mentre la *direzione* nr', divide in mezzo ciascuno delli altri angoli, formati dalle coppie stesse.

§ 24.

Per giungere chiaramente ad un teorema, relativo a *due* sistemi di coppie, combinati due a due; cosicchè formino colle rispettive loro parallele tanti quadrilateri, premetteremo il seguente caso particolare del teorema XIV. Quando si tratti di soli quattro sistemi di tangenti, combinati per modo, che il primo AB, CD, (fig. 18) sia perpendicolare al terzo FG, EH; ed il secondo AD, BC, sia perpendicolare al quarto EF, GH: allora con facile ragionamento geometrico si vedrà, che le rette bisettrici degli angoli, formati rispettivamente dalle due coppie (AB, BC), (EF, FG), saranno evidentemente parallele fra loro. Ma il teorema XIV, richiede per condizione l'indicato parallelismo; perciò dobbiamo concludere, che i vertici *tutti* A, B, C, D, E, F, G, H, corrispondenti alle due coppie sopra espresse, giacciono sulla medesima iperbola equilatera, di cui due rami passano pei vertici C,G,D,H, ed altri due pei vertici F,B,E,A.

I quattro sistemi di parallele, ossia le otto rette che compongono i due parallelogrammi ABCD, FEHG, possono anche per modo combinarsi due a due, che formino li otto quadrilateri BIHM, FLDK, ENCQ, GPAR, NDPH, QBRF, IGKC, AMEL, ognuno con due angoli retti opposti; cioè pel primo nei vertici M, I; pel secondo nei vertici L, K; pel terzo nei vertici N, Q; pel quarto nei vertici R, P; pel quinto nei vertici N, P; pel sesto nei vertici Q, R; pel settimo nei vertici I, K; e finalmente per l'ottavo nei vertici M, L. Ora è chiaro che questi otto vertici, ognuno appartenente a due angoli retti adia-

centi, non si troveranno certamente nella iperbola equilatera del teorema XIV, sulla quale giacciono soltanto gli altri vertici A,B,C,D,E,F,G,H.

77.° Dopo ciò, potremo enunciare il seguente

Teorema XV. *Guidando tanti quadrilateri, ognuno con due angoli opposti retti, e coi lati rispettivamente paralleli, tangenti ad una serie di coniche omofocali; dovranno i soli vertici degli angoli obliqui, rimanere sopra un iperbola equilatera, passante pei due fuochi alle coniche comuni, ed avente un assintoto parallelo alla direzione delle bisettrici degli angoli obliqui.*

Questo teorema viene posto in chiaro dalle (fig. 9, e 10), la prima per una serie di ellissi, e la seconda per una serie d'iperbole, omofocali ambedue. Per completare questa dichiarazione, dobbiamo soltanto aggiungere a quanto fu detto al §. 12, che per avere gl' indicati quadrilateri, si debbono sempre due tangenti contigue, ma disegnate continue, combinare colle corrispondenti contigue ma disegnate punteggiate; prolungandole se occorra, onde ottenere i due vertici degli angoli retti per ogni quadrilatero. A riconoscere facilmente questi quadrilateri, si osservi che in ognuno dei medesimi, debbono i quattro lati, essere tangenti alla stessa conica omofocale. La iperbola d' intersecazione pel caso presente, viene rappresentata nella (fig. 9) dalla

$$u\,u''\,t'\,t'''\,a'\,u'''\,u'\,t^{v}\,t^{vii}\,t\,t''\,u^{vi}\,u^{iv}b't^{iv}t^{vi}u^{v}u^{vii},$$

e nella (fig. 10) dalla

$$t'\,t'''\,u\,u''\,u^{iv}\,t''\,u^{vi}\,t\,b'\,t^{vi}t^{iv}u^{vii}u^{v}u'''t^{v}u't^{vii}a'.$$

La figura 19 gioverà, per mettere in evidenza maggiormente il teorema XV, relativo ai quadrilateri. Nella figura medesima, per non complicarla troppo, disegnammo due sole iperbole omofocali, e lasciammo da parte l'ellissi; limitandoci ad un solo sistema di quadrilateri, coi lati rispettivamente paralleli fra loro, e ciascuno con due angoli opposti retti. Viene rappresentato il sistema stesso dai tre seguenti quadrilateri

$$a't'b't^{vi}, \quad l^{v}t''l't^{v}, \quad l'''t'''l''t^{iv},$$

che hanno gli angoli opposti retti rispettivamente nei vertici

$$a',\ b'; \quad l',\ l^{iv}; \quad l'',\ l'''.$$

Inoltre apparisce dalla figura stessa, che i soli vertici degli angoli obliqui, cioè i punti

$$t',\ t'',\ t''',\ t^{iv},\ t^{v},\ t^{vi},$$

trovansi nella iperbola d' intersecazione

$$a'\,t^{iv}\,t^{v}\,t^{vi}\,b'\,t'''\,t''t',$$

tranne quei due a', b', coincidenti coi fuochi delle coniche omofocali. Finalmente si vede che questa iperbola, passa pei fuochi a', b' delle coniche omofocali; e che le rette bisettrici degli angoli obliqui, appartenenti ai quadrilateri medesimi, sono parallele ad un assintoto rr' della stessa iperbola d' intersecazione, come apparisce riguardo alle due $t'z$, $t^{\text{VI}}z'$, bisettrici rispettivamente degli angoli t', e t^{VI}, obliquí l'uno e l'altro.

78.° Il teorema stesso può dimostrarsi anche in modo totalmente differente, da quello quì riportato. In fatti concludemmo (teorema IV), che due sistemi di parallele perpendicolari fra loro, e tangenti ad una serie di coniche omofocali, hanno la medesima iperbola di tangenza. In modo simile del tutto, possiamo ancora dimostrare, che la iperbola d'intersecazione, appartenente a due sistemi di parallele, tangenti alla serie stessa, coincide con quella propria di altri due sistemi di tangenti rispettivamente perpendicolari sui primi. Ed in fatti, avendo indicato con β, γ, gli angoli formati coll'asse delle ascisse, dai due primi sistemi di parallele tangenti; indicheremo con β_1, γ_1, gli angoli simili, per due secondi sistemi così fatti, ma rispettivamente perpendicolari ai stessi primi, ed avremo le

$$\beta_1 = \beta \pm \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_1 = \gamma \pm \frac{\pi}{2}.$$

Cangiando nella (57) gli angoli β, γ rispettivamente nei β_1, γ_1, otterremo per la curva d'intersecazione, che ai nominati secondi sistemi è relativa, l'eguaglianza

$$(x-c)^2 - y^2 - 2y(x-c)\cot.(\beta_1 + \gamma_1) - c^2 = 0\ ;$$

ma sappiamo essere

$$\cot.(\beta_1 + \gamma_1) = \cot.(\beta + \gamma \pm \pi) = \cot.(\beta + \gamma)\ ,$$

perciò l' equazione precedente si ridurrà nella

$$(x-c)^2 - y^2 - 2(x-c)y\cot.(\beta + \gamma) - c^2 = 0\ ,$$

la quale coincide colla (57). Dalla coincidenza ora dimostrata, risulta immediatamente il teorema XV.

§ 25.

79.° Trovati che sieno gli assintoti della iperbola d' intersecazione, conosceremo anche l'asse della medesima, dividendo in mezzo l'angolo assintotico; quindi ad ottenere la completa determinazione della iperbola stessa, non altro bisognerà, fuorchè la eccentricità sua. Per ottenerla, ci valeremo nuova-

mente della relazione fra la iperbola di tangenza, e quella d'intersecazione, già stabilita (§ 22, 67.°), cangiando in essa l'angolo α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$.

80.° Per tanto riprendiamo la (28), che potrebbe ridursi nella seguente forma più precisa

$$c' = c \sqrt[4]{(2.\text{sen}.2\alpha)^2} \; ;$$

poichè la primitiva sua forma

$$c' = c \sqrt{(2\text{sen}.2\alpha)} \; ,$$

sarebbe, rigorosamente parlando, applicabile soltanto al caso in cui fosse acuto l'angolo α. Riterremo però sempre la formula (28), intendendo che sotto il vincolo radicale, si debbano sostituire i soli valori numerici di sen.2α. Laonde avremo

$$c' = c \sqrt{[2\text{sen}.(\beta+\gamma)]} \; ,$$

ove c denota la eccentricità comune alla serie di coniche omofocali, mentre c' esprime quella propria della iperbola d'intersecazione.

81.° Quindi (fig. 20) facendo

$$ba = 2c \; , \; aOf = \beta \; , \; fOi = \gamma \; ,$$

e descrivendo dalla metà O di ab, come centro, un circolo di raggio c, se abbasseremo dal punto i una perpendicolare id sulla ba, otterremo evidentemente

$$id = c.\text{sen}.(\beta+\gamma) \; .$$

Facciasi ora $ha = id$, e guidando gh perpendicolare alla ba, troveremo il punto g, che congiunto con a, deve dare la cercata eccentricità ga. Ciò apparisce chiaro, se riflettasi essere

$$ag = \sqrt{(ab \, . \, ah)} = \sqrt{(ab \, . \, id)} = \sqrt{[2c.c.\text{sen}.(\beta+\gamma)]} \; .$$

§ 26.

Fu dimostrato (§ 7.°), che la iperbola di tangenza si riduce, in certi casi particolari, ad una o due rette; occupamoci ora di una simile ricerca per la iperbola d' intersecazione, riguardo alla quale ci gioverà molto la relazione (§ 22, 67.°) fra le due nominate iperbole. Vedremo che tutti quei risultamenti, già ottenuti nel (§ 7.°), per la iperbola di tangenza, avranno un significato analogo nella iperbola d' intersecazione, cangiando semplicemente α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$.

82.° Per un *primo* caso la iperbola di tangenza, diviene una retta, qualunque sieno i valori di β, e γ, purchè abbiasi $c = \infty$; poichè posto ciò, la (58) si riduce nella

$$y\cot.(\beta + \gamma) - x = o \; ,$$

ovvero nella

$$y = x \operatorname{tang}.(\beta + \gamma) \; ,$$

appartenente ad una retta, che passa per l'origine, cioè pel comune fuoco delle coniche, facendo coll'asse delle x un angolo $\beta + \gamma$. Ma $c = \infty$ appartiene alla parabola, come fu osservato (§. 1, 4.°); avremo dunque il seguente

Teorema XVI. *Guidando ad una serie di parabole omofocali, due sistemi di parallele ad esse tangenti; la iperbola d'intersecazione riducesi ad una retta, che passa pel comune fuoco, e che forma coll'asse delle ascisse un angolo, uguale alla somma degli angoli, che formano coll'asse medesimo i due nominati sistemi. Quindi l' angolo formato dalla retta d' intersecazione coll' asse delle parabole omofocali, sarà doppio* (n.° 25.°) *di quello formato dalla bisettrice dell'angolo dei due sistemi, coll'asse delle parabole stesse.*

Il teorema ora enunciato, viene posto in chiaro dalla (fig. 11), nella quale rappresenta b' il fuoco comune delle parabole; rappresenta poi HG, H'G', H''G'', . . . , il primo sistema di parallele; mentre GK, G'K', G''K'', . . . , ne rappresenta il secondo; ed Mb' la retta, luogo geometrico dei vertici G, G', G'', . . . , b'. Quindi è chiaro che la sola b'M, protratta infinitamente oltre il punto M, rappresenta quella parte della retta espressa dalla equazione precedente, che appartiene al geometrico luogo dei vertici, od intersecazioni.

83.° Per un *secondo* caso, vediamo quando sia possibile, che la iperbola d' intersecazione riducasi ad una, o due rette, indipendentemente dal valore di c. Ma prima di ogni altra cosa, formiamoci l'equazione della iperbola d' intersecazione, riferita agli assi della medesima; lo che otterremo, facendo nella (26) la trasformazione solita di α in $\frac{\beta + \gamma}{2}$, ed avremo l'equazione

$$x'^2 - y'^2 = c^2 \operatorname{sen}.(\beta + \gamma), \tag{62}$$

la quale suppone uno spostamento angolare (xx') del sistema coordinato, che si ottiene facendo nella (24), il solito cangiamento di α in $\frac{\beta + \gamma}{2}$; cosicchè abbiasi la

$$(xx') = \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\pi}{4} \, . \tag{63}$$

Per tanto la (62) si ridurrà nella seguente

$$(x'+y')(x'-y')-c^2\text{sen.}(\beta+\gamma)=0\ :$$

e si vede che, a decomporre questa equazione, in altre due del primo grado, si deve necessariamente avere

$$(64)\qquad c=0\,,\quad\text{ovvero}\quad \text{sen.}(\beta+\gamma)=0\ .$$

Per soddisfare a questa seconda condizione, facciamo

$$(65)\qquad \beta+\gamma=\pi\ ,$$

e la equazione della iperbola d'intersecazione, si riduce allora nelle

$$(66)\qquad x'+y'=0\ ,\quad x'-y'=0\ ,$$

mentre la (63) si trasforma nella

$$(67)\qquad (xx')=\frac{\pi}{4}\ .$$

Quindi apparisce chiaro, che le (66) rappresentano due rette, le quali s'intersecano perpendicolarmente nell' origine, facendo ciascuna un angolo di 45° coi nuovi assi coordinati; e che colla (62) sono esse riferite a questi nuovi assi, formanti essi pure angoli di 45° coi primitivi, come sappiamo dalla (67).

84.° Questo fatto riceve la sua spiegazione dal considerare, che la (65) richiede i due sistemi di tangenti, collocati simmetricamente rispetto gli assi coordinati iniziali, di cui quello delle x, coincide coll' asse focale delle coniche omofocali; quindi è chiaro che le due rette (66), coincidono cogli assi delle coniche omofocali. Da ciò concludiamo che *nel caso in cui quei due sistemi di tangenti, sieno disposti simmetricamente rispetto l'asse delle coniche omofocali, la iperbola d' intersecazione si riduce ai due assi delle coniche stesse.*

85.° La giustezza di questo enunciato si riconosce anche senz'analisi, riflettendo che la completa posizione simmetrica dei due sistemi di paralle tangenti, riguardo ai due assi delle coniche, rende impossibile che dai medesimi, la curva d'intersecazione si allontani.

86.° Per un *terzo* caso, considerando quello nel quale abbiamo $c=0$, cioè la prima delle (64); vedremo che per questa, la (62) riducesi alla

$$(x+y)(x-y)=0\ ,$$

appartenente a due rette, le quali s'incontrano perpendicolarmente nella origine

delle coordinate. Ma $c = o$ suppone che le coniche omofocali riducansi a tanti circoli concentrici; quindi apparisce, anche senza bisogno di verun calcolo, che in questo caso, la curva d'intersecazione deve ridursi a due rette.

87.° Per tanto, riassumendo, potremo concludere il seguente

Teorema XVII. *La iperbola d'intersecazione si riduce ad una retta, quando le coniche della serie divengano parabole omofocali; e a due rette perpendicolari fra loro, tanto allorchè i due sistemi di parallele tangenti sieno disposte simmetricamente rispetto gli assi delle coniche stesse, quanto allorchè le coniche omofocali divengano circoli concentrici.*

88.° Confrontando questi risultamenti, ottenuti per la iperbola d' intersecazione, con quelli del (§. 7) per la iperbola di tangenza, rileviamo che in ambedue queste curve, il primo e terzo risultamento si verificano ad un tempo in ognuna di esse, cioè per le medesime condizioni; mentre ciò non avviene pel secondo. Eziandio si vede che la iperbola, tanto di tangenza, quanto d' intersecazione, forniscono tre casi, nei quali ognuna di queste curve diviene una, o due rette.

§ 27.

89.° Siccome qualunque iperbola d'intersecazione, può considerarsi eziandio come iperbola di tangenza, e viceversa (§ 22, 67.°); così è chiaro, che le attuali ricerche, per quanto appartiene ai diversi modi nei quali ha luogo la riferita trasformazione in una retta, non potevano condurre a risultamenti nuovi. Ed in verità, dalla relazione sopra indicata, possono questi risultamenti con maggiore speditezza ottenersi come siegue. Per quanto al *primo* caso appartiene, sappiamo dal teorema III, che la iperbola di tangenza si trasforma, nel caso di una serie di parabole, in una retta. Quindi dobbiamo concludere, che anche la iperbola d' intersecazione, diviene per questo caso una retta. Riflettendo inoltre a quanto viene stabilito nel teorema XIII, dobbiamo altresì concludere, che questa retta si trova, dividendo per metà l'angolo compreso dalle due direzioni, relative ai due sistemi di parallele tangenti, e poscia guidando pel fuoco delle parabole omofocali una retta, che formi coll' asse delle medesime un angolo doppio, di quello formato dalla bisettrice coll'asse delle omofocali stesse, come già sappiamo dal teorema XVI.

90.° Inoltre quando si tratti, come *secondo* caso, di due sistemi Q, R di parallele tangenti, le quali sieno disposte simmetricamente rispetto gli assi delle coniche, caso rappresentato dalla (fig. 21), apparisce senz' altro

che la direzione bisettrice AB dell' angolo MAN, compreso fra le direzioni date dei due sistemi di parallele tangenti , NA , MA, si confonde cogli assi delle omofocali. Ma quando il sistema P di tangenti , sia parallelo ad un asse delle coniche omofocali , allora la curva di tangenza si confonde (§ 7, 19.°) cogli assi delle coniche stesse. Da ciò dobbiamo concludere, prendendo sempre in considerazione il teorema XIII , che la curva d' intersecazione si riduce agli assi delle coniche omofocali , allorchè i due sistemi Q , R di parallele tangenti, sieno disposti simmetricamente rispetto l'asse delle coniche indicate.

91.° Venendo finalmente al *terzo caso*, in cui la eccentricità delle coniche omofocali sia nulla, vale a dire quando esse riduconsi a circoli concentrici; è chiaro che potremo, anche al caso medesimo, applicare la relazione stabilita fra la iperbola di tangenza , e quella d' intersecazione. In fatti, allorchè sia dato un sistema P di parallele, tangenti ad una serie di circoli concentrici, sappiamo (§ 7 , 20.°) che la curva di tangenza si riduce a due rette , le quali s' intersecano perpendicolarmente nel centro. Quindi la curva d' intersecazione, appartenente ai due sistemi Q, R di parallele tangenti, che formano angoli eguali colla direzione del sistema P, deve anch' essa ridursi a quelle medesime rette. Per altro, che la curva d'intersecazione debba, in questo caso dei circoli concentrici, ridursi sempre alle due rette, rispettivamente bisettrici degli angoli formati dalle parallele dei due sistemi Q, R, apparisce chiaro dai soli elementi della geometria.

(*Continuerà*).

CORRISPONDENZE

L' Emo e Rmo sig. Cardinale Altieri, coll'onorevole suo dispaccio del 10 gennaio 1866, n.° 4261, approva la elezione del nuovo comitato, avvenuta nella tornata del 7 gennaio, 1866.

La Società filosofica americana, residente in Filadelfia, ringrazia mediante il suo segretario sig. T. P. Lesley, per avere ricevuto le nostre pubblicazioni.

Il sig. Emilio Treves, direttore dell'annuario scientifico industriale che si pubblica in Milano, chiede una copia dell' ultimo nostro programma pel premio Carpi.

Il sig. Barone W. Sartorius di Waltershausen di Gottinga, ringrazia per essere stato eletto corrispondente straniero linceo.

La istituzione Smitsoniana in Wasington, mediante il suo segretario generale sig. Giuseppe Henry, ringrazia per gli atti de' Nuovi Lincei da essa ricevuti, ed invia parecchie sue pubblicazioni.

La Società geologica di Vienna, col mezzo del suo segretario sig. W. Haidinger, ringrazia per avere ricevuto le nostre pubblicazioni.

Il sig. Renard, primo segretario della società imperiale dei Naturalisti di Mosca, spedisce in dono il suo Bullettino.

La R. Accademia delle scienze di Monaco, ringrazia per gli Atti de' Nuovi Lincei da essa ricevuti.

Per ordine di S. E. il sig. ministro delle finanze dell'impero delle Russie, l'Accademia nostra riceve un esemplare, degli Annali dell' osservatorio fisico centrale di Russia, pubblicati dall' amministrazione imperiale delle miniere, per l'anno 1862.

COMITATO SEGRETO

Il sig. prof. cav. Ponzi, lesse il rapporto della commissione, incaricata di riferire sul consuntivo accademico del 1865. Le conclusioni di questo rapporto furono, che l'amministrazione dell'accademia, si era trovata regolare del tutto. I soci ordinari presenti, fecero plauso a questa conclusione, approvandola con pieni voti segreti.

Dal comitato accademico fu proposta la terna seguente:

Signori { prof. Respighi, astronomo,
padre Guglielmotti, domenicano,
prof. Giorgi, ingegnere.

per eleggere fra essi un socio dei trenta ordinari dell' accademia. Il risultamento dello squittino segreto, fatto con voti bianchi e neri, essendo ventuno i votanti, fu quello che siegue:

	Voti	
	Bianchi	Neri
prof. Respighi	18	3,
padre Guglielmotti.	10	11,
prof. Giorgi	8	13.

Per conseguenza il sig. prof. Respighi, fu eletto uno dei trenta soci ordinari dell'accademia, salva l'approvazione sovrana.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

P. Volpicelli. — S. Proja. — V. cav. Diorio. — A. comm. Cialdi. — G. cav. Ponzi. — P. Sanguinetti. — S. Cadet. — B. Tortolini. — A. cav. Coppi. — D. Chelini.— P. A. Secchi.— M. cav. Azzarelli.— E. Rolli.— B. Boncompagni. — L. Jacobini. — B. cav. Viale — F. Nardi. — C. Sereni. — E. Fiorini. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo. — M. Massimo.

Pubblicato nel 20 di maggio del 1866.
P. V.

OPERE VENUTE IN DONO

Bullettino Meteorologico del R. OSSERVATORIO DI PALERMO. N.° 11 del 1865.

Memorie dell' I. R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE, ED ARTI. Vol. XII.° Parte I.ª del 1865.

Atti dell' ISTITUTO MEDESIMO – Tomo X° – Serie 3ª - Disp. 6-9 – 1864-1865.

*Atti dell'*ATENEO VENETO – Serie 2ª – Vol. II – Puntata 3.ª – Settembre 1865.

Prospetto dei lavori pubblicati dall' I. R. ISTITUTO VENETO *fino dalla sua fondazione, compilati dal prof.* GIUSTO BELLAVITIS *nell' Anno* 1863. Un fasc. in 8.°

Nota sulla misura delle azioni elettriche, del MEDESIMO. Venezia 1864. Un fasc. in 8.°

Settima rivista di Giornali, del MEDESIMO. Un fasc. in 8.°

Seguito della 7ma rivista di Giornali, del MEDESIMO. Idem.

Seguito ulteriore della 7ma rivista di Giornali, del MEDESIMO. Idem.

Sposizione del metodo delle equipollenze. Memoria del MEDESIMO. Modena, 1854 – Un fasc. in 4.°

*Rendiconto dell'*ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETA' REALE DI NAPOLI. Anno IV, fasc. 12 – dicembre 1865.

Le antichità dell' uomo. Discorso del prof. G. PONZI, *in* 8.° Roma 1866.

COPPI, *Annali d' Italia,* t. 13.° Roma 1865 in 8.°

Philosophical . . . *Transazioni filosofiche della R.* SOCIETA' DI LONDRA. – Anno 1864 – Vol. 154; parte 3ª – Vol. 155, Anno 1865, parte 1.ma

Proceedings . . . *Bullettini della R.* SOCIETA' SUDDETTA – Vol. XIII N.° 70 – Vol. XIV N.i 71-77.

Smithsonian . . . *Contribuzioni scientifiche Smitsoniane.* Vol. XIII 1864.

Annual . . . *Rapporto annuale dell'*ISTITUTO SMITSONIANO per gli Anni 1862 e 1863.

Smithsonian . . . *Collezioni Smitsoniane di miscellanee.* Vol. V.

Résultats . . . *Risultamenti delle Osservazioni meteorologiche fatte sotto la direzione dell'* ISTITUTO SMITSONIANO, per l' Anno 1854 al 1859 inclusive. Vol. II, parte 1.ma

Statistics . . . *Statistica del Commercio interno, ed estero degli Stati* UNITI pel 1863.

Transactions . . . *Transazioni della* SOCIETA' FILOSOFICA AMERICANA RESIDENTE

IN FILADELFIA PER L' AVANZAMENTO DELLE SCIENZE UTILI. Nuova Serie – parte 1.ma

Proceedings . . . *Bullettini della Societa' suddetta*. Vol. IX – N.i 69-72.

Catalogue . . . *Catalogo della Libreria della Societa' suddetta*. Parte 1.ma – Anno 1863.

Bulletin . . . *Bullettino del Museo di Zoologia comparativa* – Cambridge – America.

Annual . . . *Rapporto annuale del Museo suddetto*, per l'Anno 1863.

List . . . *Lista dei Soci della Societa' filosofica Americana residente in Filadelfia* per l'Anno 1865.

Bulletin . . . *Bullettino della Societa' Imperiale dei Naturaaisti di Mosca*. Anno 1865 – N.° 2.

Annales . . . *Annali dell' Osservatorio fisico centrale di Russia*, per l'Anno 1862 – N.i 1-2.

Bulletin . . . *Bullettino della Accademia imp. delle Scienze di S. Pietroburgo*. Tomo VII – N.i 3-6 – Tomo VIII N.i 1-6.

Mémoires . . . *Memorie della Imp. Accademia suddetta*. Tomo V – N.° 1 – Tomo VII – N.i 1-9 – Tomo VIII – N.i 1-16.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarium Iepsaliensis. Seriei Tertiae – Vol. V – fasciculus posterior.

Kongliga . . . *Publicazione della R. Accademia delle Scienze di Svezia* – Vol. V, fasc. 1mo 1863.

Meteorologiska . . . *Annali Meteorologici della R. Accademia suddetta*.

Jachrbruch . . . *Annuario dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna*, 1865 – fasc. XV.

Darlegung , . . *Esposizione del calcolo teorico delle perturbazioni nelle Tavole lunari, di P. A. Hansen*, 8 Lipsiae 1864.

Geodatische . . . *Ricerche geodetiche del medesimo*. Lipsia 1865.

Relationen . . . *Relazioni tanto fra le somme e le differenze finite, quanto fra gl' integrali ed i differenziali; del medesimo*. Lipsia, 1865.

Ofversigt . . . *Riassunto degli Atti della R. Accademia delle scienze di Stochkolm*. Tomo XXI, 1864.

Sitzungsberichte . . . *Atti della R. Accademia delle Scienze di Monaco* , 1865 Vol. I, fasc. 1-4 – Vol. II, fasc. 1-4.

Induction . . . *Induzione e deduzione di Giusto Liebig*. Monaco 1865.

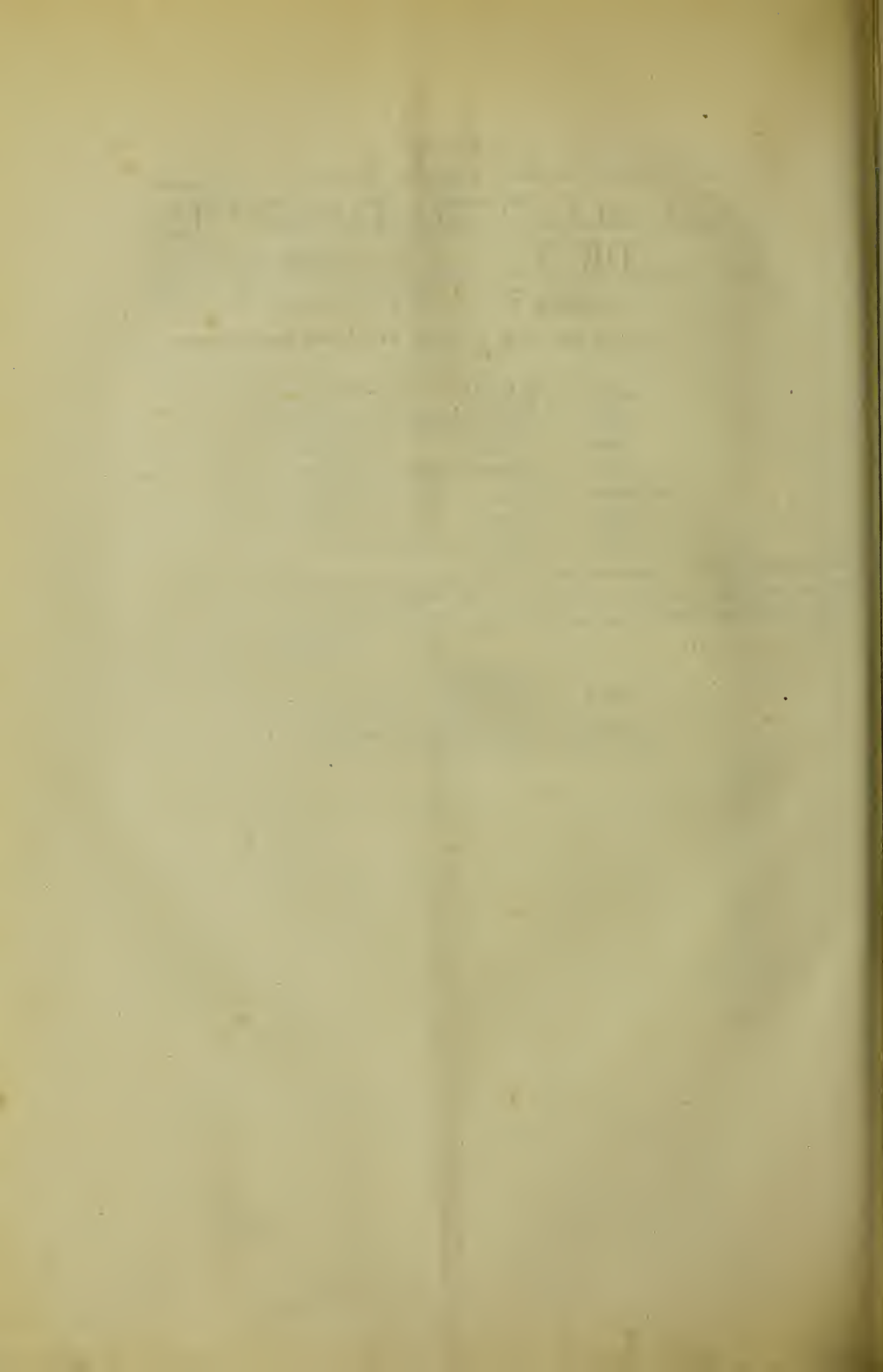
Entstehung . . . *Concetto e storia della specie, relativamente agli esseri naturali, del Dr.* CARLO NAGELI. Monaco 1865.

Comptes . . . *Conti resi dell'* ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI FRANCIA, in corrente.

Bulletino Meteorologico dell' OSSERVATORIO DEL COLLEGIO ROMANO in corrente.

				Errori	*Correzioni*
pag.	24,	lin. 18		Fraday	Faraday
»	27,	lin. 2	salendo	assissa	ascissa
»	28,	lin. 7		della	delle
»	29,	lin. 15	salendo	della	delle
»	30,	lin. 2	id.	ricorremo	ricorreremo
»	33,	lin. 5	id.	Nclla	Nella
»	»	lin. 11	id.	*eomune*	*comune*

La numerazione di ognuna delle pagine comprese fra la 108 e la 153 si trova per errore di stampa sempre accresciuta di 100.

IMPRIMATUR
Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR
Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae Vicesgerens.

ATTI
DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE IV^a DEL 4 MARZO 1866.

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

Sur la résolution des équations $x^2 - Ay^2 = \pm 1$. Lettre adressée à D. B. Boncompagni par Casimir Richaud, suivie d'une Note sur un problème indéterminé par le même.

Paris, le 18 février 1866.

Monsieur le Prince,

J'ai l'honneur de vous témoigner l' expression de ma vive reconnaissance au sujet des intéressantes publications, dont vous avez bien voulu me faire l'envoi.

En ce qui concerne l'équation

$$(x+1)^3 = x^3 + y^3 + z^3$$

les résultats auxquels je suis parvenu ont une portée insignifiante, ainsi que vous pourrez vous en convaincre, Monsieur le Prince, si vous voulez bien prendre la peine de lire la note ci incluse. Ces résultats sont inédits, et ils sont trop peu importants pour qu'il soit utile de les faire imprimer.

J'ai aussi quelques théorèmes inédits sur les solutions entières des équations $x^2 - Ay^2 = \pm 1$. Je prends la liberté de citer les suivants.

1. Si $A = a^2 \pm d$ (d étant un diviseur de $2a$ autre que l'unité) les valeurs *minima* des inconnues de l'équation $x^2 - (a^2 \pm d)y^2 = 1$ sont

$$y = \frac{2a}{d}, \quad x = \frac{2a^2}{d} \pm 1.$$

2. Lorsque le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue renferme un terme du milieu dans la partie symétrique de la période, (circonstance qui se présente chaque fois que l'équation $x^2 - Ay^2 = -1$ n'admet pas de solutions entières), la réduite $\frac{H}{H'}$ qui précède le quotient incomplet du milieu de la 1^e période, et le dénominateur μ de ce même quotient donnent les valeurs *minima* des inconnues de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$, savoir : $x = \frac{2H^2}{\mu} \pm 1$ et $y = \frac{2HH'}{\mu}$.

3. Lorsque, pour un nombre A entier non carré, on a déterminé la réduite $\frac{H}{H'}$ et le nombre μ définis (n.° 2), on est certain que le nombre quadratique

$$A_1 = \mu_1^2 H'^2 a^2 + 2\mu_1 H a + A$$

dans lequel a représente un entier quelconque positif ou négatif, et μ_1 le nombre μ débarrassé du facteur 2 , si cela est possible , sera tel que l' équation $x^2 - A_1 y^2 = 1$ aura pour valeurs *minima* de x et de y les nombres

$$x = \frac{2(\mu_1 H'^2 a + H)^2}{\mu} \pm 1 , \quad y = \frac{2(\mu_1 H'^2 a + H)H'}{\mu}$$

Application. Pour $A = 19$, $\frac{H}{H'} = \frac{13}{3}$ $\mu = 2$ et $\mu_1 = 1$.

Par suite $A_1 = 9a^2 + 26a + 19$; $x = (9a + 13)^2 \pm 1$, $y = 3(9a + 13)$

pour $a =$	0 ,	1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	7 ,	8 ,	9	. . .	− 3,	− 4
on a $A_1 =$	19,	54,	107,	178,	267,	374,	499,	642,	803,	982	. . .	22	59
$x =$	170,	485,	962,	1601,	2402,	3365,	4490,	5777,	7226,	8837	. . .	197	530
$y =$	39,	66,	93,	120,	147,	174,	201,	228,	255,	282	. . .	42	69

4. L'équation $x^2 - [\{2(a^2 + a)b + 2a + 1)\}^2 + \{(2a + 1)b + 2\}^2] y^2 = -1$ a pour solution *minima* en nombres entiers

$$x = \{(a^2 + (a + 1)^2\}^2 b + 2(2a + 1)(a^2 + a + 1) , \quad y = a^2 + (a + 1)^2 .$$

En particulier pour $b = 0$, l'équation $x^2 - \{(2a + 1)^2 + 4\} y^2 = -1$ a pour solution *minima* $x = 2(2a + 1)(a^2 + a + 1)$, $y = 2a^2 + 2a + 1$.

5. Les solutions *minima* de l'équation $x^2 - \{(2a + 1)^2 - 4\} y^2 = +1$ sont

$$x = 2(a + 1)^2 (2a - 1) + 1 , \quad y = 2a(a + 1).$$

En vertu du théorème 3 on déduirait de ces formules un nombre quadratique

$$A_1 = \{(2a - 1)ab + 2a + 1\}^2 - 2(2a - 1)b - 4.$$

Les valeurs *minima* de l'équation $x^2 - A_1 y^2 = 1$ seraient d'ailleurs

$$x = 2(2a - 1)\{a^2 b + a + 1\}^2 + 1 , \quad y = 2a(a^2 b + a + 1).$$

6. Les valeurs entières *minima* des inconnues de l'équation

$$x^2 - \{(2^n a + 2^{n-1})^2 \pm 2^{n+1}\} y^2 = 1$$

sont

$$x = 2\{2^{n-2}(2a + 1)^2 \pm 1\}^2 - 1 , \quad y = \{2^{n-2}(2a + 1)^2 \pm 1\}(2a + 1).$$

Les signes supérieurs marchent ensemble, ainsi que les signes inférieurs; on suppose de plus que la valeur *minimum* de n est égale à 2.

7. L'équation $x^2 - Ay^2 = 1$ a pour valeurs *minima* de x et de y les expressions suivantes correspondant à une série de valeurs de A

$A=(9a+3)^2+9$; $x=18(6a^2+4a+1)^2-1$; $y=4(6a^2+4a+1)(3a+1)$

$A=(9a+6)^2+9$; $x=2\{2(3a+2)^2+1\}-1$; $y=4(6a^2+8a+3)(3a+2)$

$A=(9a+3)^2-9$; $x=(6a+1)^2(3a+2)-1$; $y=(6a+1)(2a+1)$

$A=(9a+6)^2-9$; $x=(6a+5)^2(3a+1)+1$; $y=(6a+5)(2a+1)$

$A=(25a+5)^2-25$; $x=(100a^2+30a+1)^2(5a+2)-1$; $y=(20a^2+10a+1)(100a^2+30a+1)$

$A=(25a+10)^2-25$; $x=(10a+3)^2(5a+3)-1$; $y=(2a+1)(10a+3)$

$A=(25a+15)^2-25$, $x=(10a+7)^2(5a+2)+1$; $y=(2a+1)(10a+7)$

$A=(25a+20)^2-25$; $x=(100a^2+170a+71)^2(5a+3)+1$; $y=(20a^2+30a+11)(100a^2+170a+71)$

$A=(49a+7)^2+49$; $x=98(7a+1)^2(28a^2+8a+1)^2+1$; $y=2(7a+1)(28a^2+8a+1)(196a^2+56a+5)$

. . . .

$A=(9a+3)^2+18$; $x=(3a+1)^2(18a^2+12a+5)^2+1$; $y=(3a+1)(18a^2+12a+5)(6a^2+4a+1)$

. . . .

$A=(8a\pm2)^2+16$; $x=8(4a\pm1)^2(4a^2\pm2a+1)^2+1$; $y=2(4a\pm1)(4a^2\pm2a+1)(8a^2\pm4a+1)$

$A=(16a\pm4)^2+32$; $x=2\{(4a\pm1)^2+1\}^2-1$; $y=(4a\pm1)(8a^2\pm4a+1)$

$A=(8a\pm2)^2-16$; $x=2(2a\pm1)^2(4a\mp1)\pm1$; $y=2a(2a\pm1)$

$A=\{m(4a\pm2)\}^2+8m$; $x=2m(2a\pm1)^2\{m(2a\pm1)^2+2\}+1$; $y=(2a\pm1)\{m(2a\pm1)^2+1\}$

. . . . , ...

. . . .

Ces formules sont données comme types de celles qu'on peut obtenir par la même voie. Le procédé indiqué (n°. 3) permettrait de transformer chacune d'elles en une autre contenant deux ou trois nombres indéterminés, suivant le cas.

8. L'équation $x^2-Ay^2=-1$ a pour solutions *minima* de x et de y les expressions suivantes correspondant à une série de valeurs de A.

$A=(25a+5)^2+25$; $x=(5a+1)(100a^2+40a+7)$; $y=20a^2+8a+1=(2a)^2+(4a+1)^2$

$$A=(25a+10)^2+25\begin{cases}x=5(2a+1)^2\{25(5a+2)(2a+1)^2+2(5a+3)\}+2(20a^2+15a+3)(1000a^3+1150a^2+470a+67)\\ y=\{2(20a^2+15a+3)\}^2+25(2\alpha+1)^4\end{cases}$$

$$A=(25a+15)^2+25\begin{cases}x=5(2a+1)^2\{25(5a+3)(2a+1)^2+2(5a+2)\}+2(20a^2+25a+8)\{10(5a+3)(20a^2+25a+8)+20a+13\}\\ y=25(2a+1)^4+4(20a^2+25a+8)^2\end{cases}$$

$A=(25a+20)^2+25$; $x=5(5a+4)\{(2a+2)^2+(4a+3)^2\}+2(5a+4)$; $y=(4a+3)^2+(2a+2)^2$

$A=(169a+13)^2+169$; $y=(4056a^3+832a^2+68a+2)^2+(2704a^3+780a^2+80a+3)^2$

. . . .

. . . .

9. Si $x=H$, $y=H'$ vérifient l'équation $x^2-Ay^2=B$, les nombres $y=H'$, $x=aH'^2+H$ vérifieront l'équation $x^2-A_1y^2=B$, dans laquelle le déterminant $A_1=H'^2a^2+2Ha+A$.

Application. Si l'équation $x^2 - Ay^2 = -1$ admet des solutions entières, les deux réduites consécutives $\frac{G}{G'}$, $\frac{H}{H'}$, dont la première correspond au dernier quotient incomplet de la 1e. partie de la symétrie de la période de ces quotients, fournissent immédiatament les valeurs *minima* de x et de y de l'équation considérée, savoir :

$$y = G'^2 + H'^2 \; ; \qquad x = GG' + HH'.$$

Cela étant, l'equation $x^2 - A_1 y^2 = -1$, dans laquelle

$$A_1 = (G'^2 + H'^2)^2 a^2 + 2(GG' + HH')a + A,$$

aura pour valeurs *minima* de x et de y les nombres

$$y = G'^2 + H'^2 \; ; \qquad x = (G'^2 + H'^2)^2 a + GG' + HH'.$$

Ainsi pour $A = 13$; $\frac{G}{G'} = \frac{4}{1}$; $\frac{H}{H'} = \frac{7}{2}$. La solution *minima* de l'équation

$$x^2 - (25a^2 + 36a + 13)y^2 = -1$$

est par suite représentée par les nombres $y = 5$; $x = 25a + 18$.

10. Réciproquement, en considérant un nombre impair $y = G'^2 + H'^2$ composé de deux carrés premiers entr'eux, on peut trouver le déterminant A_1 d'une équation $x^2 - A_1 y^2 = -1$, pour laquelle le nombre $G'^2 + H'^2$ serait une valeur entière de y. Ce déterminant aurait pour valeur

$$A_1 = \{(H'^2 - G'^2)a + m\}^2 + \{2H'G'a + n\}^2,$$

a représentant un entier indéterminé positif ou négatif, m et n étant racines de l'équation indéterminée du 1.er degré

$$(H'^2 - G'^2)x_1 - 2H'G'y_1 = \pm 1.$$

On peut même remarquer que les carrés composants de A_1 sont égaux aux valeurs générales de x_1 et de y_1.

La valeur de x de l'équation $x^2 - A_1 y^2 = -1$, correspondant à $y = G'^2 + H'^2$, serait d'ailleurs $x = (G'^2 + H'^2)^2 a + m(H'^2 - G'^2) + 2nH'G'$.

Application. 1° Si $y = 4b^2 + 1$, l'équation indéterminée du 1.er degré

$$(4b^2 - 1)x_1 - 4by_1 = \pm 1$$

aurait pour solution générale

$$x_1 = 4ba + 1 \;, \quad y = (4b^2 - 1)a + b$$

par suite

$$A_1 = \{(4b^2 - 1)a + b\}^2 + (4ba + 1)^2,$$

et l'équation $x^2 - A_1 y^2 = -1$ serait vérifiée par les nombres

$$y = 4b^2 + 1 \;, \quad x = (4b^2 + 1)^2 a + b(4b^2 + 3).$$

2° Si $y = (2b)^2 + (4b + 1)^2$, l'équation indéterminée

$$(12b^2+8b+1)x_1-(16b^2+4b)y_1=\pm 1$$

fournirait les valeurs

$$x_1=(16b^2+4b)a+20b+1\ ;\quad y_1=(12b^2+8b+1)a+15b+7.$$

Donc

$$A_1=\{(12b^2+8b+1)a+15b+7\}^2+\{(16b^2+4b)a+20b+1\}^2,$$

et l'équation correspondante serait vérifiée par les nombres

$$y=(2b)^2+(4b+1)^2\ ,\quad x=(20b^2+8b+1)^2a+500b^3+300b^2+75b+7.$$

11. Si le développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue présente le nombre 4 dans les dénominateurs des quotients complets, ce qui arrive souvent lorsque $A\equiv 5(\text{mod.}8)$, on peut, sans continuer le développement de $\sqrt{A}$, déduire de la réduite $\frac{M}{M'}$, qui précède le dénominateur 4, la plus petite solution entière de l'une des équations $x^2-Ay^2=\pm 1$.

1º Si $\frac{M}{M'}=\frac{2M_1+1}{M'}$, et si de plus cette réduite est de rang pair, on aura

$$AM'^2=(2M_1+1)^2+4$$

par suite (nº 4) l'équation $x^2-Ay^2=-1$ sera vérifiée par les nombres

$$y=M'\{M_1^2+(M_1+1)^2\}\ ;\quad x=2(2M_1+1)(M_1^2+M_1+1).$$

On déduirait de là (nº 9) un déterminant $M'^2b^2+2(2M_1+1)b+A$, qui, suivant que b est pair ou impair, se décompose en deux autres :

$$A_1=4M'^2a^2+4(2M_1+1)a+A\ ;\qquad A_2=M'^2(2a+1)^2+2(2M_1+1)(2a+1)+A\ ;$$

et ces déterminants seraient tels que les équations

$$x_1^2=A_1y_1^2=-1\ ,\qquad x_2^2-A_2y_2^2=1$$

seraient vérifiées par les nombres

$$y_1=M'\{(M'^2a+M_1)^2+(M'^2a+M_1+1)^2\}\ .\ x_1=2\{2(M'^2a+M_1)+1\}\{(M'^2a+M_1)^2+M'^2a+M_1+1)\}$$

$$y_2=\frac{M'}{2}\{M'^2(2a+1)+2M_1+1\}\ ,\qquad x_2=\frac{\{M'^2(2a+1)+2M_1+1\}^2}{2}+1\ .$$

Pour $A=61$, les quatre premières réduites sont $\frac{0}{1},\frac{7}{1},\frac{8}{1},\frac{39}{5}=\frac{2.19+1}{5}$. Ainsi, comme le dénominateur du quotient complet suivant est égal à 4, la plus petite solution de l'équation $x^2-61y^2=-1$ est représentée par les nombres

$$y=5(19^2+20^2)=3805\ ;\qquad x=2.39(19^2+19+1)=29718.$$

Dans ce cas particulier, le déterminant A_1 serait égal à $100a^2+156a+61$, et l'équation correspondante $x_1^2-A_1y_1^2=-1$ serait vérifiée par les nombres

$$x_1 = 2(50a + 39)\{(25a + 19)^2 + 25a + 20\} \; ; \qquad y_1 = 5\{(25a + 19)^2 + \{25a + 20\}^2\}$$

pour $\quad a = -2 \, , \quad A_1 = 149 \; ; \qquad x_1 = 113582 \, , \quad y_1 = 9305 \, .$

Le déterminant A_2 serait, dans cette même hypothèse de $A = 61$, représenté par le nombre $100\,a^2 + 256a + 164$, et les plus petites solutions de l'équation $x_2^2 - A_2 y_2^2 = 1$ seraient

$$x_2 = 2(25a + 32)^2 + 1 \; ; \quad y_2 = 5(25a + 32)$$

pour $\quad a = -2 \, , \quad A = 52 \, , \quad x_2 = 649 \; ; \quad y_2 = 90 \, .$

2°. Si $\frac{M}{M'} = \frac{2M_2}{M_1}$, et si de plus cette réduite est de rang pair, on aura

$$AM'^2 = (2M_2)^2 + 4$$

par suite (n.° 2) l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$ sera vérifiée par les nombres

$$y = M'M_2 \; ; \qquad x = 2M_2^2 + 1.$$

On trouverait comme ci-dessus un déterminant $M'^2 b^2 + 4M_2 b + A$, qui pourrait se décomposer en deux autres relatifs aux cas de b pair et de b impair.

3°. Si la réduite $\frac{M}{M'}$ est de rang impair, la solution de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$ s'obtiendra d'après la méthode indiquée (n.os 2 et 5).

Cette marche peut être étendue à divers cas dans lesquels un dénominateur des quotients complets serait égal à 2^n ou à $2^n \alpha$.

12. Si en développant en fraction continue un nombre $A \equiv 0 (\text{mod.} 9)$ on rencontre un dénominateur des quotients complets égal à 9, la réduite $\frac{M}{M'}$ qui précède ce dénominateur fournit de suite la plus petite solution entière de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$.

En vertu de l'égalité $AM'^2 = M^2 \pm 9$ on a, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, $M \equiv 0 (\text{mod.} 3)$ ou $M = 9a \pm 3$. Dès lors, les formules inscrites (n.° 7) fournissent les valeurs minima des inconnues de l'équation dont le déterminant serait AM'^2, valeurs qui servent à trouver celles qui sont relatives au déterminant A. Dans le cas particulier où M serait égal à $9a$, on se servirait des formules inscrites (n.° 1).

Dans cette proposition, le carré 9 peut etre remplacé par un carré quelconque 25, 49, ... Les formules inscrites (n.os 7 et 8) permettraient pour les carrés 25, 169 . . . . . . de reconnaître les cas dans les quels l'équation $x^2 - Ay^2 = -1$ serait possible.

Je suis avec un profond respect, Monsieur le Prince, de V. E.

Le très-humble serviteur
C. RICHAUD.

SUR UN PROBLÈME INDÉTERMINÉ

NOTE DE M. CASIMIR RICHAUD

PROBLÈME. *Trouver deux nombres entiers consécutifs x et $x+1$, tels que la différence de leurs cubes soit représentée par une somme (ou une différence) de deux cubes.*

1° D'après l'énoncé

$$(1)\qquad (x+1)^3 = x^3 + y^3 + z^3$$

ou

$$(2)\qquad y^3 + z^3 = (y+z)\left\{(y+z)^2 - 3yz\right\} = 3x^2 + 3x + 1 = 3x(x+1) + 1.$$

Comme l'un des deux entiers x et $x+1$ est forcément pair, le second membre est de la forme $6n+1$, et même de la forme $t^2 + 3u^2$. On a en effet identiquement .

1° pour $x = 2x'$, $\quad 3(4x'^2) + 3(2x') + 1 = (3x' + 1)^2 + 3x'^2$

2° pour $x = 2x' + 1$, $\quad 3(2x' + 1)^2 + 3(2x' + 1) + 1 = (3x' + 2)^2 + 3(x' + 1)^2$;

Dès lors $y + z$, qui est $\equiv 1 (\text{mod. } 6)$, est aussi de la forme $t^2 + 3u^2$.

Posons donc

$$y + z = s \quad \text{et} \quad \frac{s^3 - 1}{3} = \mathrm{A}$$

l'équation (2) devient

$$x^2 + x = \mathrm{A} - s^2 y + s y^2$$

d'où

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mathrm{A} - 4s^2 y + 4sy^2}}{2}$$

ou $x = \dfrac{-1+t}{2}$ si l'on pose

$$(3)\qquad 4sy^2 - 4s^2 y = t^2 - 4\mathrm{A} - 1.$$

Cette relation (3) donne

$$y = \frac{s^2 + \sqrt{s(s^3 + t^2 - 4A - 1)}}{2s}$$

ou $y = \dfrac{s+v}{2}$, en posant

(4) $$s^3 + t^2 - 4A - 1 = sv^2.$$

Cette dernière relation devient

$$t^2 - sv^2 = 4\frac{s^3-1}{3} + 1 - s^3 = \frac{s^3-1}{3} = A.$$

Ainsi, en résumé, l'équation (1) peut être remplacée par le système suivant:

(α) $$x = \frac{-1+t}{2}, \quad y = \frac{s+v}{2}, \quad z = \frac{s-v}{2}$$

s étant des deux formes $\equiv 1 (\text{mod. } 6)$, et a^2+3b^2; t et v étant racines de l'équation

(β) $$t^2 - sv^2 = \frac{s^3-1}{3}.$$

2. Cette équation $t^2 - sv^2 = \dfrac{s^3-1}{3}$ jouit de la propriété suivante. Si les nombres t et v la vérifient, elle est également vérifiée par le nombres

$$t' = \frac{(s+1)t + 2sv}{s-1}, \quad v' = \frac{2t + (s+1)v}{s-1}$$

Par suite on peut trouver une infinité de solutions de l'équation

(m) $$a^3 = b^3 + c^3 + d^3$$

avec une seule solution particulière de la même équation, au moyen des formules

$$a_1 = \frac{(a+c-d)(c+d) + a - 1}{c+d-1} \qquad b_1 = \frac{(a+c-d-1)(c+d) + a}{c+d-1}$$

$$c_1 = \frac{c(c+d) - d + 2a - 1}{c+d-1} \qquad d_1 = \frac{d(c+d) - c - 2a + 1}{c+d-1}$$

ainsi, en partant de la solution $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ déduite de l'équation particulière $t^2 - 7v^2 = 114$, on trouverait successivement

$a_1 = 9$, $b_1 = 8$, $c_1 = 6$, $d_1 = 1$
$a_2 = 53$, $b_2 = 50$, $e_2 = 29$, $d_2 = -8$
$a_3 = 971$, $b_3 = 961$, $c_3 = 361$, $d_3 = -151$.

Si l'équation $t^2 - sv^2 = \dfrac{s^3-1}{3}$ est vérifiée par les nombres t et v, elle est aussi

vérifiée par les nombres

$$t_1 = \frac{\{(s+1)^2 + s\}t + 2s(s+1)v}{(s+1)^2 - s}, \qquad v_1 = \frac{\{(s+1)^2 + s\}v + 2(s+1)t}{(s+1)^2 - s}$$

et ces formules fourniraient des valeurs analogues aux précédentes pour les nombres a_1, b_1, c_1, d_1.

3. Si l'on demandait deux nombres entiers consécutifs, tels que la différence de leurs cubes fût égale à un carré, on aurait à résoudre l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = y^2$$

qui donne

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{12y^2 - 3}}{6} = \frac{-3 + \sqrt{3(4y^2 - 1)}}{6}$$

par suite y doit vérifier l'équation

$$4y^2 - 1 = 3v^2 \quad \text{ou} \quad (2y)^2 - 3v^2 = 1.$$

L'équation $z^2 - 3v^2 = 1$ ayant pour solution *minima* $z = 2$, $v = 1$, les puissances impaires de l'expression $(2 + \sqrt{3})^m$ fourniront toutes les solutions pour lesquelles z sera pair. On trouvera ainsi

$$x = 0,\ 7,\ 104,\ 1455,\ 20272 \ldots \qquad y = 1,\ 13,\ 181,\ 2521,\ 35113 \ldots$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} 8^3 - 7^3 = 13^2 = 12^2 + 5^2 \\ 105^3 - 104^3 = 181^2 = 180^2 + 19^2 \\ 1456^3 - 1455^3 = 2521^2 = 2520^2 + 71^2 \\ 20273^3 - 20272^3 = 35113^2 = 35112^2 + 265^2 \end{array}\right.$$

Les valeurs de y forment une série récurrente. On obtient les termes de cette série en multipliant le précédent par 14, et en retranchant du produit l'antéprécédent. On peut remarquer les égalités suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} 13 = 2^2 + 3^2, \\ 181 = 9^2 + 10^2, \\ 2521 = 35^2 + 36^2, \\ 35113 = 132^2 + 133^2, \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 489061 = 494^2 + 495^2 \\ 6811741 = 1845^2 + 1846^2 \\ 94875313 = 6887^2 + 6888^2 \end{array}$$

Les nombres 2, 9, 35, 132, 494 .... forment aussi une série récurrente dont l'échelle de relation est facile à voir.

Il était d'ailleurs facile de prévoir que les nombres entiers y, qui satisfont à l'équation

$$3x(x + 1) + 1 = y^2$$

ou $6T + 1 = y^2$ (T étant un nombre triangulaire), sont toujours égaux à une somme de deux carrés, et même égaux à une somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs.

Ces nombres y devant vérifier l'équation

$$(2y)^2 = 3z^2 + 1,$$

sont en effet de la forme $t^2 + 3u^2$, et par suite de la forme $6n + 1$. L'équation

$$(2y + 1)(2y - 1) = 3z^2 = 3v^2 w^2$$

se décompose donc en deux autres

$$2y + 1 = 3v^2 \quad \text{et} \quad 2y - 1 = w^2 \quad \text{ou} \quad 2y = w^2 + 1.$$

Les nombres y divisent ainsi une somme de deux carrés premiers entr'eux. Donc, d'après un théorème connu,

$$y = p^2 + q^2 \quad \text{ou} \quad y = \left(\frac{w + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w - 1}{2}\right)^2 \quad \text{et } y^2 = \left(\frac{w^2 - 1}{2}\right)^2 + w^2$$

ainsi, comme w est forcément impair, y remplit bien les conditions définies ci-dessus.

Sugl' istromenti in pietra focaia rinvenuti nelle cave di breccie presso Roma riferibili all' industria primitiva.
Nota del prof. Giuseppe Ponzi.

Nella sessione, 4 maggio 1862, parlando dell'Aniene e dei suoi relitti feci conoscere a questa nostra Accademia il rinvenimento fatto dall'Ab. Rusconi, di denti umani entro uno strato di terra vegetale frapposta a quei grossi banchi di travertino quaternario, che dalle cave delle Caprine sotto Monticelli si estrae per gli usi economici. Allora faceva notare altresì la loro associazione alle vestigia di molti animali, parte dei quali estinti, parte emigrati, parte ancora viventi nella contrada i quali portano a stabilire con certezza che quei banchi siano di formazione quaternaria. A tale scoperta oggi se ne aggiunge un'altra di non minore interesse scientifico, e questa consiste nel rinvenimento d' istromenti in pietre focaie tagliate dalla mano dell'uomo, entro le breccie del Tevere, parimenti quaternarie e contemporanee ai travertini sudetti.

Sono già molti anni che il sig. Luigi Ceselli zelante raccoglitore paleontologico, avea trovato vari di quelli istromenti in pietra nelle cave di ghiaia di Pontemolle, Tor di Quinto, e Acquatraversa. Ma siccome di questi non ne fece parola , nè vennero mai annunciati alla scienza , così quel fatto restò sempre del tutto incognito. Peraltro fra il finire del decorso anno e l' incominciare del presente, altri istromenti di quella natura vennero estratti dalla cava di Pontemolle dal sig. Bleicher medico e naturalista francese, e dietro di lui dal sig. Paolo Mantovani giovane d' ingegno e vago di studi geologici, che ignorando i fatti precedenti senza alcun mistero dichiararono la scoperta, e il Bleicher ne fece comunicazione all' accademia di Colmar in Francia. Al grido di questo avvenimento scientifico, si venne alla cognizione di ciò che tuttora restava occulto presso il Ceselli, di modo che sembra spettare a questo la priorità del rinvenimento, al Bleicher il merito della pubblicazione.

Gl' istromenti di Pontemolle pertanto consistono in coltelli e punte di freccie o lance, tagliati in una focaia per lo più giallastra e traslucida che non appartenendo alle rocce de' prossimi monti, sembra piuttosto derivare dalle regioni centrali dell'appennino, da cui discesero e discendono tuttora le correnti del sistema tiberino che le trasportarono. La tessitura di questa pietra

è fina e gentile. Nondimeno il lavoro è rozzo e grossolano, quale può risultare dall'urto semplice di sasso contro sasso.

A meglio apprezzare l' entità di questa scoperta mi portai alle cave di Pontemolle, onde esaminarne la giacitura entro quei vasti depositi di trasporto delle acque diluviane, i quali giungono perfino ad un livello di circa 30 metri, sopra la media delle acque moderne. Risultano da un rimescolamento di sabbie e breccie stratificate in letti irregolarissimi, quali si convengano a quelli operati dalle variabili correnti dei grandi fiumi. I materiali di cui si compongono rappresentano i detriti di tutte le rocce sulle quali le acque passarono, cioè di tutte quelle precedentemente formate. Laonde si compongono di pietre calcarie e focaie, derivate dai terreni giurese cretaceo ed eocenico, che costituiscono gli appennini, a cui si aggiungono le breccie e materie vulcaniche dei subappennini, per accusarle quaternarie e distinte dai conglomerati pliocenici formati avanti la comparsa delle eruzioni ignee. In questi depositi è da notarsi che i cittoli di focaie, or rossi or bigi, a cagione della loro durezza sono meno logorati dall'attrito, mentre le calcarie si offrono molto più ritondate e consunte. Entro lo spessore di tali depositi , alla profondità di circa 12 a 15 metri giacevano la maggior parte degli istromenti rinvenuti, senza togliere che alcuno siasi trovato anche a più elevato livello.

La scoperta di questi oggetti e del più grande interesse scientifico, avvegnachè è la prima volta che possiamo offrire esempi d' istromenti artificiati nei veri depositi quaternari e a quella profondità, perciò spettanti alla prima epoca della pietra. Ciò a nostro avviso, sembra doversi attribuire alla grande estenzione del sistema Tiberino , che dopo il Pò è il più gran fiume d' Italia , raccogliendo le acque non solo di tutte regioni centrali appennine , ma eziandio di una parte della Toscana e del Napolitano.

Gl' istromenti in silice trovati nelle sabbie di Pontemolle sono ben diversi da tutte quelle punte di freccie di un più preciso lavoro, già tanto conosciute dai contadini col nome di pietre di saette, che si rinvengono sparsi sulla superficie del suolo al di sotto dello strato vegetale. Differiscono eziandio per la qualità della silice, la quale in queste, ha tutte le apparenze di essere stata tolta dai più prossimi monti, che sovrastano le pianure. La riduzione a forme più regolari di queste armi, sia per un numero maggiore di faccette, sia per logoramento di attrito, mostrano un età più avanzata di quelle di Pontemolle e perciò riferibili alla seconda epoca della pietra.

Quanto alle esagerate opinioni che si sono volute trarre da queste scoperte, fatte in tante contrade della terra, son d'opinione, che volendosi spin-

STROMENTI IN SILICE RINVENUTI PRESSO ROMA

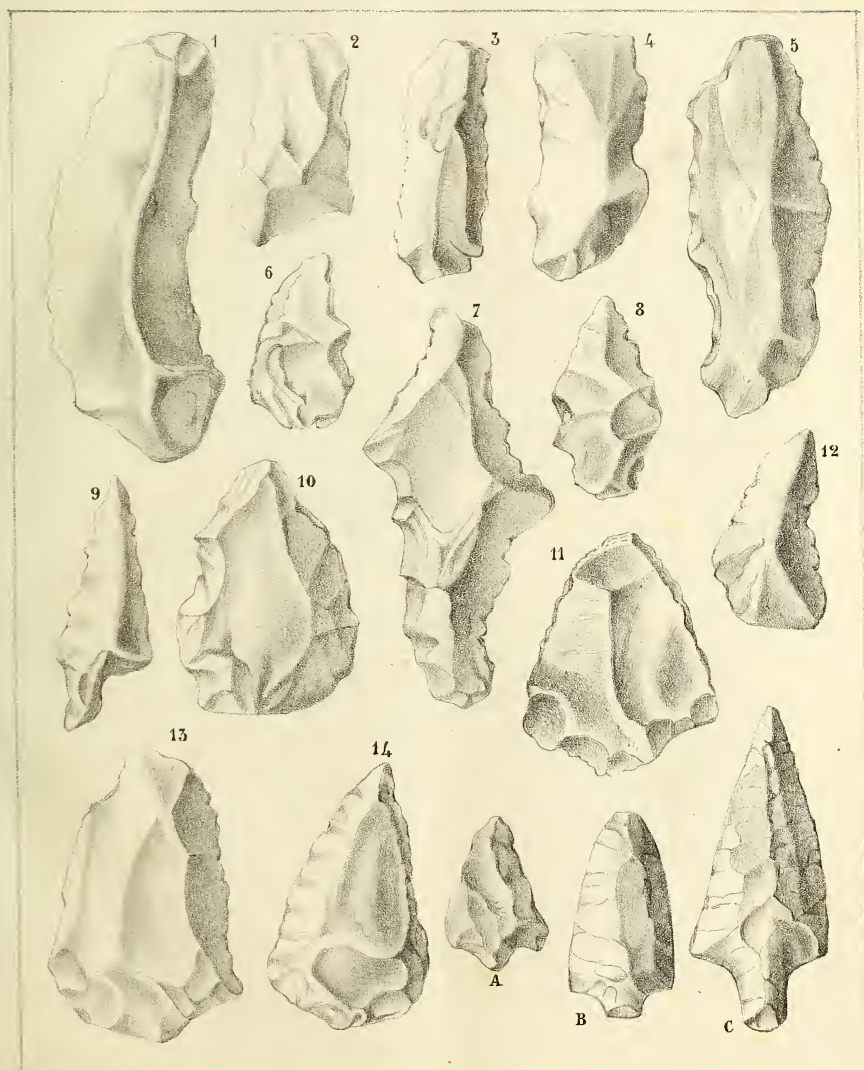
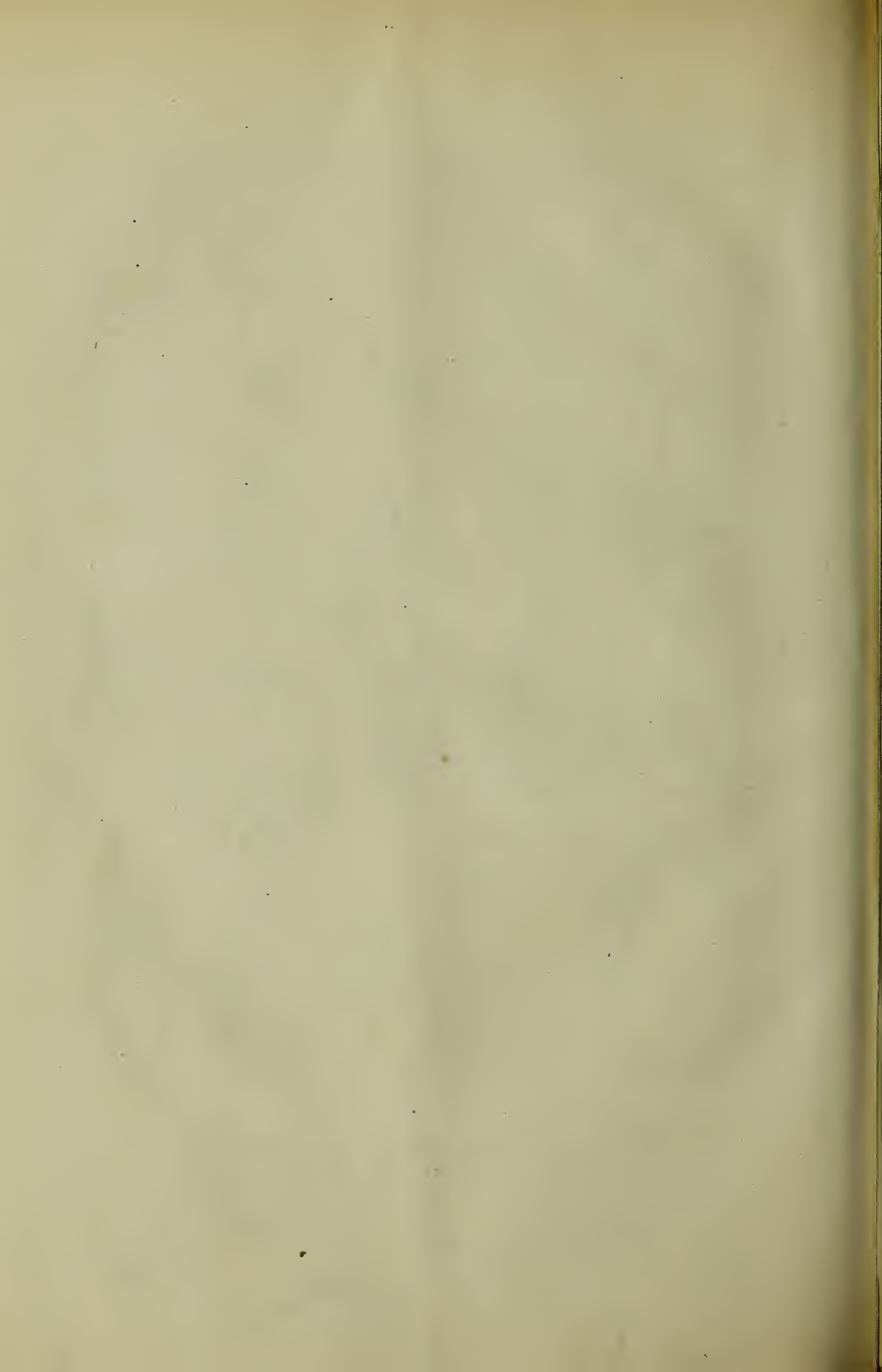



Fig 1-14 nelle breccie quaternarie di Ponte Molle 1ª epoca
A.B.C. sulla superficie del suolo 2ª epoca.

gere troppo oltre siansi costrutti edifici senza fondamento, pronti a crollare a qualunque piccolo urto di sane argomentazioni. Solamente io credo che si potrebbe dire, che durante la prima epoca della pietra l'uomo si tenne sulle alture dei monti da cui discesero le acque, e non fu che nella seconda epoca che scese ad abitar le pianure. Finalmente sembra non potersi rivocare in dubbio che l'uomo abbia esistito al tempo delle grandi inondazioni, e come a suo tempo sarò in grado dimostrare, essere stato spettatore delle eruzioni vulcaniche che produssero i monti del Lazío.

La tavola annessa rappresenta gli stromenti della prima epoca della pietra estratti dalle breccie di Pontemolle, dalla fig. 1 al 14. Le tre freccie aggiunte segnate colle lettere A B C appartenenti alla seconda epoca, disseminati fuori di quei depositi sul suolo della campagna romana sotto lo strato vegetale , vi sono state poste a confronto , perchè sia apprezzata la differenza nel grado del lavoro.

Basti per ora questo annunzio, poichè in un quadro paleontologico dell'epoca quaternaria, mi studierò far conoscere quali animali e quali piante furono contemporanei a quelle antiche razze di uomini, che abitarono la nostra penisola.

Il Cetaceo di S. Marinella. Memoria del prof. VINCENZO DIORIO.

Era il giorno 4 di marzo del corrente anno allorquando due pescatori di terra, discopersero dalla spiaggia *civitavecchiese* e precisamente dal posto denominato la *Salciatella* fra le stazioni ferroviarie di *Rio-Fiume* e *S. Marinella*, sommerso in mare e non molto discosto dal lido un corpo immenso, il quale apparso agli occhi loro simile alla chiglia di un vascello rovesciato , portolli a darne parte alla più vicina autorità governativa, onde si venisse con ogni sollecitudine al soccorso dell'equipaggio che la imaginazione rappresentavagli quasi già sepolto insieme con la riversata stiva. Quel naviglio capovolto cangiossi però ben presto nel corpo di un cetaceo che spinto dall'uragano verso terra, trovossi incuneato fra i scogli che ivi rifrangono estesamente il flutto. Erane il capo intieramente sott' acqua e questo ricevuto come da prua il vento , avea guidato la coda verso terra in direzione di libeccio. L' animale giaceva resupinato sul ventre, ed aveva lacerate le carni in prossimità delle naturali aperture. Due mammelle vulvari davano indizio del sesso , ed una

rima in mezzo ad esse protratta, nascondeva quei meati, che negli ordinarii mammiferi in siffatto luogo si appalesano. La difficoltà del sito (1) l' infuriare dei marosi, e lo inoltrarsi della putrefazione di quell' immenso cadavere, avendoci vietato di farlo rimorchiare sù di una spiaggia arenosa, ove men difficile sarebbe stato, di studiarne la organizazione: dovemmo adattarci alle leggi di publica igiene, che obligavanci alla sollecita distruzione dei tessuti in via di sfacimento; limitandoci a salvarne lo scheletro per la scienza come l'accortissimo e benemerito Monsignor Scapitta Delegato Apostolico di Civitavecchia avea già stabilito : lasciando il grasso in compenso dell' industria, a quei che si offersero a facilitarne lo scarno. E siamo oggi ben paghi di potere annunziare all' accademia che tutte quelle ossa del peso approssimativo di circa 7000 libre romane, sono già in Roma, ed avviate in un locale messo dal Governo per l'oggetto a disposizione della Università, alle opportune lavorarazioni, onde ricostruire lo scheletro intiero del cetaceo.

L'essere di cui diamo un cenno appartiene alla prima sezione delle *Balene* di Lacèpede, e corrisponde al genere *Balaenoptera* dell' autore ora lodato. Porta una piccolissima natatoia dorsale, sostenuta da una cartillagine, che abbiamo conservata. La lunghezza totale del nostro individuo, misurata sul ventre da una retta che partendo dalla sinfisi mascellare inferiore giungeva all'apice della spina centrale della coda la trovammo di m. 18, 80: la testa stava a questa misura per m. 4, 70. La larghezza del capo in corrispondenza delle articolazioni mascellari, la rinvenimmo di m. 2, 22. La mascella inferiore somiglia ad una elissi troncata al fuoco posteriore, ed eccede di 13 cm. la lunghezza della mascella superiore, analogamente a quanto vediamo verificarsi in molte famiglie di pesci. Questa ultima invece considerata nel suo insieme con il cranio, prima dello scarnamento, avresti detto che raffigurasse il capo di un immenso avoltoio rinvenendosi l' apice del becco rappresentato dalle ossa mascellari superiori che andavansi appuntando gradualmente per finire nascoste entro il segmento elissoideo sudetto. Il nostro cetaceo aveva gli occhi relativamente assai piccoli; ed il sinistro non si rinvenne nell'orbita corrispondente. La colonna vertebrale risulta di 56 pezzi. La prima vertebra ossia l'atlante era libero; le 6 seguenti apparivano saldate insieme. L' apparecchio ioideo si trovava collegato con le apofisi acromiali delle scapole per

(1) Il posto ove venne tratto a terra il Cetaceo, venne disegnato in natura dall'abilissimo artista romano sig. cav. Francesco Grandi e venne per sua opera pure litografato.

mezzo di due sviluppatissime ossa coracoidi; e forse queste connessioni, non sono state avvertite ancora da quelli che hanno scritto la storia di cosifatti animali; i libri che abbiamo potuto consultare autorizandoci a dubitarne. Due pinne o natatoie che dal sito e dai rapporti meglio direbbonsi giugulari che pettorali sono impiantate dietro e vicino agli angoli della bocca misurando ciascheduna m. 1, 80 di massima lunghezza, sopra cm. 70 di maggior larghezza. Il corpo si terminava da una natatoia orizontale di m. 3, 30 di apertura.

Non avendo l' intenzione di esporre oggi all' Accademia la storia dello scheletro della Balenottera, lascerò di parlare delle parti che lo compongono, limitandomi solo ad accennare qualche cosa sulle impressioni ricevute durante la separazione dei tessuti molli che lo rivestivano, riserbando ad epoca più opportuna la descrizione di quello.

Dirò quindi come tutto il capo del Cetaceo era tapezzato da uno strato di lardo di oltre a 6 pollici di spessezza. Nascondeva questo tutte le ossa componenti il cranio e la faccia dell'animale, dando ad entrambi, come accennai, l'apparenza del capo scarnato di un immenso avoltoio. Al disotto della fronte si discuoprivano due fenditure lineari della lunghezza di 4 pollici circa, capaci appena di ricevere il dorso di un bistorino ordinario, e molto ravvicinate fra loro. Erano desse le aperture dei sfiatatoi (*Évents*) che sono doppi in tal genere di animali. Sotto della parete lardacea ritrovavasi un grande accumulo di tessuto cellulare assai floscio e tutto inzuppato di olio, il quale tessuto riempiva tutte le fosse e diseguaglianze che iscorgonsi fra le ossa del capo, ed era percorso doviziosamente da una rete vascolare sanguigna.

Pendevano dalla volta palatina i festoni (*Fannons*) caratteristici delle Balene scorrenti tutti dallo avanti all' indietro, pieghettati e gricci sù loro stessi, sfrangiati e setolosi nel lembo libero: potea ridursi ad un piede parigino la media loro altezza. Questi organi avevano il colore carneo slavato della muccosa buccale che in massima parte li costituiva; apparendo solo bluastri sulle rughe trasversali, che trovaronsi pure rigide quasi setole impastate in mezzo alla membrana muccosa. La rete capillare sanguigna che copiosissima accompagnava quei festoni; ed i grossi fili nervosi che vi si perdevano dentro (cosa pure da nessuno avvertita), ci porterebbero a sospettare che dessi veramente si fossero organi di gusto e tatto squisito per questi animali, in cui la lingua da spesso strato lardaceo ricoperta manca di quelle papille, onde addiviene istromento ordinario di senso per i sapori.

Misurata la distanza delle punte palatine dei processi pterigoidei, e quella che fra questi e le apofisi mastoidee rinviensi, potemmo ridurre a circa metro 1,50 il perimetro superiore dello imbuto Faringeo, che poi gradualmente scendendo si angusta fino a ridursi ad $^1/_5$ appena del diametro nello esofago.

Essendo stata arponata la testa, onde avvicinare quell' immenso corpo a terra; ne avvenne che rammolliti dalla putrefazione i legamenti ed i muscoli che la rattenevano, si divelse il capo dal tronco che restò in acqua e ciò pure vietocci di proseguire i studi di dettaglio che ci eravamo proposti. Onde non annojare però di soverchio l'Accademia limiterommi a dire, che la mascella inferiore vedevasi rialzata da una spessa muraglia di lardo, la quale si andava assottigliando in sul lembo corrispondente alla mascella superiore, ed ivi non meno che nello interno suo era tutta rugosa, quasi come la bocca delle testudini di mare sebbene non avente le denticolazioni cornee di queste.

La lingua apparve bluastra in sua superficie, stretta e tondeggiante nel suo corpo , e non come negli altri mammiferi libera ; ma legata nei bordi suoi al piano mascellare, poco meno di quello che si verifica in quella dei coccodrilli. Lo sviluppo delle intestina era immenso, e la spessezza di lor pareti proporzionata alla grandezza del diametro. Infatti le sole tenui farebbero commodamente da calzoni per un uomo di età matura , e di più che ordinario sviluppo. Due sacchi ondeggiavano con la parte lor libera in mare, occupando del cetaceo il fianco. Erano forse le grandi borse aeree che sono state indicate nei Rorquali come analoghe alla vescica natatoria dei pesci, e che vuotate dall'aria, fanno che la pelle del ventre di quelli in tante pieghe longitudinali si rapprenda ; e che noi stante la distenzione pei gas e la distruzione delle pareti addominali, a cui si era proceduto prima del nostro arrivo, non avemmo la fortuna di costatare ? Non abbiamo dati sufficienti per rispondere.

Possiamo dir solo che il torace del cetaceo compariva solcato, ma non a striscie regolarmente longitudinali. Assumevano i solchi sulla regione sternale un apparenza tessellare ; e su i lati toracici scorrevano nel senso delle costole sottostanti. Delle strie flessuose vedevansi pure sulle faccie della gran natatoja caudale.

La circonferenza del corpo intiero calcolata approssimativamente dalla distanza fra le inserzioni delle natatoie pettorali, si ridurrebbe a m. 7,60; dovendo in gran parte attribuirsi questa misura del torace allo sviluppo degli

immensi polmoni del cetaceo. Aperto il petto nè uscì un fiume di sangue corrotto, che momentaneamente arrossò il mare.

Il cuore della balenottera non era men singolare degli altri visceri, e per estrarlo convenne armare la così detta *capra* sul petto del mostro ancor sommerso, e ricorrere alle poleve. Questo nella forma generale somiglia d'assai al cuore umano; presentandosi come una massa unita conico-depressa. Il suo diametro longitudinale dall' apice dei ventricoli al principio delle orecchiette misurava m. 1, 70 circa; il diametro trasverso alla base ventricolare non avea che circa cm. 80. Esso era spartito in due ventricoli, ed in due orecchiette che meglio si chiamerebbero seni. Il ventricolo aortico od arterioso offriva le pareti di oltre a 50 mll. di spessezza, il ventricolo venoso aveva nelle carni sue la grossezza di soli 30 mll. La parete inter-ventricolare aortica, faceva risalto nel vano ventricolare venoso, quasi come si verifica nel cuore dei grandi ruminanti. Le valvole ventricolo-auricolari, riproducevano nelle corrispondenti proporzioni quelle umane; ed altrettanto verificavasi nelle altre che tengono la foce dei grandi vasi.

I seni soprastanti ai ventricoli presentavano una semplicità notevole di struttura: di fenestra ovale non iscoprivasi nemmeno la traccia; della valvola di Eustacchio non eravi indizio. Le vene cave aprivansi nel seno destro con l' imponente diametro di 32 cm.; l'aorta spiccavasi dal ventricolo sinistro con 30 cm. di *lume*. Proporzionata a queste misure scorgevasi, l' apertura delle arterie polmonari. Sicchè non è difficile lo arguirne, che poco ristagno abbia a sperimentare il circolante fluido sanguigno in mezzo a così ampii canali, anche quando la sommersione dell'animale, ne intrattenga per qualche tempo il respiro. Questo immenso cuore neppure una goccia chiudeva di sangue negli antri suoi. Tutta la carne del cetaceo appariva di color cremisino, e trovavasi mandorlata di bianco per gli accumuli lardacei, che davano a quella l' apparenza esagerata della carne suina presa dal farcino. Lasciando adesso gli appunti anatomici mi si consenta di accennare qualche cosa relativamente alla definizione zoologica della specie del nostro cetaceo.

Linneo dopo di avere con l'aureo suo laconismo marcati in poche linee i tratti caratteristici dei cetacei scrivendo « *Cete Spiracula ad calvariae anteriora posita pedes nulli. Pinnae pectorales absque unguibus. Cauda horizontalis* » epilogava quelli del genere *Balaena* con la seguente frase « *Dontium loco in maxillu superiore laminae corneae. Fistula respiratoriu duplici orificio externo supra caput:* » e quindi fra le specie una ne ammetteva distinta da

tutte le congeneri con queste espressioni « *R. Fiatula duplici in fronte, maxilla inferiore multo latiore* » e chiamolla *Balaena musculus*. Egli è superfluo di accennare che il doppio spiraglio frontale, rientrando nella frase generica già riferita, non resta che lo eccesso della mascella inferiore sulla superiore a carattere specifico distintivo di questa balena linneana: per il quale carattere verificato nel nostro cetaceo, siamo in dritto di ritenerlo per la *Balaena musculus* del sommo Svedese. Giorgio Cuvier elevando al rango di famiglia la maggior parte dei generi linneani; accettò per le Balene la principale distinzione da Lacépede introdotta fra le specie, scompartendole in due generi; riservando il nome di *Balene* a quelle senza natatoia dorsale e chiamando *Balenottere* (*Balénoptères*) le altre che portano quel distintivo. Che più: avendo ammessa come non certissima fra queste ultime la sola specie che porta liscio il ventre, e supponendola probabilmente male osservata (quale sarebbe la *Balaena physalus* di Linneo ossia il *Gibbar des Basques*); fece menzione distinta di parecchie altre, che dallo addome rugoso distinguerebbonsi. Mette G. Cuvier fra queste la *Balaena musculus* di Linneo, chiamandola *Le Rorqual de la Mediterranée*, ed avvisa che non differisce dalla *Giubarte*, o *Balaena boops* di Linneo che per alcune proporzioni di dettaglio. « *Qui ne diffère guère de la jubarte*(des basques)*que par quelques proportions de detail.*» (Règue animal. 2 ed. tom. I, pag. 298). Noi abbiamo indicato di sopra ciò che pensiamo intorno alle rughe o solchi addominali forse talora più e talora meno appariscenti in sul ventre delle balenottere; crediamo quindi ben fondati i dubbj del Aristotele Francese, sulla specie del *Gibbar*, che secondo noi dovrebbesi convertire nella *Giubarte* e finalmente nella nostra. La distinzione già indicata delle *Balenottere* di Lacèpede fu pure ammessa da *Fischer* (Synopsis mammalium pag. 523), il quale chiamò il Rorqual del mediterraneo di G. Cuvier *Balaena antiquorum* assegnandone a distinzione dalla *Balaena musculus* di Linneo, certi caratteri osteologici del cranio che rinvengonsi, in quello del nostro cetaeeo. Vuolsi però avvertire, che la mascella inferiore sopratutto spogliata che sia dal lardo che è concolore all' osso, cangia totalmente d' aspetto e quindi i crani di due specie credute solo vicine, spogli che sieno d'ogni sostanza molle, rinvengonsi essere realmente identici. Noteremo finalmente come Federico Cuvier sostituiva il genere *Rorqualus* al *G. Balaenoptera* di Lacèpede, e questo cambiamento adottato dal prof. *Gervais* nella classica sua storia degli animali mammiferi (1) venne scandito in pa-

(1) Histoire naturelle des mammiferes. Paris 1855 Tom. 2, pag. 330.

recchie specie fra le quali il *Rorqualo del mediterraneo* di Giorgio Cuvier trovasi riportato alla *Balaena antiquorum* di Fischer, e viene descritto sotto la denominazione di *Rorqualus rostratus* o *Balaena rostrata* di Muller, o *Balaena musculus* di Linneo. Chiaro dunque apparisce che il ravvicinamento delle specie qui da noi proposto, fu pure già indicato da quei sommi che fanno legge.

Il già più volte lodato Giorgio Cuvier nella sua opera sulle ossa fossili (1) ha rappresentato il cranio di un *Rorqualo* gittato nell'anno 1797 dal mediterraneo sull' isoletta di s. Margherita, incontro a Canne (Var), mettendovi a lato le figure del cranio del *Rorqual du cap.*, e l'altra del *Rorqualus antiquorum* per farne meglio risaltare le differenze. Pictet nel suo recente trattato di Paleontologia (2), scrisse che trovansi resti fossili di Rorquali in molti terreni miocenici e pliocenici della Francia, e che due specie sopratutto hanno a considerarsi fra quelli meglio stabilite, le quali appartengono ai terreni pliocenici del Piemonte. Ora questi trovati ci obligano a dichiarare che nelle epoche paleontologiche siccome nelle istoriche, sonosi incontrati dei Rorquali nel nostro mediterraneo, e quindi solo una prevenzione contraria, potrebbe dall' incolato oceanico ordinario delle Balene, ricavare un argomento valido a promovere dubbj sul possibile rinvenirsi ai tempi biblici della Balena di Giona nel mare di Joppe. E poichè tocchiamo questo argomento, accenneremo di volo, senza pretendere di farla da interpreti, che nella classica opera dell'Emo Pitra (3) si legge tratta dal fisiologo di Verecondo una spiegazione nuova del prodigio singolarissimo verificato in quel profeta, la quale a parer nostro si concilierebbe con il sacro testo e con la storia fisiologica di simili cetacei, meglio di quanto si verifica con altre interpretazioni. Essendo noto infatti che l'acqua bevuta da questi esseri nel mare insieme col cibo, non giunge mai fino alle cavità digerenti, ma si arresta e risorte in massima parte dagli angoli della bocca; mentre la poca residuale è spinta fuori dai sfiatatoi sotto la forma di una rugiada vaporosa nell' atto della espirazione: non saprei come potesse conciliarsi il rinnovamento dei fiumi sul capo del profeta chiuso fra le scissure dei monti con la sua dimora entro il corpo del cetaceo, ove la spiegazione del Vescovo di Ionca si rifiutasse. Per Verecondo, Giona ri-

(1) Oss. Foss. tab. 227, fig. 3-5.
(2) Traité de Paléontologie. Tom. 1, pag. 387. Paris 1853.
(3) Spicilegium solesmense. Tom. 4, pag. 106.

masto incastrato nel collo della balena, là dove giunge l'acqua « *in aquali collo* »; rimase ivi esposto ai flutti che perennemente si rinnovavano nel- l' immenso speco buccale del mostro marino : Furono poi le intercapedini dei festoni palatini, le scissure dei monti entro le quali ebbe chiuso il capo suo; ed ivi rimase, infino che la mano della Onnipotenza salvatolo dalla asfissia e dalla morte, fecelo per la più facile strada della bocca riuscire a salvamento (1). Sembraci quindi che senza stiracchiare la S. Scrittura , infino a cangiare nello *Squalo* od *Orso marino* la balena ; senza ricorrere ai *Tonni* ed alle *tonnare*, e senza opporsi finalmente a quanto la anatomia, la fisiologia e la storia naturale ci appalesano ; si può rinvenire la spiegazione naturale , di un fatto che non addiviene perciò meno miracoloso (2).

Del resto anche ai tempi moderni molti esempj si conoscono di Rorquali venuti a perire nel nostro mediterraneo. Oltre infatti a quello già accennato , e di cui parla G. Cuvier trovato nel 1797 ; uno nè fu preso nel 1828 sulle spiaggie di s. Cipriano (Pirenei orientali) , ed il suo scheletro è conservato nel museo di Lione. Circa il 1840 altro simile se ne rinvenne nella Tonnara di s. Tropez. Abbiamo nel nostro museo due costole di Rorqual rinvenute fra gli interrimenti moderni del Viterbese. Converrà a questi esempii aggiungere ancora l'attuale (3).

---

(1) Vedi nel libro di Giona il capo 2.° vers. 4, 6, 11. V. - Jonathan Franklin « La vie des animaux mammiferes ». Tom. 1, pag. 315 et seq. Paris. Collection Hetzel.

(2) *Verecondo* fu vescovo di Jonca in Affrica al quinto secolo dell'era nostra, e si ha un solo manoscritto di questo autore, fatto rivivere nella classica opera dell'Emo Cardinal Pitra. Così egli scrisse « Non absurde scissuras montium immanioris ceti membra datur sentiri, cuius tanta fuerit magnitudo *ut hominem posset integrum in solo aquali collo reservari* ».

(3) Parecchi altri esempi nostri si potrebbero aggiungere ai qui riportati, di cetacei venuti a secco sulle spiaggie Civitavecchiesi ; le di cui indicazioni debbonsi alle ricerche ed alla gentilezza del chiarissimo P. M. Alberto Guglielmotti autore della Storia della Marina Pontificia. Risulta infatti da quelle che nel mese di febraio del 1282 un cetaceo cadde in secco presso a Civita-Vecchia. Alli 28 di gennaio dell'anno 1624 dopo una grandissima fortuna di mare un altro se ne ebbe lungo otto canne e grosso come il corpo di una tartana , fra s. Marinella e capo Linaro. Nel mese di febraio dell'anno istesso trovossi sulle spiaggie di s. Severa una balena lunga palmi novantuno, e grossa cinquanta. Un altro cetaceo vi si rinvenne nel 1828. Dalle quali notizie del dottissimo scrittore, se non desumesi con certezza la specie zoologica dei grandi cetacei venuti sulle nostre spiaggie; rimane almeno messo fuori di dubbio, che nei secoli decorsi , di simili fatti si sono rinnovati più volte ; e che il sito di più frequente arrivo dei medesimi , sempre è stato presso a poco quello istesso in cui noi abbiamo rinvenuto la balenottera che ci stà occupando.

Resta però vero sempre che più frequenti sono nell'oceano europeo, che nel mediterraneo siffatti incontri. Leggiamo così nello Zodiaco medico francese come nel 1680, un simile Rorqual fu rinvenuto alla *Rochelle* in Francia nella isola del Re presso al faro chiamato *La torre delle Balene*, ed il dottor Segnette nè fece la descrizione anatomica. Avea la lunghezza di 47 piedi e $\frac{1}{2}$. Ad Abbeville presso a Bajona parecchie ne furono gittate dal mare ad epoca più recente. Nel 1823 uno nè fu portato al mar di Ostenda della lunghezza di 95 piedi, e Dubar ha dato la descrizione del suo scheletro, ma avendola noi sott'occhio, crediamo che quello di Ostenda fosse più tosto il *Rorqualo del Capo* che quello del Mediterraneo ; il confronto del cranio , dello sterno , e dell'osso joide della nostra specie, sostenendoci in questo opinamento. Nell'anno 1829 uno ne venne spinto a Cayoux nel dipartimento della Somma in Francia; un altro pure nel 1826 a S.'–Valery, il di cui scheletro è a Rouen. A Berg (Passo di Calais); uno se ne prese nel 1842; uno nel 1844 sulle coste di s. Malò ; nel 1847 uno vicino al Hâvre e vedesi imbalsamato a Parigi ; uno a Nantes; uno nella baia di Noirmontiers; uno finalmente sulla spiaggia della Charenta inferiore. Il prof. Gervais che ci fornisce nella già encomiata sua opera la maggior parte di queste notizie; scrive pure di non conoscere altro che un esempio di Cascialotte perduto sulle sponde del Mediterraneo , fatto verificato vicino a Nizza nel 1726, e lo ammette ancora con qualche esitanza. Noi potremmo rassicurarlo , offrendogliene un altro sicuro nello scheletro che pende dalle volte della Università nostra, il quale appartiene al Cascialotte gittato sulla spiaggia civitavecchiese (a Palo) nell'anno 1833, ed al di cui studio prese parte attivissima il chm̃o nostro collega ed amico cav. prof. G. Ponzi.

I cetacei come hanno comune coi pesci l' incolato, e l'esteriore conformazione ; così coi medesimi hanno analoghi taluni caratteri di struttura , e d' istinto. Il grasso imbeve le carni loro, come nella più parte dei pesci pelasgici. In questi fra il cervello ed il cranio, vi ha sempre uno spazio riempiuto dalla sostanza adiposa; in quelli l'umore oleoso si accumula fra la teca cranica che racchiude l'encefalo e fuori di essa, e gli integumenti rinvigoriti o da muraglie lardacee, o da ripari cartillaginei. Il cerchio timpanico che resta sciolto solo negli ovipari, rinviensi rappresentato dalla concha uditiva libera nelle Balene. Nei mammiferi la seconda vertebra cervicale porta una apofisi odontoide , questa manca nei cetacei; e le vertebre del collo restano schiacciate, depresse, e saldate insieme in una maniera tutta affatto caratte-

ristica. L'innervazione istessa presenta in questi ultimi, delle interessantissime modificazioni. Onde però non dilungarmi soverchiamente, lasciando per ora siffatti studi, finirò domandandomi come mai sia giunto nel nostro mare il Rorqualo, che ci ha occupato.

Lo studio, credo io, delle correnti marine, fatto da un chiarissimo nostro collega (1), dar ci potrebbero una qualche fisica spiegazione del singolare avvenimento. Che se alle correnti marine si aggiungano le accidentalità degli uragani; i quali come fanno smarrire talora la via agli augelli emigratorii, così possono spingere fuori della loro acqua taluni pesci e cetacei potrà immaginarsi la possibile spiegazione del fenomeno. Anzi più la immensa mole dei cetacei dà di presa alla imperversante bufera; e più facile deve avvenirne lo sviamento: così resiste cedendo al vento impetuoso la tenera pianticella del prato; mentre l'annosa quercia cade per la mole e resistenza sua, schiantata dalla forza istessa al suolo. L'uragano del 10 gennaio che, lasciò tanto notevoli rimembranze nei nostri porti; potè forse portar fuori dello stretto di Gibilterra il nostro Rorqualo, che messo per così dire fuori di paese, trovò ospiti poco indulgenti per rispettarlo. E per verità il ventre suo lacerato nelle fenditure naturali, non che il cuore privo di sangue in tutte le sue cavità; porterebbero a far sospettare che la terribile famiglia dei Squali dalla bocca armata di sette fila di lancie, a sega acutissima; non che il restante stuolo dei pesci cartillaginosi, che avendo la bocca a ventosa, si attaccano alle parti più gentili degli altri animali e con gli acutissimi lor denti arrivano fino ad aprirne le pareti de' vasi sanguigni; e forse anco la frequentissima *Belone acus* del nostro mare: abbiano cagionato al cetaceo di S. Marinella quelle penetranti ferite dei vasi arteriosi che gli dier morte. In fatti il corpo suo non presentò altro segno di lesione accidentale che quelli già mentovati; ed un proiettile d'arma da fuoco, che fosse penetrato nelle sue carni; non ne avrebbe certo rispettata l'interezza, e non poteva pure facilmente andar perduto.

La caccia dei Rorquali è oggi abbandonata, tanto per la scarza quantità di olio che forniscono, quanto per i pericoli che occasionano ai navigli, con lo spaventoso loro agitarsi quando pericolanti, e con lo sveltissimo loro affondare quando feriti. La epidermide vellutata che ricuopriva, il corpo del no-

(1) Vedi la classica opera del chmo collega ad amico comm. Alessandro Cialdi: *Sul moto ondoso del mare e su le correnti di esso ec.* Roma tipografia delle Belle Arti 1866.

stro esemplare nero bluastra sul dorso e fianchi, bianco sudicia sul ventre, macchiata di bruno sotto al mento; si asportava con la semplice pressione delle dita. Ove si rifletta che la epidermide umana, per ridursi a tal grado di rammollimento ha bisogno di circa 10 giorni di sommersione nell' acqua dolce corrente, nella stagion temperata; calcolando il più tardo effetto che ottiensi nell'acqua di mare ad identiche circostanze; ed aggiungendo ancora quel di più di tempo, che per rammorbidire una epidermide di circa 6 millimetri di spessezza è necessario: stimiamo non andar molto lungi dal vero giudicando, pure per la putrefazione inoltrata dei visceri, che il cetaceo già da parecchie settimane avesse perduto la vita. Desso era ancora nella età giovanile. Lo stato cartilagineo delle epifisi di tutte quasi le ossa; la brevità e le strie bluastre dei festoni buccali, per tale lo addimostravano.

Riserbandomi pertanto di tornare sull'argomento, quando sia condotto a fine il lavoro intrapreso intorno allo scheletro della balenottera, prego l'Accademia ad accettar di buon grado, quel poco che oggi ho potuto offerirle intorno al nuovo ed interessante argomento.

Necrologico cenno sul prof. D. Ignazio Calandrelli, compilato dal prof. Paolo Volpicelli.

Conosce già l'accademia, che il prof. D. Ignazio Calandrelli, cessò per sempre dall' essere fra suoi colleghi, ed oggi con dolore di tutti noi, ricordiamo questa perdita lagrimevole, avvenuta nella mattina del 12 febbraio testè decorso, alle ore due circa, dopo tredici mesi di sofferenze, per una malattia che dissero prodotta da umori guasti. Nacque in Roma questo ch. nostro socio, nel 22 di ottobre del 1792; e fu educato alle scienze nel collegio romano, nel quale studiò l' astronomia dal suo zio abate D. Giuseppe Calandrelli, astronomo assai reputato, e fondatore dell' astronomia pratica nel collegio stesso, che allora era diretto dal secolare clero, ed oggi lo è dai RR. PP. gesuiti. Nel 1814, fu ivi eletto accademico supplente alla cattedra di matematica elementare quindi nominato professore della medesima nel pontificio seminario romano di s. Apollinare; insegnamento che professò per oltre quarant'anni. Divenne poi professore di ottica e di astronomia nella università romana, e nel 1839 direttore dell' osservatorio *pontificio*, posto sul Cam-

pidoglio. Appartenne al collegio filosofico della università medesima, e fu dei trenta soci ordinari dell'accademia nostra; come ancora fu corrispondente di altre scientifiche congreghe. Andò in Bologna nel 1845, a professare in quella università l'ottica e l'astronomia, dirigendo provvisoriamente anche quell' osservatorio; cui procurò un ottimo circolo meridiano di Ertel, ed ove dimorò per due anni. Tornato in Roma ebbe l'abitazione, fino agli ultimi di sua vita, nelle camere di quest'accademia, presso l'osservatorio, destinato all'astronomo *pontificio* dal superiore governo, e fondato dall'abate professore D. Feliciano Scarpellini di chiara ed onorrvole memoria. Pochi anni prima della sua morte, fu nominato canonico onorario nella chiesa di s. Marco.

Cercò il nostro defunto collega migliorare l' osservatorio *pontificio*, per quanto più potè; ma esso ancora, perchè nascente, non ebbe tutto il personale necessario, nè tutti quei mezzi moderni per coltivare comodamente, e con frutto la scienza degli astri, il magnetismo terrestre, e la meteorologia. Però ebbe dal governo pontificio un eccellente circolo meridiano, ed ottenne una macchina equatoriale, per la generosità del sig. marchese Ferraioli, che gentilmente favorì la richiesta, del nostro dotto, e zelante astronomo. Per fare osservazioni precise, non avendo ancora il Calandrelli orologi acconci alla esatta misura del tempo, si valeva sempre della cortesia del sig. duca Massimo, il quale ad ogni richiesta, metteva a disposizione dell'astronomo pontificio, tanto i suoi cronometri, quanto i suoi regolatori di Dent, compensati a mercurio.

Il nostro chiaro collega, pubblicò le sue lezioni di matematica elementare, di cui fece parecchie edizioni; pubblicò altresì un corso di astronomia, ed un corso di ottica. Inoltre negli atti dell'accademia nostra consegnò molte sue memorie, tutte astronomiche, i titoli delle quali sono quei che sieguono, e che credo utile in questo necrologico cenno riferire; perchè l'unico mezzo a mostrare la vita scientifica di chiunque, consiste nel far conoscre le sue pubblicazioni.

Elenco delle memorie del prof. D. Ignazio Calandrelli, contenute negli Atti dell'accademia pontificia de' Nuovi Lincei.

Sopra la nuova stella scoperta da Hind. – Tom. I, pag. 105.
Ricerche sull' orbita della cometa di Petersen. – Tom. IV, pag. 32.
Elementi dell'orbita di Partenope, ed osservazioni di questo asteroide – T. IV, pag. 82.

Sul calcolo degli elementi ellittici di Egeria. - Tom. IV, pag. 165.

Osservazioni e calcolo degli elementi ellittici del pianeta Irene. - T. IV, p. 205.

Effemeridi di Partenope per la futura opposizione. - Tom. IV, pag. 244.

Osservazioni astronomiche dell' anno 1851. - Tom. V, pag. 157.

Formule per calcolare le perturbazioni dei piccoli asteroidi e delle comete, con applicazioni. - Tom. V, pag. 616, e 695.

Notizie istoriche del *pontificio* nuovo osservatorio della università romana, ed annesso all'accademia. - Tom. VI, pag. 267.

Opposizioni ed elementi dell' orbita parabolica della III cometa del 1855 - Tom. VI, pag. 563.

Formule analitiche per calcolare le perturbazioni dei piccoli asteroidi, e delle comete. - Tom. VI, pag. 643.

Sulla rifrazione solare. - Tom. X, pag. 25.

Osservazioni astronomiche fatte nel nuovo *pontificio* osservatorio della università romana. - Tom. X, pag. 146.

Sopra i movimenti propri delle stelle - Tom. X, pag. 209, e 313.

Sul movimento proprio di Sirio. - Tom. XI, pag. 19, 91, 156, 197, 240, 299, e 355; Tom. XII, pag. 15, e 61.

Ecclisse solare del 15 marzo 1858. Tom. XI, pag. 231.

Occultazione di Saturno, osservata nella *pontificia* specola della università romana, nella sera dell' 8 maggio 1859 - Tom. XII, pag. 383.

Teorica della cometa V dell'anno 1858 - Tom. XIII, pag. 45, 175, 261, e 335.

Risposta ad un articolo, inserito nel num.° 5 del volume 20 delle notizie mensili della reale società astronomica di Londra, comunicata nella sessione VI dell'anno 1860. - Tom. XIII, pag. 286.

Sul moto proprio di Sirio. - Tom. XIII, pag. 432.

Ecclissi solari del 28 luglio 1851, e del 18 luglio 1860 - Tom. XIV, pag. 141, e 399.

Sulle tavole lunari di Hansen. - Tom. XV, pag. 73.

Sulla utilità che può ritrarre la scienza astronomica da un metodo uniforme di calcolo, e di osservazioni. - Tom. XV, pag. 172, e 235.

Sulla cometa del 1862. - Tom. XV, pag. 416; e Tom. XVI, pag. 84, e 229.

Nuove ricerche sul moto proprio delle stelle, con applicazioni. - Tom. XVI, pag. 365, 453, e 1045.

Da questi lavori si vede che il nostro chiaro collega, si occupò sempre del-

l'astronomia propriamente detta, e non dell'astronomia fisica, tanto di presente coltivata, e speriamo con utilità della scienza. La meteorologia, che anch'essa forma oggi uno dei principali oggetti di molti astronomi , non era punto a cuore del nostro collega , il quale forse fu allontanato da queste ricerche , per le parole di Arago , che disse : « Credo poter dedurre dalle mie inve- » stigazioni questa capitale conseguenza : cioè che qualunque sieno i pro- » gressi delle scienze , i dotti di buona fede e coscenziosi della riputazione » loro, non azzarderanno mai di predire il tempo (Cosmos, 2^e serie, 3^e vol. » 1866, p. 61). »

Le moderne ricerche di analisi spettrale, dirette ad investigare la costituzione fisica , sia del sole , sia delle stelle , neppure formarono soggetto di occupazione pel nostro Calandrelli, il quale aveva per massima che l' analisi medesima, era utile soltanto a ricercare la composizione chimica *qualitativa* delle sostanze dei tre regni della natura sul nostro globo. Per conseguenza il chiaro defunto si accordava col modo di vedere del sig. W. De Fonvielle, il quale dice che « le ultime comunicazioni del sig. Faye, sembrano » dover lasciar senza lavoro i seguaci dell'analisi spettrale . . . Il ritorno » prossimo dei dotti alla grande tradizione Herschell e di Arago, per la co- » stituzione del sole, non permetterà più ai fantastici di abbandonarsi all'analisi » spettrale del centro del nostro sistema planetario; quindi vanno loro a sfug- » gire tanto le stelle, quanto le nebulose: accolgano dunque le vittime della » spettromania con entusiasmo una teorica feconda (quella di Faye), che gli » permetterà di utilizzare pel bene della scienza l'abilità di cui fecero prova, » e l'arte di analizzare la luce, che acquistarono durante il regno efimero » dei sogni dei signori Kirchhoff e consorti. » (V. Cosmos 2^e Serie, 3^e, vol. an. 1866, p. 65, et 66).

Queste idee furono comuni anche al nostro Calandrelli , che più volte meco le ripeteva, e col tempo si giudicherà se il medesimo aveva o no ragione. Vero è che in fatto di scienza , non deve mai disperarsi poter giungere ad un fine ragionevole, benchè apparisca difficile a conseguire. Quindi è che avuto riguardo ai mezzi continuamente più efficaci , alla moltitudine degli sperimentatori, alla costanza loro nell' investigare, ed al progresso continuo delle umane cognizioni, come anche avendo fiducia nel tempo, giova sperare, che la moderna meteorologia, e le ricerche spettrali applicate agli astri, ci faranno conoscere nuove leggi naturali, non *presunte*, ma dimostrate vere *indubitatamente*.

Ritrovamento dell' inventario degli oggetti, appartenuti alla eredità libera di Federico Cesi, duca secondo di Acquasparta, e fondatore dell'accademia de' Lincei.

Un codice cartaceo, in 4.° grande, scritto nel secolo XVII, composto di 107 carte ben conservate, delle quali le prime due colle ultime tre sono bianche, legato in cartoncino, contiene quanto appartenne alla proprietà libera di Federico Cesi, duca secondo di Acquasparta, e fondatore dell'accademia nostra. Questo inventario fu da me acquistato, affinchè non andasse perduto; ed io credo che il medesimo possa molto essere utile, per conoscere meglio la vita scientifica e domestica del nostro illustre fondatore. Quindi è che mi reco a dovere, presentare l' indicato codice all'accademia, facendone una breve descrizione.

Sono sette i titoli diversi dell' inventario medesimo; ed il *primo* concerne gli stabili posseduti dal duca Federico, i quali sono indicati dalla carta 3.ª a tutta la 12.ª

Il *secondo* titolo riguarda la libreria, dal medesimo duca posseduta , la quale si trova in questo codice descritta minutamente, a guisa di catalogo, dalla carta 13.ª a tutta la 83.ª Questa biblioteca è classificata per materie, in tredici categorie, cioè — 1.ª Segreti naturali. — 2.ª Medicina e pietre. — 3.ª Libri di medicina. — 4.ª Naturali e medicinali in foglio. — 5.ª Libri di matematica. — 6.ª Libri fisici e teologici. — 7.ª Eruditi. — 8.ª Morali e istorici. — 9.ª Istorici. — 10.ª Grammatici. — 11.ª Poetici. — 12.ª Libri vari, e questi sono molti, il titolo dei quali ricorre più volte nel catalogo di questa biblioteca. — 13.ª Libri sciolti in 4.°

La data della pubblicazione di tutte queste opere, non supera quella della morte di Federico , accaduta nel 1 di agosto 1630 (1). Si vede chiaro da questo catalogo, che il nostro Federico, era provveduto di tutto quello pubblicavasi lui vivente ; giacchè nel catalogo stesso, vi sono molte opere mandate in luce nel 1629, cioè un anno prima della sua morte.

Sappiamo che molti dei nostri colleghi hanno raccolto , quando loro se ne presentò l' occasione , libri appartenuti a questo Federico Cesi , con animo di volere in parte ristabilire la sua biblioteca. Ora l'attuale catalogo

(1) Vedi una mia memoria, che ha per titolo « Sulla vera epoca della morte di Federico Cesi, 2.° duca di Acquasparta, ecc. t. XVI di questi atti, an. 1863, pag. 267.

può servire di guida sicura, per continuare a raccogliere così fatti libri, dei quali ognuno porta lo stemma di Federico. Laonde il presente codice potrà molto riescire utile, per giungere a ricomporre la indicata biblioteca, che una volta ristabilita, sarà un eloquente monumento della dottrina, di quel nobile duca romano, e dell'amore dal medesimo nudrito per le scienze. Quando un libro che, non essendo pubblicato posteriormente al 1630, e avendo impresso lo stemma di Federico, si trovi nel riferito catalogo, potremo esser certi che appartenne alla biblioteca del principe dei Lincei; quindi potrà con sicurezza acquistarsi, per la ricomposizione della sua biblioteca: spero che ognun di noi si darà cura per giungere a questo fine.

Il *terzo* titolo riguarda le robbe del museo, descritte dalla carta 84, a tutta la 88, e consistono parte in minerali, parte in animali; oltre ad alcuni quadri, tra i quali se ne trova uno, in cui sono dipinte le api, stemma dei Barberini. Ciò conferma che il Cesi era legato in amicizia, tanto col cardinale D. Francesco Barberini, quanto col suo zio che fu Urbano VIII; dai quali esso era protetto nelle avversità, come risulta dalle tredici lettere che trovai nella Biblioteca Barberiniana, e che pubblicai nella mia citata memoria (1).

Fra questi oggetti del museo, si trovano due calamari di legno fossile, ed un tavolino simile; così fatta materia fu rinvenuta da Federico, presso Acquasparta. Ciò conferma quanto si legge nella nona delle lettere di Federico, da me pubblicate (2), colla quale manda esso in dono al cardinale D. Francesco Barberini, un altro tavolino dello stesso legno fossile. Di questo naturale prodotto, il nostro Federico a lungo parla nella undecima delle stesse lettere, allo stesso cardinale dirette (3).

Il *quarto* titolo dell' inventario medesimo, consiste negli strumenti di ottone, cioè nelle macchine, fra le quali principalmente s' incontrano moltissimi compassi, come quello di proporzione del Galileo, molti astrolabi, e bussole; oggetti che sono descritti nella carta 89.ª

Il *quinto* titolo comprende le gioie, dalla carta 90ª, a tutta 95ª; fra le quali si trova una Lince d' oro, con una catenina, forse quella che indossava il principe dei Lincei Federico, quando alla tornata loro presiedeva.

---

(1) V. luogo citato.
(2) Idem, pag. 287.
(3) luogo citato, pag. 289.

Sotto questo medesimo titolo, si trovano sei anelli di smeraldo, con una lince incisa; e questi erano gli anelli che il fondatore nostro, a quei dotti distribuiva, quando ricevevano la nomina di accademici lincei.

Il *sesto* titolo riguarda gli argenti, dalla carta 96ª, a tutta la 98.ª

Il *settimo* ed ultimo titolo è *Quadri diversi*, che sono descritti dalla carta 99ª a tutta la 102ª.

Dal carattere, e dalla carta si vede, che questo inventario, nel quale non apparisce la data della sua compilazione, fu copiato dall' autentico, nell'epoca stessa in cui questo fu compilato; esso ha per titolo: *Stabili dell'eredità della bo: me: dell' Eccm̃o sig. D. Federico Cesi, Duca 2.° d'Acquasparta.*

Intorno alle prime scoperte delle proprietà, che appartengono al magnete. — Cenno istorico, compilato dal prof. Paolo Volpicelli.

§ 1.

Il minerale *magnete*, fu conosciuto da tempi remotissimi, per la proprietà che possiede di attirare il ferro: *magnes lapis ferrum ad se trahit* (Cic.). *Magnes ferrum ducit* (Prop.). Credono taluni, che il minerale medesimo, per la prima volta fosse trovato in Magnesia, nella Lidia, da cui trasse il suo nome, poscia cambiato in quello di *calamita*. Secondo Nicandro, il nome di Magnete deriva da quello del pastore, che sul monte Ida lo scoperse. Il minerale medesimo fu anche detto *lapis hieraclius*, perchè una volta si trovava in Eraclea, città della Magnesia. Riguardo alle cognizioni degli antichi, circa le proprietà del magnete, sappiamo che Plinio parla decisamente dell'attrazione a *distanza* di questo minerale, e dell' aderenza di esso col ferro, dicendo: *Trahitur ferrum a magnete, domitrixque illa rerum omnium, et caet* (1). Ancora più estesamente si pronuncia Lucrezio: 1.° riguardo alla propagazione della virtù attrattiva del magnete sul ferro, con osservare che cinque o più anelli di ferro, si sostengono fra loro, similmente ad una catena; 2.° riguardo l'attrazione, e ripulsione alternativa; 3.° riguardo al passaggio dell'azione magnetica pel bronzo; 4.° riguardo alla mancanza di azione del magnete, sia per gli altri metalli, sia pel legno (2). Per quello poi concerne la etimologia della voce calamita, questa potrebbe venire dal greco, cioè dalla voce

(1) Hist. Nat. L. XXXVI, c. 16.
(2) Lucret. L. VI, pag. da 910 a 916, e da 1040 a 1060.

καλαμίτης (calamites), nome di una ranuzza verde, la più piccola di tutte del suo genere βάτραχος, la quale vive tra' canneti o cespugli; assomigliando ad essa l'ago magnetico, quando si fa galleggiare sull'acqua, per la determinazione del Nord. Si potrebbe anche derivare la voce calamita da *calamus amans*, cioè stilo, freccia, ago, attraente, donde calamante, quindi *calamita*. I francesi chiamano *aimant* la calamita, perchè questa voce, metaforicamente si addice ad oggetto che attrae. Non è poi vero quello che scrisse il p. Giorgio Fournier gesuita, il quale nacque nel 1619 e morì nel 1652, cioè che la voce calamita, nel *significato di ranocchio verde*, sia voce pura francese; poichè senza dubbio la voce stessa è greca e latina, incontrandosi più volte anche presso Plinio (2).

§ 2.

Sembra dimostrato che gli *antichi* popoli occidentali, non conoscevano la proprietà direttrice del magnete. Questa proprietà, ossia la polarità della calamita, si conosceva dai cinesi, più secoli avanti l'era cristiana: i quali conobbero eziandio, molto prima dell'era medesima, la *declinazione* dell'ago calamitato; ma non da essi gli europei conobbero questa seconda proprietà del magnete. Le concordi testimonianze di più scrittori fanno credere, che i naviganti applicarono alla nautica l'ago calamitato, cioè la sua proprietà, o polarità *direttrice*, verso il fine del duodecimo secolo, o nel principiare del decimoterzo; e poichè Guyot de Provins ne parla verso la fine del duodecimo,

---

~~(1) Lucret. L. VI, da 910-916, e da 1040-1060.~~

(2) Per le diverse opinioni sulla etimologia della voce *calamita*, v. Dictionnaire universel par A. Furetiere, à la Haye 1727. — Glossarium mediae et infimae latinitatis, Parisiis 1842. — Octavii Ferrari origenes linguae italicae, Patavii 1676. — Dictionnaire étymologique de la langue française, par M. Ménage, Paris 1750. — Dictionnaire universel françois et latin de Trévaux, Paris 1771. — Le origini della lingua italiana, compilate da Egidio Menagio, Geneva 1685. — Ægidii Forcellini tutius latinitatis Lexicon, Patavii 1805. — Alessandro Neckam scrittore del secolo XII, Trattato de utensilibus, pubblicato da pag. 96, a 120, nella raccolta intitolata: *A volume of vocabularies* etcae . . . *from the tenth century to the fifteenth, Edited by Thomas Wright, London* 1857, in 8.° Inoltre si consulterà molto utilmente, l'eccellente memoria del sig. Teodoro Enrico Martin, che ha per titolo: Observations et théories des Anciens sur les attractions et répulsions magnetiques, et sur les attractions éléctriques, Rome imprimerie des sciences mathematiques et physiques, 1865; extrait des Atti dell'accad. pont. de' Nuovi Lincei, t. XVIII, séance du 3 décembre 1864, et du 8 janvier 1865. — Vedi anche l'eccellente opera dello stesso autore « La Foudre, l'elettricité et le magnetisme chez les anciens» Paris 1866.

come di cosa già conosciuta dai marini, donde il nome di *lapis nauticus* al magnete; perciò sino al presente sembra non essere possibile,limitare l'antichità di questa applicazione,la quale secondo alcuni può riguardarsi antica quanto si vuole.

Bisogna inoltre osservare, che la maniera di servirsi allora dell' ago calamitato, cioè della sua *polarità*, differiva da quella che attualmente viene praticata; poichè allora l' ago non era *sospeso*, ma esso galleggiava sopra un corpo leggiero, e ordinariamente sopra due festuche. Il francese Giacomo di Vitry, morto in Roma nel 1244, che visse poco dopo Guyot di Provins, autore del poema la Bibbia, nato circa il 1150, fece ben comprendere che questa invenzione veniva dall' oriente dell' Asia. La parola *calamita* è stata introdotta per la prima volta dagl' italiani; e sembra che questi abbiano riconosciuto pei primi, la identità del minerale *adamas* indiano, colla nostra calamita. Sembra che gl'italiani sieno stati pure i primi, a sostituire la bussola all'ago galleggiante. La parola *bussola*, vocabolo, secondo Libri, certamente italiano, s' incontra per la prima volta nella *Medicina del cuore* di Fra Domenico Cavalca, che morì nel 1342, ove questo dice che « Santo » Agostino assomiglia lo cuore paziente a uno *bussolo* d'unguento odorifero. » e la stessa parola s' incontra pure nel commentario inedito di Francesco de Buti, scritto verso il 1385, sul poema di Dante (1). La sospensione dell'ago magnetico, mediante un *pernio* verticale, si trova indicata nel romanzo del Guerin Meschino, che assicurano scritto in Firenze, prima della Divina Commedia. Alcuni credono che questa sospensione debbasi a Flavio Gioja di Amalfi, che nacque verso la fine del secolo XIII, e che, secondo Musanzio, la inventò nel 1303, per cui scrisse Antonio Panormitano, l'esametro seguente:

Prima dedit nautis usum magnetis Amalphis.

§ 3.

In una memoria molto interessante del sig. W. Wenckebach, tradotta

(1) Histoire des sciences mathématiques en Italie, par G. Libri. Paris 1838, t. 2.°, p. 67, nota (1). — Per ciò che riguarda la etimologia della parola *Bussolà*, vedi anche il Saggio di voci italiane, derivate dall'arabo, di Enrico Narducci, Roma tipografia delle scienze matematiche e fisiche, via Lata, n. 211, an. 1858, pag. 38. — Vedi ancora, per ciò che riguarda la storia di questo istromento, la nota pubblicata dal sig. D'Avezac, nel Bullettino della società di geografia (marzo 1858), col titolo: *Anciens temoignages historiques relatifs à la boussole.*

dall'olandese nel francese dal sig. T. Hooiberg, e pubblicata in Roma nel 1865, coi tipi delle scienze matematiche e fisiche (via Lata N.° 211 A.), si trovano esposte le ragioni valevolissime, per le quali si può con certezza ritenere, che la scoperta della *declinazione* magnetica non appartiene, contro quello che molti dotti credettero, ad un certo Adsygerio, secondo essi vissuto nel secolo XIII, nè che la scoperta medesima siasi fatta prima del decimo quarto secolo. Questa rettificazione, che si riferisce alla storia delle prime scoperte riguardanti le proprietà del magnete, si trova pubblicata anteriormente alla riferita memoria, nel 2.° volume dell' eccellente opera del sig. G. Libri, sopra citata, (t. 2.°, p. 70, e seguenti).

In conferma dell'attuale ben fondato giudizio, riguardo alla scoperta della declinazione magnetica, si potrebbero anche citare i seguenti versi di Dante.

> Del cuor dell' una delle luci nuove
> Si mosse voce, che l' ago alla stella
> Parer mi fece in volgermi al suo dove;
> (Parad. c. XII, t. 28.)

cioè fece che io sembrassi l'ago calamitato, mentre si volge alla polare stella. Dante che rappresenta lo scibile dell'epoca sua, e che visse 21 anni nel secolo XIV, se prima di questo secolo si fosse conosciuta la *declinazione* dell'ago magnetico, è assai probabile, che non avrebbe ignorata egli una così celebre scoperta. Quindi avuto riguardo alla somma precisione di questo gran filosofo e poeta, nel parlare dei fenomeni naturali, non avrebbe detto, che l'ago si volge alla stella; perchè così dicendo avrebbe tradito la verità del fatto naturale, cioè la declinazione, che allora perciò non si conosceva.

Dante parla del volgersi alla stella, come di cosa generalmente conosciuta, e tanto da potersi adoperare in un poetico paragone. Ciò nulla ostante alcuni chiosatori della Divina Commedia, si mostrarono, riguardo a questo brano della medesima, ignari della indicata proprietà direttrice dell' ago magnetico. Francesco Buti, ed il Landino compresero bene il brano indicato; ma il commendatore anonimo, chiamato l'ottimo, intese *lago* per l'ago (1). Bisogna pure ammettere *dietro il senso di quella terzina*, che all'epoca di Dante, già si conosceva la *sospensione* dell'ago magnetico, per mezzo del

---

(1) Ottimo, commento, t. 3.°, p. 289

pernio verticale; giacchè nella terzina medesima, il volgersi dell'ago alla stella, è implicitamente riguardato per *sollecito*, e non lento: questa rotazione dell'ago, espressa dal poeta per *veloce* , non può conciliarsi altro che colla indicata sospensione dell'ago stesso, non già coll'ago galleggiante ; lo che non fu osservato dai chiosatori del divino poema. Ciò si accorda col romanzo sopra citato del Guerin Meschino, in cui si trova indicata la sospensione medesima, prima che Dante scrivesse la riferita terzina; la quale sospensione, secondo il citato Musanzio, sarebbe stata fatta dal Gioia, 18 anni prima della morte di Dante. Però secondo quanto si legge in una nota dottissima del sig. D'Avezac, già citata, che ha per titolo – *Anciens témoignages historiques relatives à la boussole* (1), e che io conobbi per la gentilezza dell'eruditissimo, ed infaticabile sig. principe D. Baldassarre Boncompagni, la sospensione dell'ago magnetico sopra un pernio, si conosceva, da un dotto professore della università di Parigi, Alessandro Neckam, chiamato ancora Alessandro De Saint–Alban; il quale nacque nel settembre del 1157, e morì nel 1217. Perciò, secondo i documenti riportati nella indicata memoria, la sospensione di cui parliamo, dovrebbe a buon diritto riguardarsi esistente nella fine del secolo XII; cioè molto prima della fine del secolo XIII, quando nacque Flavio Gioia. Resterebbe per tanto a questo la gloria, non della indicata sospensione, ma di aver chiuso colla rosa de' venti dentro una bussola l'ago magnetico, già sospenso ad un perno. Da tutto ciò si conclude con maggior certezza, che Dante conosceva questa sospensione, avendola implicitamente indicata nella riferita terzina, sebbene non l'abbiano indicata in verun modo, i suoi antecessori Guyot de Provins, il Canzoniero anonimo del manoscritto di Barrois, e Brunetto Latini nella sua lettera dopo ch' ebbe visitato Ruggero Bacone , i quali avrebbero potuto conoscere questo fatto, cioè la sospensione di cui parliamo.

Riguardo alla sospensione dell' ago magnetico, mediante un *filo di seta* senza torsione , fu essa immaginata ed eseguita nel 1687 (2) , dal gesuita Francesco Lana–Terzi, che visse nel finire del secolo XVII; il quale, sebbene cercasse di confutare il sistema di copernico, e con ciò pagasse il tributo della umanità, tutta via fu di molto ingegno , e di moltissime scientifiche cognizioni fornito (3).

---

(1) Extrait du Bulletin de la Societé de géographie, mars 1858.

(2) Acta novae academiae philexoticorum naturae et artis (Brescia 1687).

(3) Acta Erudit. an. 1686, p. 560, edizione veneta.

Ristoro d'Arezzo contemporaneo di Dante, parla esso pure nell'opera sua « *La composizione del mondo* » della virtù direttrice, posseduta dal magnete, dicendo « l'*angola* (l'ago magnetico) che guida i marinari , che per la virtù « del cielo è tratta e rivolta alla stella , la quale è chiamata tramontana » (pag. 110, lin. 30-31) (1).

La *direzione* magnetica già, come dicemmo, conosciuta in Europa nel secolo decimosecondo, viene oggi, dopo le dottrine di Ampère, spiegata invece per una virtù della terra , e non del cielo , contro ciò che disse Ristoro , il quale se tornasse fra noi, preferirebbe anch'esso questa medesima spiegazione a quella da lui professata.

Però Dante, come si rileva da quella terzina, non assegna la causa della direzione dell' ago magnetico ; ma solo ne riferisce l' effetto, quale all' epoca sua grossolanamente si osservava, cioè che l'ago si rivolge alla stella polare, frase che anche oggi nell'ordinario linguaggio fisico è ben detta.

Il nostro filosofo poeta, per quel suo giusto criterio, si astenne dal dire col suo contemporaneo Ristoro , che la causa della indicata direzione consisteva in una virtù, procedente dalla stella o dal cielo, contro le moderne cognizioni del magnetismo terrestre. Non è per tanto impossibile , che Dante fosse nulla o poco soddisfatto della spiegazione, all'epoca sua ricevuta, intorno al fenomeno di cui parliamo. Quindi, sebbene il concetto di quella terzina, gli si offrisse favorevole a illuderlo sulla causa della direzione dell'ago da bussola, egli tuttavia seppe trionfare della illusione, astenendosi dal profferire sulla causa del fenomeno; ma invece toccò solo dell'effetto suo, nel modo che allora si conosceva, cioè del volgersi l'ago alla stessa.

Questo brano della divina commedia, si aggiunge a tanti altri di essa, che mostrano l' ammirabile sagacia , colla quale quel sommo italiano seppe trattare anche gli argomenti di scienze naturali , a dispetto degli errori dominanti all'epoca sua; per modo che, ad onta del volgere dei secoli, quell'aureo poema, la divina Commedia , non si trova in opposizione quasi mai colle moderne fisiche dottrine. Quindi è chiaro che l'aver Dante passato sotto silenzio la causa del fenomeno in proposito , è per esso un merito scientifico. Spesso questo poeta, è ammirabile più per ciò che ha taciuto, di quello sia

---

(1) Quest'opera è un testo italiano del 1282; pubblicato dal ch. sig. Enrico Narducci. Roma, tipografia delle scienze matematiche e fisiche, via Lata numero 211, anno 1859, in 8.° di pag. LXXXII-347.

per ciò che ha detto, avuto riguardo al secolo in cui visse, pieno cioè di pregiudizi, e di errori.

§ 4.

Nella memoria del sig. W. Wenckebach, sopra citata, si conclude, che il genovese Cristoforo Colombo, nel 1492, fece pel primo la scoperta della *declinazione magnetica*, navigando a 200 leghe ovest dall' isola del Ferro, e che la declinazione stessa *cresceva* coll'avansarsi verso l' indicato punto cardinale; cosicchè per questo secondo fatto, avrebbe pel primo egli scoperta pure la variazione del declinar dell'ago, col variar di luogo sulla terrestre superficie. Anche il sig. Figuier, ritiene il Colombo pel primo scopritore della declinazione magnetica (1).

I cinesi, come già dicemmo, avevano riconosciuta questa magnetica proprietà molto prima, e taluni credono circa mille anni avanti l'era cristiana; però non è da essi che l' Europa la conobbe. Il celebre de Humboldt (*Examen critique, p.* 243 *e seg.*), ha perfettamente stabilito i diritti di Colombo, il quale, anteriormente a Sebastiano Cabot o Cabotto, celebre navigatore veneziano al servizio del re d' Inghilterra, ed a chiunque altro, ebbe scoperta la *variazione* della declinazione, col variar di *luogo* sulla terra.

Quanto alla *declinazione* stessa, il de Humboldt ritiene come *assai probabile*, che altri l'abbia riconosciuta prima di Colombo. Le carte di Andrea Bianco del 1436; quelle dei veneziani sul principio del XV secolo, indicano la declinazione molto prima dei viaggi di Colombo e di Cabot. Questi documenti, col manoscritto dell'Arsenale, sembrano al sig. Libri, assai bastevoli, per dileguare ogni dubbio su tale argomento; ed egli opina perciò, essere stati gl' italiani pei primi, a riconoscere la magnetica declinazione, ma non essere stato Colombo il primo. « In un manoscritto italiano, dice il sig. Libri (2), della biblioteca dell'Arsenale (*MSS.* » *italiens histoire et géographie n.*° 42, *in fol.*) avvi una figura della bussola, » ove la declinazione si trova rappresentata. Questo manoscritto, che per errore » fu indicato essere un opera di Brunetto Latini, contiene, come il sig. Mo- » lini l' ha fatto già osservare (*Documenti di storia italiana*, (*Firenze* 1836, 2 » *vol. in* 8.°, *t.* 1, *p.* 69), il poema sulla sfera, scritto da Govo Dati di Firenze, » verso il principio del XV secolo. Il manoscritto medesimo è certamente anteriore

(1) V. Les grandes inventions scientifiques et industrielles. . Paris 1859, pag. 30.
(2) Nella opera sua, già citata, t. 2.°, pag. 72.

» al viaggio di Colombo. In una carta alemanna della medesima epoca, che si » conserva nella biblioteca del re, e che il sig. Jomard ebbe la bontà di mo- » strarmi, avvi ancora la declinazione ».

Dopo questa scoperta, i viaggiatori che hanno percorso il globo, si applicarono a riconoscere le variazioni, alle quali soggiace la declinazione stessa, nel passare da uno in altro luogo. Le *prime tavole, alquanto inesatte*, comprovanti questo fatto importante, furono composte nel 1599, dai navigatori olandesi, per ordine del principe di Nassau.

Riguardo alla variazione *secolare* della declinazione, la più facile di tutte a riconoscere, questa devesi a Hellibrand nel 1634. Poichè quantunque le declinazioni osservate a Parigi negli anni 1541, 1550, 1580, 1603, differivano fra loro per 3,° 15 e quelle osservate a Londra negli anni 1580, e 1622, differivano per 5,° 20'; tutta via prima del nominato autore, non fu conclusa la indicata variazione.

La variazione *annua* della declinazione stessa, fu osservata per la prima volta dal gesuita francese P. Tachard Guido a Siam nel 1682, entrato a 16 anni nella compagnia di Gesù, e morto a Bengal nel 1712.

Finalmente la variazione *diurna* di questo fenomeno fu riconosciuta da Graham nel 1722, celebre orologiaro, ed autore di varie scoperte nella orologeria; esso costrusse il gran settore, col quale Bradley scoperse l' aberrazione delle fisse.

§ 5.

Queste indagini storiche, da me raccolte, mi diedero motivo a ricercare, chi fosse stato il primo scopritore delle altre proprietà della calamita. Quindi trovai (1) che la scoperta della *inclinazione* magnetica, si deve a Giorgio Hartmann, vicario nella chiesa di s. Sebaldo in Norimberga. Riporterò qui appresso i brani principali dell' articolo concernente questo argomento. Il nominato fisico si occupò molto in costruire astrolabi, orologi solari, e bussole; quindi, sebbene non altro si conosca intorno alle sue cognizioni scientifiche, certo è che possedeva egli molto ingegno per osservare. Ciò si deve concludere da talune lettere, colle quali egli comunicò importanti scoperte intorno al magnetismo. Fra queste lettere la più interessante quella è, che il medesimo scrisse al duca Albrecht di Prussia nel 4 marzo 1544, la quale contiene una de-

(1) Repertorium der Physik, vol. 2.°, pag. 129.

scrizione delle scoperte magnetiche, mostrate dallo stesso Hartmann un anno prima al re Ferdinando, fratello dell' imperatore Carlo V, mentre questo si trovava in Norimberga.

La medesima lettera si trova in originale nell'archivio segreto di Berlino; e per intero nel citato *Repertorium der Physik, vol.* 2.°, *p.* 129: noi qui riporteremo soltanto quei brani della medesima, che servono al nostro scopo, e che sono i quattro seguenti.

1,° Hartmann avendo sospeso un ago per la cruna, (non magnetico in precedenza), vide che il suo estremo inferiore veniva attratto dalla parte meridionale di una calamita, e che la parte medesima, strofinando con essa un ago, vi produceva il polo Nord: vide altresì che la parte opposta della calamita stessa respingeva il detto ago sospeso (1). Da tutto ciò si conclude, che Hartmann aveva osservato due fatti di molta importanza; cioè primieramente la virtù magnetizzante della terra (Musschenbroek attribuisce a torto questa scoperta al gesuita Grimaldi) : secondariamente l'attrazione e la ripulsione magnetica, ossia la polarità del magnetismo.

2.° Hartmann misurò la declinazione magnetica in varie città; in Roma la trovò eguale a 6° Est, ed in Norimberga a 10° Est (2). L'epoca in cui furono fatte queste osservazioni, non è riportata nella lettera di cui parliamo; però è certo che fu prima del 1544. Egli venne in Roma col Margravio Gumbrecht, e ciò potrebbe precisare l' anno di tale osservazione in Roma. Pare che il medesimo fisico, non abbia trovato in verun luogo declinazione ovest. Le osservazioni sulla declinazione in Roma, riportate nella « *Descrizione dell'osservatorio del collegio romano* (*pag.* 3) » e fatte dal p. Asclepi gesuita nel 1762, non sono certo le più antiche in questa nostra città; giacchè quella riportata ora dell' Hartmann, è per lo meno di 219 anni più antica, cioè fatta nel 1543; ed io credo essere questa la prima, istituita nella capitale del mondo cattolico. Se prendiamo a considerare quanto riferisce il Poggendorf (3), cioè che Hartmann, dopo aver viaggiato per l'Italia, si stabilì nel 1518 in Norimberga; si vede che l'epoca, nella quale osservò egli la declinazione magnetica in Roma, è anche più remota del 1543, cioè per lo meno 244 anni prima di quelle fatte dal nominato gesuita.

3.° Allo stesso Hartmann si deve la prima scoperta della inclinazione

(1) Luogo citato, p. 130, li. 3.
(2) Luogo citato, pag. 130. li. 16 salendo.
(3) Biographisch literarisches Handwörterbuch, Leipzig. Vol. 1.°, pag. 1023.

magnetica, dicendo egli nella citata lettera, di avere fatto un ago, sostenuto da un perno in guisa, da trovarsi perfettamente orizzontale prima di essere magnetizzato; mentre dopo la sua magnetizzazione, mostrò il polo Nord inclinato di circa 9° (1). Vero è che la inclinazione assegnata dall'Hartmann risultò molto minore della vera, ma ciò deve attribuirsi al modo inesatto, col quale fu sospeso l'ago; poichè per questa inesatta sospensione, la gravità potè impedire una parte della vera inclinazione. Il Musschembroek ritiene che Normann abbia, nel 1576, fatta la scoperta di cui parliamo (2); ma invece deve ritenersi che la medesima si fece da Hartmann 33 anni prima, cioè nel 1543. Però è vero che Normann costruì pel primo un inclinometro, girevole attorno un asse orizzontale.

4.° Resa mobile una calamita, per mezzo di un galleggiante sull'acqua, vide Hartmann, che se quel polo di questa, strofinato sopra un ago, vi produce il polo diretto al Nord, il primo si dirige verso il Sud, e viceversa. Perciò concluse che i poli delle bussole sono inesattamente contrassegnati; e voleva con questo egli dire, che il polo della calamita il quale si rivolge al Nord, si deve riguardare come prodotto dal polo che si dirige al Sud, e viceversa (3). Di tale fatto, che a quel tempo recò tanta meraviglia, parlò Hartmann lungamente in un' altra lettera, che al medesimo duca Albrecht scrisse nel 1543, la quale si trova eziandio nel citato Repertorium (4).

Hartmann fece i suoi studi nella città di Cologna, e dopo aver viaggiato per la Italia, si stabilì nel 1518 in Norimberga, come macchinista, ove fu più tardi nominato vicario della chiesa di s. Sebaldo. Nacque nel 9 di febbraio del 1489 in Eckoltheim, presso Bamberga, e morì nel 1564 a Norimberga. Pubblicò nel 1542 l'opera intitolata *Ioannis Pisani perspectiva communis*; scrisse nel 1554 il *Directorium*, opera astrologica; inventò l'asta per la stereometria, e scoprì l' *inclinazione* magnetica, con altre proprietà delle calamite.

§ 6.

Concludiamo — 1.° L'attrazione della calamita pel ferro è antichissima, ed è la causa della scoperta di questo minerale, chiamato magnete:

---

(1) Luogo citato, pag. 130, li. 7 salendo.
(2) De magnete, 98.
(3) Luogo citato, pag. 131, li. 6.
(4) Luogo citato, p. 132, li. 11 salendo

Magneta vocant patrio de nomine Graji
Magnetum quia sit patriis in finibus ortum.
(Lucr. VI, 908)

Gli antichi osservarono altresì che la calamita, comunica al ferro la virtù di tirare un altro ferro; e facevano catenelle in cui veniva un primo anello sostenuto dalla calamita, il secondo dal primo, il terzo dal secondo, e così di seguito:

Hunc hominem lapides mirantur, quippe catenam
Saepe ex annellis reddit pendentibus ex se
Quippe etenim licet interdum plureisque videre
Ordine demissos levibus jactarier auris
Unus ubi ex uno dependet subter adhaerens.
Ex aliquo alius lapidis vim, vinclaque noscit:
Usque adeo permanenter vis pervalet ejus.
(Lucr. VI, 910)

— 2.° La proprietà direttrice della calamita, si conosceva dai cinesi più secoli avanti l'era cristiana, ed i popoli occidentali non la conobbero da essi; però non possiamo assegnare quando precisamente l'occidente conobbe questa proprietà. — 3.° L'applicazione sua nella marina si può probabilmente fissare verso la metà del duodecimo secolo, mediante un ago galleggiante; e verso il fine del secolo stesso, mediante un perno che sosteneva l'ago calamitato, sospensione conosciuta dall'Alighieri. — 4.° La invenzione della bussola, cioè la chiusura dell'ago sospeso, può fissarsi nel finire del secolo decimoterzo, o nel principio del decimo quarto. — 5.° La sospensione dell'ago ad un filo di seta, fu inventata dal gesuita p. Francesco Lana-Terzi nel 1687. — 6.° La *declinazione* magnetica fu conosciuta nel 1436, anteriormente ai viaggi di Colombo; ma i cinesi la conoscevano molto prima dell'era cristiana. — 7.° La scoperta della *variazione* di declinazione, dipendente dal luogo sulla superficie terrestre, devesi a Colombo nel 1492. — 8.° La variazione *secolare* della declinazione, fu conosciuta per la prima volta da Hellibrand nel 1634. — 9.° La variazione *annua* di questo fenomeno, devesi al gesuita p. Tachard nel 1682. — 10.° La variazione *diurna* del fenomeno stesso, appartiene a Graham nel 1722. — 11.° La inclinazione magnetica si deve a Giorgio Hartmann prussiano, che la scuoprì

circa nel 1543, con altre proprietà della calamita. — 12.° Si deve al medesimo la virtù magnetizzante della terra — 13.° ed anche l'attrazione e repulsione magnetica. Questa repulsione però, non fu *del tutto* ignota presso gli antichi; poichè disse Lucrezio (VI, 1040):

Fit quoque ut a lapide hoc ferri natura recedat
Interdum, fugere atque sequi consueta vicissim.

— 14.° La invenzione dell'inclinometro, si attribuisce a Normann, che nel 1576 costrusse questo istromento. — 15.° Il fatto degli anelli, che si sostengono fra loro, fu osservato da Platone, da Stratone di Lampsaco, e da Epicuro (*Observations de Martin, già citate, pag.* 7). Queste cognizioni sono più antiche di quelle di Lucrezio. — 16.° Il poeta Claudio, vissuto alla fine del quarto secolo, osservò pel primo che la calamita si fortifica, quando è in contatto col ferro. (*Idem, pag.* 7). — 17.° Plinio credette falsamente a due specie di calamite, una chiamata théamède, che si trova nella Etiopia, e che rispinge il ferro, mentre l'altra specie l'attrae (*Idem, pag.* 9). Lucrezio professò la falsa opinione che dal magnete uscisse qualche cosa quando magnetizza:

Fluere de lapide hoc per multa necesse est
Semina . . . . (Lucr. VI, 100)

La polarità non era conosciuta dagli antichi. (*Idem, pag.* 10). — 18.° I cinesi conoscevano la bussola in un epoca impossibile a stabilire, ma certamente anteriore al terzo secolo avanti la nostra era. (*Idem, pag.* 27). Nel catalogo dei libri cinesi, raccolti nella Cina dal sig. O. Martucci, avvi un *Trattato della bussola*, in cui si dice questa essere invenzione di Iciao–Cong., fatta circa 1050 anni avanti l'era cristiana (*Giornale Arcadico, giugno* 1827 – *vedi anche Bartoli Cina, tom. I, pag.* 50, *edizione romana* — 19.° Essi conoscevano la declinazione fin dal principio dell'undecimo secolo prima dell'era cristiana (*Idem, pag.* 28), — 20.° L'attrazione *reciproca* fra il ferro ed il magnete, nel secolo XIII, non era ancora bene stabilita; ed Alberto il grande cita la proprietà del magnete di essere attratto dal ferro, soltanto per un magnete meraviglioso di Federico. Nel XVI secolo, fra le questioni controverse sopra il magnete, Maurolico pose ancora la seguente: il ferro attrae la calamita? (*Idem, pag.* 29). — 21.° Alberto il grande e Arnaldo riconoscevano, che le ca-

lamite attirano da un estremo il ferro (magnetizzato), mentre dall'altro lo respingono (*Idem, pag.* 30). — 22.° William Gilbert, alla fine del secolo decimo sesto, considerò, pel primo, la terra come una magnete, i poli geografici della quale non coincidono perfettamente co' suoi poli magnetici. Il gesuita Kircher aggiunge che la terra somiglia soltanto ad un magnete, in quanto spetta alla forza direttrice, e non in ciò che concerne l' attrazione magnetica (*Idem, pag.* 32). Osserviamo però noi, che quest' ultimo asserto di Kircher è falso, perchè il nostro globo assomiglia pure ad un magnete relativamente all'attrazione magnetica; e la distanza grandissima dei poli terrestri dall'ago, è cagione che non siavi forza progressiva, ma bensì soltanto rotatoria; vale a dire che l'azione magnetica terrestre consista in una coppia, la quale non può produrre altro moto nell' ago , fuorchè il rotatorio , cosa non conosciuta dal Kircher. — 23.° Gilbert dopo aver detto che la fabbricazione dell' acciaio è ancora un segreto delle fabbriche (celebri erano quelle di Como in Italia, e di Tarancon in Spagna) dice che questo ferro più puro e più costoso , cioè l' acciaio , si combina meglio, per causa della sua purezza, col magnetismo; che acquista la forza magnetica (permanente) più presto, conservandola per più tempo; e che il medesimo in genere, per le sperienze magnetiche, riesce più comodo (*Gehler vol. VI*, *sezione* 2ª , *p.* 655). Da questo brano si vede che Gilbert aveva riconosciuto pel primo la *forza coercitiva* , o almeno sapeva che l' acciaio conserva meglio del ferro il magnetismo. William Gilbert nacque nel 1540 a Colchester , e morì nel 1603 a Londra : fu medico della regina Elisabetta , e del re Giacomo I; scrisse l' opera *De magnete magnetisque corporibus* , *et de magno magnete tellure*, *Physiologia nova*, *London* 1600 , la quale contiene i fondamenti del magnetismo terrestre, — 24.° Bouguer trovò nell'America meridionale alcuni massi di rocce vulcaniche, le quali manifestavano una forte azione sull'ago magnetico (*Gehler*, *vol. VI*, *sez.* 2ª, *p.* 645). La spedizione fatta nel Perù per la misura del grado meridiano , partì nel 1735 (*Bibliographisch literarisches Handwörterbuch di Poggendorf* , *vol.* 1.° *p.* 254); sembra quindi che Bougeur sia stato il primo, a riconoscere il magnetismo delle rocce propriamente dette — 25.° Le rocce che turbano, ad una certa distanza maggiore o minore dall' ago, la declinazione di questo, furono tutte, nel primo terzo del nostro secolo, credute dotate soltanto dell'azione magnetica, e prive dalla bipolare, tranne alcuni casi eccezionali, generalmente dimenticati. Ad onta di tali eccezioni, proclamate prima di ogni altro da Romé de l' Isle, poi da Breislak, da Guyton, ed in ispecie dal de Humboldt, poscia da

Delesse, e Scacchi; i naturalisti seguirono la opinione, che tutte le sostanze le quali racchiudono ferro, sia nello stato di combinazione, sia nell'altro di semplice mescolanza, non posseggono la *bipolarità* magnetica, vale a dire attirono esse un ago magnetico in ogni loro parte, mentre che non ha luogo veruna ripulsione in esse. Il Melloni però fece ricerche (an. 1854) più estesse intorno questo argomento, e riportò in una tavola di 108 diverse sostanze, fra lave, trachiti, basalti, e rocce congeneri, ognuna delle quali si mostrò naturalmente dotata di *magnetismo bipolare*, in modo che non si può più dubitare oggi, essere queste rocce vere magneti, sebbene le medesime non presentano alcun segno di attrazione al contatto della più fina limatura di ferro, come già fu osservato dal de Humboldt, Breislack, e Scacchi (*vedi una memoria di Volpicelli negli Atti dell'Accad. pontif. de' Nuovi Lincei, t. V, sessione del* 15 *agosto* 1852). — 26.° Brugmann Antonio fece molte ricerche sulle pietre preziose, ed anche sopra sostanze vegetali, come legno, ecc. Coulomb trovò che molte sostanze mostrano magnetismo, e spiegò questo fatto colla ipotesi che le medesime contengono ferro in combinazione. Però Hansteen mise fuori di dubbio, che quasi ogni corpo possiede una polarità magnetica, proveniente dall' azione magnetica terrestre (*Gehler, vol. VI, sezione* 2.ª, *p.* 649). Certo è che il detto magnetismo, non si può sempre attribuire al ferro, contenuto nelle sostanze, da cui viene manifestato il magnetismo; quantunque sia questo metallo il più diffuso in natura. — 27.° Finalmente Faraday mostrò nel 1847, che sotto l'influenza degli elettromagneti potentissimi, ciascun corpo mostra magnetici effetti; cosicchè il magnetismo deve considerarsi oggi, come una proprietà generale dei corpi. — 28.° Questo dotto filosofo riconobbe, che ogni corpo è influenzato dal magnete, con questa differenza, che alcuni per tale azione si dispongono *assialmente*, ed altri *equatorialmente*, ed egli chiamò i primi *paramagnetici*, ed i secondi *diamagnetici*. — 29.° La prima osservazione della polarità magnetica, acquistata dal ferro esposto alle intemperie, fu fatta dal Chirurgo Giulio Cesar, sulla croce del campanile della chiesa di s. Agostino in Rimini (*Gehler vol.* 6.° *pag.* 656). — 30.° Il rovesciamento dei poli magnetici di un ago, per mezzo del fulmine, fu ossereato per la prima volta nel 1676; e la polarità magnetica nell'acciaro, mediante la scarica elettrica, fu riconosciuta da Franklin. (*Riess, elettrostatica, vol.* 1.° *pag.* 481, *Berlino* 1853). — 31.° Le proprietà magnetiche della corrente voltaica, furono scoperte dall' illustre Arago. — 32.° Le calamite vòltaiche o temporanee, si ottennero nel 1825 per opera di Sturgeon, e poscia di Moll (*Maiocchi elem. di fisica*, *vol.* 2.°, *par.* 2.ª, *pag.* 956 *e* 958). La prima calamita voltaica, ovvero la prima elettro-calamita, molto potente, fu costruita dall' illustre Pouillet.

Ricerche analitiche, relative al geometrico luogo, tanto dei punti di tangenza fra uno, e due sistemi di parallele, con una serie di coniche omofocali; quanto dei punti d' intersecazione delle tangenti parallele di un sistema, colle rispettive di un altro. — *Memoria del prof. P.* Volpicelli (Continuazione) (*a*).

§. 28.

Trattandosi del caso, nel quale i due sistemi di tangenti, sono paralleli agli assi delle coniche, abbiamo l'una, o l'altra delle

$$\beta = o\ ,\quad \gamma = 90^\circ\ ,$$

o viceversa, e l'ultima equazione del §. 24, riducesi alla

$$(x - c)^2 - y^2 - c^2 = o\ .$$

92.° Da questa equazione si vede che il geometrico luogo delle intersecazioni, è in tal caso rappresentato da una iperbola equilatera, posta in modo, che i suoi vertici coincidono coi fuochi della serie di coniche omofocali. Poichè se per la x, poniamo $x + c$ nell'equazione precedente, vale a dire se poniamo nel centro l'origine delle coordinate, avremo

$$x^2 - y^2 - c^2 = o\ , \tag{68}$$

la quale ha i suoi vertici sull' asse delle ascisse, alla distanza c dalla origine.

93.° Quest'ultimo fatto analitico, può in un modo assai spedito verificarsi, riguardo ad una serie di omofocali ellittiche; poichè la variabile a essendo il semiasse trasverso loro, coincidente coll' asse delle x, l'altro semiasse verrà espresso da $\sqrt{(a^2 - c^2)}$. Quindi apparisce ad evidenza, che queste due quantità

(*a*) Per quello che precede, v. questo vol., pag. 149, che per errore di stampa si trova numerata con 249.

variabili rappresentano, nel caso in proposito, vale a dire nel caso delle tangenti parallele agli assi, i punti d' intersecazione delle tangenti dei due sistemi. Laonde, ponendo nel centro la origine delle coordinate, avremo

$$y = \sqrt{(a^2 - c^2)}\,, \quad x = a\,;$$

ed eliminando la variabile a, otterremo, per la curva d' intersecazione la

$$y = \sqrt{(x^2 - c^2)}\,,$$

coincidente colla (68). In questa equazione, c rappresenta il semiasse reale della iperbola equilatera; e perciò il semiasse medesimo coincide colla eccentricità delle coniche omofocali. La eccentricità poi c_1 della stessa iperbola equilatera (68), sarà espressa da

$$c_1^2 = 2c^2\,, \quad \text{ossia da} \quad c_1 = c\sqrt{2}\,,$$

come sappiamo dagli elementi.

94.° Riflettendo inoltre a quanto fu stabilito nel teorema XIII, si vede che la iperbola di *tangenza*, corrispondente ad un terzo sistema di parallele, formanti coll'asse delle ascisse un angolo $\alpha = 45°$, deve coincidere con quella d' *intersecazione* (68). Ma fra tutte le iperbole di tangenza, la corrispondente ad un sistema $\alpha = 45.°$, possiede una eccentricità massima (§. 6, (16.°)); perciò *la iperbola d' intersecazione, prodotta da due sistemi di tangenti, rispettivamente parallele agli assi delle coniche omofocali, possiede una eccentricità massima riguardo alle eccentricità delle altre iperbole, tanto d' intersecazione, quanto di tangenza, prodotte da sistemi di tangenti, non parallele rispettivamente agli assi delle omofocali.* Ciò deve riguardarsi come un altro teorema.

§. 29.

95.° Tornando sul caso generale delle intersecazioni fra due sistemi di parallele, tangenti alle coniche omofocali, e formanti rispettivamente gli angoli β, γ coll'asse delle x; riflettiamo, come già osservammo (§. 9), che la retta guidata per uno dei fuochi delle omofocali, parallelamente ad una delle due date direzioni di parallele tangenti, deve anch'essa considerarsi come una di queste. Da ciò discende che guidando (fig. 16) il parallelogrammo $b'p\,a'q$, avente due delle sue intersecazioni nei due fuochi a', b' comuni alle omofocali, le quattro in-

tersecazioni del parallelogrammo stesso, debbono trovarsi tutte sulla curva d' intersecazione. Siccome poi fu stabilito (§. 9) che i fuochi a', b', comuni alle coniche, separano i vertici delle omofocali ellittiche, da quelli delle omofocali iperbole; così con facile riflessione vedremo, che il parallelogrammo stesso $a'b\,p'q$, separa i parallelogrammi corrispondenti alle ellissi, da quelli corrispondenti alle iperbole. Perciò concludiamo, che le intersecazioni a', p, b', q dell' indicato parallelogrammo, debbono separare, sulla iperbola d' intersecazione, i tratti di questa curva, provenienti dalle ellissi, da quelli che provengono dalle iperbole, costituenti la serie di coniche omofocali.

96.° Tutto ciò diviene chiaro dalla stessa (fig. 16), avendo anche riguardo al (§. 9), rispetto alle tangenti, in quanto che appartengono alle iperbole, od alle ellissi. Supponendo il semiasse trasverso grandissimo, queste divengono circoli, ed i punti d' intersecazione debbono trovarsi nei quattro rami della iperbola d' intersecazione, ad una distanza infinita. Diminuendo il semiasse maggiore delle ellissi, ed essendo rappresentato da RO, le intersecazioni, o vertici dei parallelogrammi, si avvicineranno dall' infinito al centro O, e due di questi vertici, cioè D, E, compariscono ancora nella medesima fig. 16. Se poi l' indicato semiasse giunga nel suo limite inferiore $Ob' = Oa' = c$, l'ellisse riducesi nella retta $a'b'$; e le quattro intersecazioni riduconsi rispettivamente nei punti a', p, b', q. Continuando la diminuzione del semiasse a, le coniche omofocali diverranno iperbole, dovendo esistere, come fu esposto (§. 16), due di queste cui rispettivamente appartengono i vertici W, W', e V, V', delle quali la prima limita colla sua concavità le iperbole omofocali, che posseggono quattro tangenti, e la seconda limita colla sua concavità quelle, che ne posseggono soltanto due, mentre colla sua convessità limita quelle che non ne posseggono veruna.

97.° Sappiamo (§. 16), che i semiangoli assintotici di queste due iperbole limiti, eguagliano rispettivamente gli angoli acuti, formati dai due sistemi di tangenti coll'asse delle x; in guisa che quella iperbola, i di cui vertici sono W, W', è corrispondente a quello dei due sistemi, che forma l'angolo acuto *minore* coll'asse delle x: questo sistema, nel caso della figura 16, è formato dalle $b'p$, lr, bp', . . , che per brevità chiameremo il primo. L'altra poi delle due iperbole limiti, quella cioè coi vertici V, V', corrisponde al sistema di parallele tangenti, che forma l'angolo acuto *maggiore* col medesimo asse. Lo spazio poi compreso fra le indicate due iperbole limiti, contiene quelle fra le iperbole omofocali, che posseggono due sole tangenti; e queste appartengono alle parallele di quel secondo sistema, che supponemmo formare un angolo maggiore coll'asse

delle x. Ma riflettendo che per la esistenza della iperbola d' intersecazione, occorrono due sistemi di parallele, tangenti alla serie di coniche omofocali; si vedrà facilmente, che in tal caso, ciascuna di qneste coniche, deve ammetterà *quattro* tangenti, e che la iperbola omofocale T W Z T′ W′ Z′, è l'ultima fra quelle della serie di coniehe, a possedere punti per la iperbola d' intersecazione. Quindi facilmente si vede, che col diminuire il semiasse reale delle iperbole omofocali, partendo esso dal suo massimo valore

$$a'O = b'O = c ,$$

le intersecazioni p ed a' procedono una verso l' altra, percorrendo il tratto $p\, l\, p'\, m\, M\, a\, c\, a'$ della iperbola d' intersecazione. Similmente avviene per le intersecazioni q, e b', le quali diminundo a, si muoveranno anch'esse una verso l'altra, percorrendo il tratto $q\, h\, q'\, n\, M'\, b\, r\, b'$ della stessa iperbola d' intersecazione.

98.° Abbiamo detto che la iperbola omofocale T W Z T′ W′ Z′, è l'ultima di queste coniche, la quale ancora fornisce punti d' intersecazione; vale a dire che niuna iperbola di quelle coi loro vertici nell'intervallo WW′, può fornire intersecazioni. Ma rimane a determinare ancora meglio, l'indicato andamento delle intersecazioni sugli archi $p\, m\, a'$, e $b'n\, q$ della iperbola equilatera d' intersecazione, i quali provengono dalle *sole iperbole* omofocali. A questo fine riflettiamo chiaro apparire, dai ragionamenti ora esposti, che diminuendo l'asse reale della iperbola omofocale, diminuiscono pure i rispettivi parallelogrammi di tangenza, e che i vertici delle iperbole omofocali, coll'avvicinarsi molto ai vertici W, W′, quei lati del parallelogrammo stesso, paralleli al sistema pa' di tangenti, continuamente diminuiscono, e si annullano, quando le iperbole omofocali si confondono colla omofocale limite T W Z T′ W′ Z′: in tal caso il parallelogrammo stesso riducesi alla sola retta mn. Diminuendo maggiormente l'asse reale delle iperbole omofocali, non esisteranno più, per queste coniche, quattro tangenti, ma soltanto due parallele alla $b'p$; non esisteranno perciò neppure più parallelogrammi di tangenza, perchè tutti quei possibili, già furono prodotti. Da tutto ciò discende che, mentre i vertici delle coniche omofocali progrediscono dai fuochi a', b' ai vertici W, W′, i rispettivi punti d'intersecazione p, a', percorrono in senso contrario l'arco iperbolico pma', andando uno contro l'altro, e finiscono per coincidere fra loro in m. Nel medesimo tempo i punti b', q, percorrono uno contro l'altro l'arco iperbolico $b'n\, q$, e finiscono per coincidere fra loro nel punto n.

99.° Riassumendo quanto fu esposto precedentemente, dobbiamo concludere che, dati due fuochi a', b', comuni ad un sistema di coniche omofocali,

le intersecazioni delle tangenti alle *ellissi*, dovranno giacere sopra *quattro* archi della iperbola d' intersecazione, limitati rispettivamente dalle intersecazioni, prodotte nei punti a', p, b', q. I quattro medesimi archi, partendo essi da questi punti, si estenderanno sino all' infinito. Però essendosi tracciata nella figura 16, per non complicarla troppo, una sola delle omofocali ellissi, non possono vedersi altro che le due sole intersecazioni D, E. Alle *iperbole* omofocali, poi corrispondono solo *due* archi della *medesima* iperbola d' intersecazione, che sono $a'\,m\,p$, e $b'\,n\,q$.

100.° Esponemmo che la iperbola d'intersecazione, è composta di sei tratti, dei quali due, di estensione finita, provengono dalle *iperbole* omofocali, e gli altri quattro, di estensione infinita, provengono dalle *ellissi*; ora passiamo a vedere, da quali condizioni dipende la estensione di questi sei tratti. Quando in *primo* luogo i due sistemi di parallele tangenti, sono rispettivamente paralleli agli assi delle omofocali, i due tratti che nel caso generale precedente venivano rappresentati da $p\,m\,a'$, e $q\,n\,b'$ della iperbola d' intersecazione (fig. 16), provenienti dalle iperbole omofocali, spariscono; ed i quattro infiniti tratti della iperbola stessa, limitati rispettivamente, nel caso generale, dai punti a', p, b', q, e provenienti dalle *ellissi* omofocali, si uniscono due a due nei comuni fuochi a', b'. Ciò chiaro apparisce , quando si rifletta , che in tale caso particolare , già considerato (§. 28), la iperbola d' intersecazione giace simmetrica rispetto l'asse della x. Infatti, essendo già stabilito (99.°), che due di questi tratti a'E, . . . , b'D, . . . di estensione infinita, limitati rispettivamente dai due fuochi a', b', provengono dalle *ellissi* omofocali, e che per la simmetria, debbono i vertici della iperbola d' intersecazione, coincidere nei fuochi medesimi; è manifesto che, per la *simmetria* stessa, debbono ancora esistere altri due tratti, rispettivamente a questi contigui, ed infiniti, provenienti essi pure dalle *ellissi* omofocali. Quindi si vede che, nel caso particolare in proposito, le iperbole omofocali, non più forniscono punti per la iperbola d' intersecazione.

In *secondo* luogo poi deve osservarsi, che gl' indicati tratti $p\,m\,a'$, e $q\,n\,b'$, provenienti dalle iperbole omofocali, crescono in parità di circostanze, tanto più, quanto più diminuisce l'angolo $a'p\,b'$ (fig. 16), vale a dire quell'angolo dei due sistemi, che trasportato nel centro O, *non comprende* uno dei fuochi comuni alle coniche date. Se poi l'angolo stesso $a'p\,b'$, fosse piccolissimo, i rispettivi tratti $p\,m\,a'$, $q\,n\,b$, provenienti dalle iperbole omofocali, divengono grandissimi: però i medesimi non possono mai divenire infiniti; poichè sarebbe nullo l'angolo dei sistemi di parallele tangenti, e nulla eziandio la iperbola d' intersecazione.

Da quanto fu esposto si vede, che i tratti $a'm\,p$, e $b'n\,q$ della iperbola d' in-

tersecazione, provenienti dalle iperbole omofocali, si annullano, quando i due sistemi di parallele tangenti, divengono rispettivamente paralleli agli assi coordinati, ed essi tratti crescono sempre più, senza potere divenire infiniti, quando l'angolo $a'p\,b'$ sempre più diminuisce.

101.° Confrontando ciò che ora esponemmo, riguardo alla provenienza delle intersecazioni sulla relativa iperbola equilatera d' intersecazione, con quello che fu osservato (§. 10, (29.°)), riguardo alla provenienza dei contatti sulla relativa iperbola equilatera di tangenza, si vede che queste due provenienze, si distinguono essenzialmente l'una dall'altra ; poichè la iperbola d' intersecazione risulta generalmente parlando, di sei tratti, dei quali quattro *infiniti*, che hanno principio (fig. 16) rispettivamente nei due fuochi a', b', e nei due punti p, q, provengono dalla serie delle omofocali ellissi, e due *finiti*, rispettivamente compresi fra i punti a', p, e b', q, provengono dalla serie delle iperbole omofocali. La iperbola poi di tangenza risulta di solo quattro *infiniti* tratti, che hanno principio (fig. 1) rispettivamente nei due fuochi a', b'. Di questi quattro tratti, due provengono dalla serie delle ellissi, ed altri due da quella delle iperbole, come già fu esposto (§. 9). La estensione dei tratti della curva d' intersecazione, provenienti dalle serie di ellissi, è infinita, rispetto alla estensione dei tratti della curva medesima, provenienti dalla serie delle iperbole; mentre nella curva di tangenza, qualunque delle indicate due estensioni, può superare l'altra, come già fu esposto.

102.° Relativamente ai punti m, n (fig. 16), riflettiamo che il parallelogrammo di tangenza, un istante prima di giungere al suo limite mn, sempre più diminuisce il suo lato $a\,p'$; quindi è chiaro che questo avrà in fine la direzione della tangente mH al punto m stesso. Da ciò risulta, che tanto Hm, rispetto al punto m, quanto H'n, rispetto al punto n, sono ambedue tangenti alla iperbola d' intersecazione; quindi potremo concludere il seguente

Teorema XVIII. *Le due tangenti alla iperbola omofocale limite, guidate parallelamente a quello dei due sistemi di parallele, che forma un angolo acuto coll'asse delle omofocali, maggiore di quello, pure acuto, formato dall'altro sistema coll'asse medesimo, sono eziandio tangenti alla iperbola d' intersecazione.*

103.° Da ciò si deduce, che tutte le iperbole omofocali, coi loro vertici compresi fra quelli W, W' della iperbola omofocale limite T W Z T' W' Z', sebbene posseggano in parte tangenti parallele ad *una* delle date direzioni, e sono quelle iperbole comprese fra W e V, tuttavia queste tangenti non possono incontrare più la iperbola d' intersecazione, vale a dire non possono fornire punti per questa curva, come già fu implicitamente stabilito (97.°).

§ 30.

104.° Quando i due sistemi di parallele tangenti, formano un angolo retto fra loro, il parallelogrammo di tangenza diviene un rettangolo; ed i punti m, n debbonsi rispettivamente confondere coi vertici M, M′ della iperbola d' intersecazione. In fatti dalla teorica delle sezioni coniche sappiamo, che una tangente ed un diametro, intersecandosi nel punto di una conica, sono fra loro ad angolo retto allora soltanto, quando il diametro stesso diviene un asse della indicata curva. Ma (fig. 16) il diametro viene rappresentato dalla mn, perchè questa passa pel centro delle omofocali, e la tangente dalla mH; perciò volendo che queste due rette sieno perpendicolari l' una sull'altra, come viene richiesto dal caso attuale dei rettangoli, dobbiamo ammettere che la mn debba ridursi all'asse MM′ della iperbola d' intersecazione, e che perciò debbano i punti m, M coincidere fra loro, non altramente che i punti n, M′. Questo caso è chiaramente rappresentato dalla (fig. 7), ove si vede che i punti limiti m, n, si trovano agli estremi dell'asse FF′ della iperbola d' intersecazione.

105.° Esponemmo (§. 12, (35.°)) che volendosi dai punti di tangenza ottenere *interamente* la iperbola di tangenza, mediante una *sola specie* di coniche omofocali, cioè mediante una serie o di tutte ellissi, o di tutte iperbole; fa d'uopo avere due sistemi di parallele tangenti, e perpendicolari fra loro. Una simile proprietà non ha luogo per la iperbola d' intersecazione. Vero è (§. 24) che prendendo altri due sistemi di parallele tangenti, rispettivamente perpendicolari ai due primi, le corrispondenti iperbole d' intersecazione coincidono fra loro; ma dalla (fig. 9) apparisce chiaro, come colle sole ellissi, non si possa ottenere *interamente* la iperbola d' intersecazione. Si vede altresì da questa figura, che i *quattro* punti a', p, b', q, corrispondenti ad un sistema d' intersecazioni, e gli altri *quattro* a', p', b', q', corrispondenti al secondo sistema d' intersecazioni, sono limiti, dai quali vengono separati fra loro, in ciascun sistema, gli archi della iperbola d' intersecazione, provenienti rispettivamente dall'ellissi, e dalle iperbole omofocali. Questi punti limiti, non sono tutti fra loro identici, pei due diversi sistemi d' intersecazioni o di parallelogrammi, e solo quelli a', b', collocati nei fuochi, appartengono ciascuno ai sistemi d' intersecazioni.

106.° Da ciò si vede, che i due tratti infiniti della iperbola d' interseca-

zione, provenienti dalle ellissi omofocali, e limitati dai fuochi a', b', appartengano *ciascuno*, tanto alle intersecazioni delle parallele punteggiate, quanto delle continue. Gli altri due tratti infiniti della indicata iperbola, limitati per un primo sistema d' intersecazioni, rispettivamente dai punti p, q; e pel secondo sistema limitati rispettivamente dai punti p', q', sono di estensione, generalmente parlando, differenti fra loro. Deve dirsi altrettanto dei tratti che rimangono $a'p$, e $b'q'$, appartenenti ad un primo sistema, e degli altri $a'p'$, e $b'q$, appartenenti al secondo, e provenienti dalle iperbole omofocali.

107.° L'analisi che già fu esposta (§. 8), riguardo alla iperbola di tangenza, è applicabile a quella d' intersecazione, cangiando α in $\frac{\beta+\gamma}{2}$, ciò risulta dal § 22; quindi chiamando con φ' l'angolo formato dalla tangente fuocale alla iperbola d' intersecazione, coll'asse delle ascisse, e facendo nella (34) la indicata sostituzione, avremo

$$\varphi' = 2\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = 2\left(\gamma+\frac{\beta-\gamma}{2}\right).$$

Ma (§. 22, (68.°)) quella retta che produce coll'asse delle x l'angolo $\frac{\gamma+\beta}{2}$, è la bisettrice dell'angolo $\beta-\gamma$, compreso fra le direzioni β, γ dei due sistemi di parallele tangenti; così concludiamo che l'angolo φ', formato dalla tangente fuocale coll'asse delle ascisse, risulta doppio di quello, formato dalla bisettrice dell'angolo, compreso fra le indicate due direzioni.

108.° Possiamo quindi stabilire il seguente

Teorema XIX. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, due sistemi di parallele tangenti, se alla corrispondente iperbola d' intersecazione si conduca una tangente fuocale; questa formerà coll'asse delle coniche stesse, un angolo doppio di quello, formato coll'asse medesimo, dalla bisettrice dell'angolo, compreso dai due sistemi di parallele tangenti.*

La (fig. 10), dichiara questo teorema, osservando che in essa è guidata la tangente fuocale RS, la quale forma coll'asse OX delle coniche, un angolo SaX, doppio dell'angolo S'aX, formato col medesimo asse dalla retta R'S', bisettrice dell'angolo $p\,a\,q$, compreso dai due sistemi di paralle tangenti.

§. 31.

Data una iperbola equilatera, si domandano, e la serie di coniche omo-

focali, e le direzioni dei due sistemi di parallele tangenti alle coniche stesse, in guisa che la data iperbola equilatera, divenga d' intersecazione rispetto alla serie loro, ed alle medesime direzioni.

109.° Sappiamo in *primo* luogo dal teorema XII, che la iperbola d' intersecazione, deve passare pei fuochi delle coniche omofocali, e che il centro a queste comune, deve coincidere con quello appartenente alla iperbola stessa. Da ciò chiaro apparisce che vi sono un illimitato numero di serie di coniche omofocali, soddisfacenti al quisito. In fatti, guidando un qualunque diametro $a'b'$ della data iperbola equilatera (fig. 14), le due indicate condizioni vengono in infiniti modi soddisfatte, facendo ruotare il diametro stesso intorno al centro comune O delle iperbole omofocali. Poichè gli estremi del diametro medesimo, cangiando continuamente di posizione sulla iperbola data, forniscono sempre nuovi fuochi, appartenenti a nuove serie di coniche omofocali. Perciò una qualunque di queste serie, viene determinata, guidando un qualunque diametro della iperbola d' intersecazione; quindi gli estremi di esso costituiranno i fuochi comuni alla corrispondente serie di coniche omofocali.

110.° Per uno schiarimento maggiore osserviamo (fig. 14), che la K I G K' I' G' rappresenta la data iperbola equilatera d' intersecazione; gli estremi a', b' di un qualunque suo diametro $a'Ob'$, possono considerarsi come i fuochi di una serie di coniche omofocali, che ha per curva d' intersecazione la data iperbola equilatera. Nella figura stessa queste coniche, per non complicarla molto, sono rappresentate da una sola ellisse *mg*. Bene si vede (fig. 14, e 16), che ruotando il diametro $a'b'$ intorno al centro comune C delle serie di coniche omofocali, cangia e la direzione degli assi, e la eccentricità Oa' delle coniche stesse. Tutte queste considerazioni, trovarono pure luogo, nel quisito simile all'attuale, ma relativo alla iperbola equilatera di tangenza (§. 18).

111.° Sappiamo in *secondo* luogo, che le rette, rispettivamente bisettrici degli angoli adiacenti, formati dalle *direzioni*, non ancora conosciute, di due sistemi di parallele tangenti alle coniche omofocali, sono parallele ognuna (teorema XII) ad un assintoto della data iperbola d' intersecazione. Quindi possiamo conoscere immediatamente le direzioni di queste bisettrici; poichè conosciamo le direzioni degli assintoti della data iperbola equilatera, e per conseguenza conosceremo immediatamente anche le direzioni cercate dei due sistemi di parallele tangenti. Ognuno poi vede che queste coppie di sistemi di parallele tangenti, sono illimitate di numero; poichè gli angoli adiacenti formati dalle direzioni di due sistemi di parallele, possono variare senza limite rispetto alle

corrispondenti loro bisettrici, che per essere parallele agli assintoti della data iperbola equilatera, debbono avere una direzione costantemente la stessa.

112.° La (fig. 14) pone in chiaro quanto fu ora esposto ; poichè nella medesima rappresenta G I K G′ I′ K′ la data iperbola equilatera d' intersecazione, ed A, B i suoi fuochi, essendo $b'Oa'$ un qualunque suo diametro. Inoltre a', b' rappresentano i fuochi comuni ad una qualunque serie di coniche omofocali, e queste sono rappresentate nella figura stessa, da una sola ellisse mg punteggiata. La direzione di un assintoto $L''L'''$ della iperbola data, è pure quella che deve appartenere alla bisettrice tv, dell'angolo non ancora conosciuto, formato da due qualunque sistemi di parallele tangenti, che soddisfano al quisito. Si guidi la tt' tangente ad una delle coniche omofocali, e la tv parallelamente all'assintoto $L''L'''$, facendo inoltre

$$(v\,t\,s) = (v\,t\,t') ;$$

la ts risulterà pure tangente alla conica omofocale stessa, e si potrà così formare il parallelogrammo di tangenza $t\,t's's$: avremo per tal modo trovato le due tangenti ad una qualunque conica , cioè alla mg , ed anche le direzioni di due sistemi di parallele tangenti, che soddisfano al quisito.

113.° Risulta dal fin quì detto, che il quisito proposto, ammette un illimitato numero di soluzioni; poichè in *primo* luogo è illimitato il numero delle serie di coniche omofocali, soddisfacenti al quisito medesimo, e perchè come si vede, ciascun diametro $b'Oa'$ fornisce una soluzione. La eccentricità Oa' di queste serie, varia dall'una all'altra; essa diviene *minima* quando l' indicato diametro coincide coll'asse focale della data iperbola, e diviene *infinita* quando il diametro medesimo si confonde coll'assintoto , poichè nella iperbola l'asse trasverso è il minimo fra' suoi diametri, e questi hanno gli assintoti per limiti superiori. In *secondo* luogo poi, fissandosi ad una delle tante serie di coniche omofocali, esistono per la medesima un illimitato numero di coppie di sistemi, composti ognuno di parallele tangenti, le quali coppie colle intersecazioni loro giaciono sulla data iperbola equilatera. Poichè l'unica condizione cui sono assoggettate le direzioni di queste coppie, quella cioè di formare angoli uguali colla direzione parallela ad un qualunque assintoto della data iperbola, permette che le direzioni dei due sistemi possono variare come si vuole.

114.° Questa ultima osservazione riceve il suo completo schiarimento dalla fig. 17 , nella quale $f'\,h''\,m'''\,n\,h'\,e''$ rappresenta la data iperbola d' intersecazione. Il diametro $a'b'$ di questa, fornisce un sistema di coniche omo-

focali, rappresentato per maggior semplicità, dalle sole due ellissi AB, A'B'. Nella figura medesima si trovano disegnati sei sistemi di parallele, che sono

$$\begin{array}{llll} n\,m, & n'm', & n''m'', & n'''m''', \\ k\,i, & k'i', & k''i'', & k'''i''', \\ e\,f, & e'f', & e''f'', & e'''f''', \\ g\,e, & e''e', & f''f', & f'''g', \\ n\,n''', & n'n'', & m'm'', & mm''', \\ k\,k''', & k'k'', & i\,i'', & i\,i''', \end{array}$$

e che formano tre sistemi di *coppie*, le quali si potrebbero considerare in due diversi modi, secondo che gli angoli delle coppie stesse vengano divisi a metà, dalla direzione o dell'uno, o dell'altro dei due assintoti, appartenenti alla data iperbola d' intersecazione. Fissandosi alla prima $t''t'''$ di queste due direzioni, si vede che i tre sistemi di coppie sono rappresentati come siegue.

Il primo sistema dalle

$(e\,f,\ e\,g)$; $(e'''f''',\ f'''g')$ per la prima ellisse AB,

$(e'e'',\ e'f')$; $(e''f'',\ f''f')$ per la seconda ellisse A'B' ;

il secondo sistema dalle

$(k\,i,\ kk''')$; $(i'''i\ ,\ i'''k''')$ per la prima ellisse ,

$(k'k'',\ k'i')$; $(i''k'',\ i''i')$ per la seconda ellisse ;

il terzo sistema dalle

$(n\,m,\ nn''')$; $(mm''',\ n'''m''')$ per la prima ellisse,

$(n'm',\ n'n'')$; $(m'm'',\ m''n'')$ per la seconda ellisse.

Le rette bisettrici poi degli angoli, formati dalle coppie sopra espresse, vengono rappresentate, per la prima ellisse AB, riguardo al primo sistema di coppie, dalle $e\,r'''$, ed $f'''r^{\mathrm{VI}}$; riguardo al secondo sistema dalle $k\,r''$, ed $i'''\,r^{\mathrm{V}}$; e riguardo al terzo sistema dalle $n\,r'$, ed $m'''r^{\mathrm{IV}}$: quindi si vede nella figura stessa, che queste sei rette sono parallele alla direzione dell'assintoto $t''t'''$, appartenente alla data iperbola d' intersecazione. Ognuno poi troverà facile verificare altrettanto, se vogliasi, che gli angoli delle coppie, vengano divisi a metà dalla direzione dall'altro assintoto tt'. Tutto quello che quì abbiamo dichiarato, per la prima

ellisse AB, serve ugualmente a dichiarare le stesse proprietà per la seconda ellisse A'B'.

115.° Paragonando quanto fu ora osservato, riguardo al riconoscere, quando una data iperbola equilatera divenga iperbola d' intersecazione, con quello che similmente fu esposto (§ 18), riguardo al ricercare quando una data iperbola equilatera divenga di tangenza; vedremo che soddisfano ad ambedue questi casi, una infinità di serie, composte ognuna di coniche omofocali. Però mentre per la data iperbola di tangenza esistono, relativamente a ciascuna serie di coniche, *due sole direzioni* di sistemi di parallele tangenti, che soddisfano al quisito; invece, per la iperbola d' intersecazione, trattata nel paragrafo attuale, il numero di questi sistemi è infinito. Da ciò si rileva che il numero delle soluzioni del secondo quisito, è infinitamente maggiore di quello relativo al primo.

§ 32.

116.° Il teorema XII ne condusse (§ 31) alla soluzione del quisito inverso, di quello che trattammo sul principio di questa terza parte (§ 20); ora passiamo ad un'applicazione del teorema XIV. Per tanto, avendo riguardo ad *una sola conica* qualunque della serie, tranne la parabola, che viene trattata separatamente, il teorema ora indicato potrà esprimersi col seguente

Corollario. *Guidando ad una conica tante coppie di tangenti, cosicchè le rette da cui vengono divisi per metà gli angoli formati da queste coppie, riescano parallele fra loro; le intersecazioni corrispondenti alle coppie medesime, si troveranno sopra una stessa iperbola equilatera, passante pei fuochi, ed avente un assintoto parallelo alla direzione comune delle indicate bisettrici.*

La (fig. 17) dichiara questo corollario, pel caso della ellisse AB; poichè in essa veggonsi sei coppie di tangenti a questa conica, le quali corrispondono rispettivamente nei punti n, k, e, f''', i''', m''', che si trovano sopra la iperbola equilatera $n\,b'e''\,f\,a'm'''$, passante pei fuochi $a'\,b'$ della data ellisse. Le rette da cui vengono divisi a metà gli angoli corrispondenti a questi vertici, sono nr', kr'', er''', $f'''\,r^{\text{vi}}$, $i'''\,r^{\text{v}}$, $m'''r^{\text{iv}}$, tutte parallele fra loro, ed all'assintoto $t''t'''$ dalla indicata iperbola.

117.° Possiamo a questo corollario dare una diversa espressione, per la quale avrà luogo il seguente

Teorema XX. *Data una ellisse, od una iperbola, ed una direzione qualunque*

fissa; il luogo geometrico delle intersecazioni di due qualunque tangenti, che formano angoli eguali colla data direzione, sarà una iperbola equilatera, concentrica rispetto alla data conica, passante pei fuochi di questa, ed avente uno degli assintoti parallelo alla data direzione.

118.° La (fig. 14) serve a dichiarare questo corollario, nella quale la data conica consiste in una ellisse $m\ n\ g\ h$, e la data direzione consiste nella MN. L'indicato luogo geometrico poi trovasi, guidando pel centro O della data ellisse, due rette LL' ed L''L''', la prima parallela, e la seconda perpendicolare alla data direzione, e tracciando una iperbola equilatera che passi pei fuochi a', b' della data ellisse, avente queste due rette per assintoti: tale iperbola sarà il cercato luogo geometrico delle sopra indicate intersecazioni. I tratti della iperbola medesima, compresi nella data ellisse, non forniscono le indicate intersecazioni delle tangenti; giacchè per un punto interno ad una ellisse, non possono guidarsi tangenti a questa. Inoltre, come si vede nella stessa figura, i quattro archi della iperbola equilatera, non compresi nella ellisse, tutti forniscono punti d' intersecazioni, relativi alle bisettrici parallele alla direzione data MN. Però due di questi archi, cioè GQ ..., e G'Q' ..., forniscono le intersecazioni t, s', . . . , in ognuna delle quali, gli angoli $s\,t\,t'$, $t's's$, . . . , divisi in mezzo dalle bisettrici tv, su, . . . , *comprendono* la ellisse; mentre gli altri due tratti, PK . . , e P'K' . . , forniscono le intersecazioni s, t', . . , nelle quali gli angoli Fss', . . , divisi in mezzo dalle bisettrici sz, . . , parallele pur esse alla data MN, *non comprendono* la data ellisse.

Si costruisce facilmente per punti discreti la iperbola equilatera, che possiede due *dati* assintoti, e che passa pei due fuochi delle coniche omofocali, ponendo il sistema delle coordinate in guisa, che gli assi delle medesime, sieno gli assintoti stessi. Esprimendo quindi con x', y' le coordinate di un fuoco delle delle omofocali, dovranno essere $-x'$, $-y'$ quelle dell'altro; e come sappiamo, dovremo avere la

$$xy = x'y' = \text{costante}\ ,$$

ove x, y sono le coordinate *correnti*. Questa formula si costruisce descrivendo un circolo di raggio qualunque, ma tale, che ammetta la retta $x'+y'$ per corda, poscia guidando tante altre corde, le quali tutte s' incontrino nel punto, che separa x' da y'; i segmenti di ognuna rappresenteranno le coordinate di un punto della iperbola equilatera che vogliamo costruire.

119.° Un'altra costruzione, alquanto più semplice, per guidare la indicata

iperbola, mediante punti discreti, è la seguente. Facciasi AB $= x'$, BC $= y'$, (fig. 22), e si guidi per B la MN perpendicolare alla CA; poscia dividendo AC nel punto D per metà, pongasi DE $=$ AD. Per ottenere le due coordinate corrispondenti ad un punto qualunque della stessa iperbola, da qualsiasi punto P di AC, o del suo prolungamento, come centro, si descriva un circolo, il quale passando sempre pel punto E, intersecherà la CS in R e Q; quindi saranno BQ $= x$, BR $= y$ le coordinate corrispondenti al punto indicato. In fatti essendo AEC un semicircolo, sarà

$$\overline{EB}^2 = \overline{CB}.\overline{BA} ;$$

e siccome abbiamo ancora

$$\overline{BQ}.\overline{BR} = \overline{EB}^2 , \quad \text{perciò si avrà} \quad \overline{BQ}.\overline{BR} = \overline{CB}.\overline{BA} ,$$

ovvero

$$xy = x'y' ,$$

come richiede una iperbola qualunque, se agli assintoti suoi venga riferita.

Quante volte si trattasse di particolarizzare il teorema XX, riferendolo al circolo, si vede immediatamente, che in tal caso la iperbola di cui si tratta diverrebbe una retta. In fatti essendo M il dato circolo (fig. 23), e PQ la data direzione, sappiamo in *primo* luogo dal teorema stesso, che i due assintoti della iperbola equilatera, debbono essere uno ST parallelo a PQ, e l'altro S'T' perpendicolare a questa retta. In *secondo* luogo riflettiamo che, in tale caso, la eccentricità della ellisse diviene zero, e quindi anche quella della iperbola equilatera concentrica, la quale perciò deve ridursi a due rette, perpendicolari fra loro; dunque la iperbola stessa è appunto rappresentata dalle due rette ST, S'T'. La esattezza di questo risultamento, si riconosce cogli elementi della geometria senz'altro; e se per giungere all'attuale conseguenza, ci valemmo del teorema precedente, ciò fu per mostrare, come il medesimo corrisponde bene all' indicato caso particolare.

§ 33.

120.° Sappiamo (teorema XII) che gli assintoti della iperbola d'intersecazione, si trovano, guidando pel centro comune delle coniche omofocali due rette, le quali dividano in mezzo i due angoli adiacenti, uno acuto, l'altro ottuso, delle direzioni dei due sistemi di parallele tangenti. Ma trattandosi

delle due iperbole di tangenza, che appartengono alle medesime due date direzioni, sappiamo (teorema I) che queste posseggono ciascuna un assintoto parallelo alle direzioni stesse; vale a dire una di queste iperbole ha un assintoto parallelo ad una direzione, mentre l'altra iperbola lo ha parallelo all'altra delle direzioni stesse. Quindi dobbiamo concludere il seguente

Teorema XXI. *Avendosi due iperbole di tangenza, corrispondenti a due sistemi di parallele tangenti, e la relativa iperbola d'intersecazione; gli assintoti di questa, divideranno in mezzo gli angoli compresi fra i rispettivi assintoti delle iperbole di tangenza.*

121.° Riflettendo che tutte le iperbole dei luoghi geometrici di cui si parla, sono *equilatere*, e che in ciascuna delle medesime, gli assi dividono in mezzo gli angoli degli assintoti, facendo ciascun asse, in ognuna delle iperbole, un angolo di 45.° con ciascun assintoto della medesima; si conclude senza difficoltà dal teorema precedente, che gli *assi della iperbola d' intersecazione, dividono in mezzo gli angoli compresi fra gli assi delle due iperbole di tangenza.*

122.° Osserviamo inoltre, che tanto le due iperbole di tangenza, quanto quella d' intersecazione, passano tutte pei fuochi comuni alle coniche della serie; però è facile dimostrare, che non esiste altro punto comune a queste tre iperbole. In fatti ponendo l'origine delle coordinate nel centro delle coniche omofocali, abbiamo dalle (21) e (59), per le indicate tre iperbole equilatere, le seguenti equazioni

$$(69)\quad \begin{cases} x^2 - y^2 - 2xy\cot.2\beta - c^2 = o\ , \\ x^2 - y^2 - 2xy\cot.2\gamma - c^2 = o\ , \\ x^2 - y^2 - 2xy\cot.(\beta + \gamma) - c^2 = o\ , \end{cases}$$

la prima e seconda delle quali rappresentano le due iperbole di tangenza, appartenenti ai due sistemi di parallele tangenti, che formano rispettivamente coll'asse delle x, una l'angolo β, l'altra l'angolo γ; e la terza rappresenta la iperbola d' intersecazione, appartenente a questi due sistemi. Volendo trovare i punti d' intersecazione possibili fra due di queste tre curve, p. e. fra la prima e la seconda, le dovremo considerare coesistenti; perciò sottrando l'una dall'altra, otterremo la condizione

$$(\cot.2\gamma - \cot.2\beta)xy = o\ ,$$

che viene soddisfatta sia per $x = o$, sia per $y = o$.

Sostituendo questi valori, uno alla volta, nelle due proposte, avremo le altre seguenti, cioè

$$\text{per} \quad x = o \quad \text{la} \quad y^2 + c^2 = o \; , \quad \text{donde} \quad y = \pm c\sqrt{-1} \; ;$$

$$\text{e per} \quad y = o \quad \text{la} \quad x^2 - c^2 = o \; , \quad \text{donde} \; x = \pm c \; .$$

123.° Quindi le quattro coppie di valori, soddisfacenti alle due proposte, sono

$$(x = o \; , \quad y = + c\sqrt{-1}) \; ; \; (x = o \; , \quad y = - c\sqrt{-1}) \; ,$$

$$(x = c \; , \quad y = o) \; ; \; (x = - c \; , \quad y = o) \; .$$

Ognuno vede che queste ultime due coppie, poichè reali, sono le sole soddisfacenti per la coesistenza delle due proposte medesime; le quali avranno perciò solo questi due punti comuni: vale a dire le due iperbole di tangenza, s' intersecheranno scambievolmente solo nei due fuochi, comuni alle coniche della serie.

124.° Tutto ciò che fu detto, riguardo ai punti comuni alle due prime iperbole equilatere, deve ripetersi ugualmente per la prima e terza, come ancora per la seconda e terza delle iperbole stesse. Quindi concludiamo che quelle tre iperbole equilatere, date dalle (69), non hanno fra loro altri punti d' incontro, fuorchè i due fuochi delle omofocali, come volevamo dimostrare.

125.° Date due iperbole di tangenza, può immediatamente ottenersi la relativa iperbola d' intersecazione, senza neppure conoscere la corrispondente serie delle coniche omofocali; poichè si conoscono i fuochi ad esse comuni, nei quali s' intersecano le due iperbole, e poichè si conoscono gli assintoti della iperbola d' intersecazione. In fatti da quanto di sopra fu esposto, dovendo gli assintoti di questa iperbola, dividere in mezzo l' angolo , compreso fra i rispettivi assintoti delle due iperbole di tangenza, e dovendo quella stessa iperbola passare pei fuochi delle omofocali, pei quali passano anche le due date iperbole di tangenza; così la richiesta iperbola d' intersecazione, sarà completamente determinata: la sua costruzione poi si trova negli articoli 118°, e 119°, ove fu costruita una iperbola equilatera, supponendo cogniti, e gli assintoti, ed un punto pel quale debba essa passare.

§ 34.

126.° Fu stabilito (teorema IV), che la tangente fuocale ad una iperbola di tangenza, forma coll'asse della medesima un angolo doppio, di quello formato con questo asse dal sistema di parallele tangenti. Quindi trattandosi di due sistemi di parallele, avrà ciascuno la relativa iperbola di tangenza, ed il citato teorema si verificherà per ciascuno di essi. Riflettendo poscia, che la tangente fuocale alla iperbola d' intersecazione, appartenente a questi due sistemi di parallele tangenti, forma coll' asse delle x un angolo, eguale alla somma di quelli, che formano i due sistemi coll'asse medesimo, facilmente se ne dedurrà il seguente

Teorema XXII. *Guidando due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, la tangente fuocale della iperbola d' intersecazione, divide in mezzo l'angolo compreso fra le tangenti fuocali delle due iperbole di tangenza.*

127.° In fatti le tangenti fuocali delle iperbole di tangenza, comprendono rispettivamente, coll'asse trasverso delle coniche, gli angoli 2β, e 2γ; mentre la tangente fuocale della iperbola d' intersecazione, comprende coll'asse medesimo l'angolo $\beta + \gamma$. Dunque quest' ultimo angolo è medio aritmetico fra i due primi, come geometricamente si enuncia, col dire *divide in mezzo* nel teorema precedente, il quale viene delucidato dalla (fig. 10); ove però, ad evitare confusione, non sono disegnate le omofocali ellissi, ma soltanto le iperbole, pur esse omofocali. Il primo sistema di parallele tangenti viene rappresentato dalla direzione pa', la rispettiva iperbola di tangenza consiste nella H $s\,s'a'z'$Q H'$v\,v'b'y$ Q', e la sua tangente fuocale si esprime colla Za'U. Il secondo sistema di tangenti, viene rappresentato dalla direzione $b'p$, la corrispondente iperbola di tangenza è la L $m''a'\,h$ G G'$g\,b'r''$L', e la sua tangente fuocale si esprime colla Z'U'. In fine la iperbola d' intersecazione, appartenente a questi due sistemi di parallele tangenti, si riconosce nella $q\,a'$S'$p\,b'$ S'', che ha per tangente fuocale la RS. Ora bene si può nella figura stessa vedere, come quest'ultima tangente fuocale RS, divida in mezzo l'angolo Z'a'U, formato dalle due tangenti fuocali ZU, Z'U', appartenenti rispettivamente alle indicate due iperbole di tangenza.

128.° Avvicinandosi continuamente ad un retto, l'angolo compreso fra i due sistemi di parallele tangenti, le relative iperbole di tangenza si accosteranno fra loro sempre più; quindi coincideranno l'una sull' altra, quando l' angolo stesso riducasi a 90°, come già (§. 12, (33.°)) fu dimostrato. Le tangenti

fuocali delle iperbole di tangenza, coincideranno quindi esse pure l'una sull'altra ; però alle medesime debbono attribuirsi direzioni contrarie , come bene può vedersi nella (fig. 10), immaginandosi che nella medesima, ogni parallelogrammo di tangenza, si riduca in un rettangolo. Da tutto ciò facilmente si conclude il seguente

Teorema XXIII. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, due sistemi di parallele perpendicolari fra loro, e tangenti alle coniche stesse; le due tangenti fuocali, la prima appartenente all'*unica *iperbola di tangenza, e la seconda a quella d' intersecazione, formano un angolo retto fra loro.*

129.° La (fig. 7) mette in evidenza questo teorema; poichè in essa le direzioni perpendicolari fra loro, dei due sistemi di tangenti, sono rappresentate dalle $a'p$, ed $a'q$, l'unica iporbola di tangenza è la Q a' H Q$'$ b' H$'$, e la retta VZ è la sua tangente fuocale. La iperbola poi d' intersecazione, consiste nella T$'$ a' S T b' n, mentre la Z$'$V$'$ è la sua tangente fuocale. Ora si vede bene dalla figura stessa, come queste due rette ZV, Z$'$V$'$, sono perpendicolari fra loro. Nel caso attuale si riconosce altresì, che gli assi della iperbola d' intersecazione, coincidono cogli assintoti della unica iperbola di tangenza; e ciò chiaro si vede riflettendo, che i due assintoti dell'unica iperbola di tangenza, si trovano guidando pel centro O due rette F F$'$, ed F$''$ F$'''$, rispettivamente perpendicolari fra loro, e parallele ai due sistemi di tangenti. Gli assintoti poi della iperbola d' intersecazione , si avranno , guidando pel centro medesimo due rette A B, A$'$ B$'$, che dividano in mezzo gli angoli adiacenti delle rette F F$'$, ed F$''$ F$'''$. Quindi è manifesto che l'angolo compreso, tanto fra gli assintoti della iperbola di tangenza, quanto fra quelli della iperbola d' intersecazione, risulta di 45°; dunque gli assi di una qualunque di queste due iperbole, coincidono rispettivamente cogli assintoti dell'altra.

130.° Riflettendo che le tre iperbole indicate, cioè le due di tangenza, e la terza d' intersecazione, si possono intersecare soltanto nei due fuochi comuni alla relativa serie di coniche , e rammentando inoltre che la direzione di una curva in un dato punto, coincide con quella propria della tangente al punto stesso; vediamo senza difficoltà, che i due precedenti teoremi potrebbero enunciarsi complessivamente nell'altro seguente :

Teorema XXIV. *Guidando due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali*: 1.° *le rispettive due iperbole di tangenza, e quella d' intersecazione, s' incontrano nei due fuochi comuni, cosicchè la direzione di questa nel punto d' incontro, divide per metà l'angolo compreso dalle direzioni delle*

altre due di tangenza nel punto stesso. 2.° Se i due sistemi sieno fra loro perpendicolari, l'unica iperbola di tangenza, e quella d' intersecazione, s' incontreranno perpendicolarmente nei fuochi comuni alle coniche della serie stessa.

§. 35.

131.° La eccentricità c' dell'*unica* iperbola di tangenza, corrispondente ai due sistemi di parallele, ad angolo retto fra loro, cioè che formano, uno l'angolo β, l' altro l' angolo $\gamma = \beta + \frac{\pi}{2}$ coll'asse comune alle coniche omofocali (§ 6, (28.°)), e (§ 25, (80.°)), si esprime colla

$$c' = c\sqrt[4]{[2\text{sen}.(2\beta + \pi)]^2} = c\sqrt{(2\text{sen}.2\beta)} \ .$$

Inoltre la eccentricità c'' della iperbola d'intersecazione, viene data (§ 25, (80.°)) dalla

$$c'' = c\sqrt{[2\text{sen}.(\beta + \gamma)]} = c\sqrt{[2\text{sen}.(2\beta + 90°)]} = c\sqrt{(2\cos.2\beta)} \ ;$$

quindi si vede che nel caso di due sistemi di tangenti perpendicolari fra loro, le due iperbole, cioè l'unica di tangenza, l'altra d' intersecazione, generalmente parlando, avranno eccentricità diverse; il rapporto però loro sarà espresso da

$$c' : c'' = \sqrt{(\text{sen}.2\beta)} : \sqrt{(\cos.2\beta)} \ .$$

132.° Volendo che l'eccentricità medesime, divengano l'una eguale all'altra, dovrà essere

$$\text{sen}.2\beta = \cos.2\beta \ ,$$

lo che fornisce

$$\beta = \frac{\pi}{8} = 22°, 5 \ .$$

Ma se due iperbole equilatere posseggano la medesima eccentricità, sono esse uguali fra loro; dunque potremo concludere il seguente

Teorema XXV. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, due sistemi di parallele tangenti, perpendicolari fra loro, in guisa che uno di questi formi coll'asse trasverso delle coniche un angolo $\frac{\pi}{8}$; la unica iperbola di tangenza, cioè comune ai medesimi sistemi, uguaglierà quella d' intersecazione che ad essi corrisponde. Inoltre queste iperbole formeranno un insieme, simmetrico rispetto ad ognuno degli assi delle omofocali.*

La fig. (24) serve a dichiarare il teorema in proposito, nella quale sono a', b'

i fuochi comuni delle coniche, rappresentate quì da solo quattro ellisse; ma potrebbero esservi anche delle iperbole. Le direzioni dei due sistemi di parallele tangenti, e perpendicolari fra loro, sono T T', e T' S. Inoltre l'angolo compreso fra il sistema T T' e l' asse delle x, cioè l' angolo T'GO $= \frac{\pi}{8}$; mentre l'angolo compreso fra l'altro sistema T'S e l'asse medesimo, cioè l'angolo T'H X$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5}{8}\pi$. La iperbola di tangenza comune a questi due sistemi di parallele tangenti, è rappresentata dalla Q a' M H Q' b' M' H', mentre la iperbola d'intersecazione, pei medesimi due sistemi, consiste nella R a'P R'b'P'. Queste due iperbole sono perfettamente uguali fra loro, e formano un insieme simmetrico, rispetto ad ognuno degli assi delle coniche omofocali. Così fatta simmetria si riconosce nel seguente modo: essendo β l'angolo formato da uno dei due sistemi coll' asse delle x, avremo per la equazione della unica iperbola di tangenza la (21), cioè la

$$x^2 - y^2 - 2xy\cot.2\beta - c^2 = o\ .$$

Se poi vogliamo la iperbola d' *intersecazione*, fa d'uopo nella (59), equazione generale di questa curva, sostituire per γ il suo valore $\beta + \frac{\pi}{2}$, lo che trasforma l'equazione medesima nella

$$x^2 - y^2 + 2xy\text{tang}.2\beta - c^2 = o\ ,$$

nella quale facendo $\beta = \frac{\pi}{8}$, come vuole il caso in proposito, avremo evidentemente le

$$\cot.2\beta = \cot.2\,\frac{\pi}{8} = 1\ ,$$

$$\text{tang}.2\beta = \text{tang}.2\,\frac{\pi}{8} = 1\ ;$$

e l'equazioni medesime si ridurranno alle seguenti

$$x^2 - y^2 - 2xy - c^2 = o\ ,$$

$$x^2 - y^2 + 2xy - c^2 = o\ .$$

L' insieme delle curve rappresentate da queste due equazioni, dev'essere simmetrico rispetto l' asse delle x; poichè cangiando in una di esse y in $-y$,

l'equazioni medesime coincidono fra loro: e dev'essere anche simmetrico rispetto l'asse delle y, perchè cangiando in una di esse x in $-x$, l'equazioni medesime coincidono eziandio l'una sull'altra.

133.° Quando le coniche omofocali divengano parabole, tanto la iperbola di tangenza, quanto quella d' intersecazione, riduconsi a rette (teoremi III, e XIV), che passano pei fuochi alle stesse parabole comuni; per conseguenza le *tangenti fuocali* si confondono colle rette stesse ; quindi è chiaro che in tal caso, il teorema XXV si trasforma nell'altro seguente

Teorema XXVI. *Guidando ad una serie di parabole omofocali, due sistemi di parallele tangenti; la retta d'intersecazione divide in mezzo l'angolo, compreso fra le due rette, ognuna luogo geometrico dei punti di tangenza.*

La (fig. 11) dichiara questo teorema; poichè in essa viene rappresentata una serie di parabole, delle quali b' è il comune fuoco, essendo

$$g\mathrm{H}\ ,\quad \mathrm{G'H'},\ \ldots, \qquad\qquad g\mathrm{K}\ ,\quad \mathrm{G'K'},\ \ldots,$$

due sistemi di parallele tangenti alle parabole omofocali. Le due rette di tangenza poi sono espresse dalle $\mathrm{G}b'$, e $\mathrm{H}b'$; mentre la retta d' intersecazione consiste nella $\mathrm{M}b'$: e si vede chiaramente come questa retta, divide in mezzo l'angolo compreso dalle rette di tangenza $\mathrm{G}b'$, ed $\mathrm{H}b'$.

§ 36.

134.° Per vedere se la iperbola d' intersecazione, possa confondersi con una delle due iperbole di tangenza; basterà vedere se la terza delle (69) possa coincidere con una delle due prime. Adunque, volendo far coincidere, p. e., la prima colla terza, dovrà essere

$$\cot.2\beta = \cot.(\beta + \gamma)\ ,$$

cui può soltanto soddisfarsi, ponendo

$$2\beta = \beta + \gamma\ , \qquad \text{ovvero} \qquad 2\beta = \beta + \gamma + \pi\ .$$

Le quali forniscono rispettivamente le

$$\beta = \gamma\ , \quad \beta = \gamma + \pi\ ;$$

ciò richiede che i due sistemi di tangenti sieno paralleli fra loro.

135.° Questo risultamento, che potrebbe sembrare inesatto, perchè nel caso di due sistemi di tangenti, fra loro paralleli, non può verificarsi la iperbola d' intersecazione, si deve spiegare come siegue. Ammettendo che la quan-

tità $\beta - \gamma$ sia piccolissima , i due punti di contatto delle tangenti con una delle coniche omofocali , si troveranno vicinissimi fra loro ; ma essi non si confonderanno. In fatti si vede , che il punto d' intersecazione fra le due tangenti esiste pur esso , trovandosi vicinissimo ai punti di tangenza, e sul tratto curvilineo che fra loro s' interpone ; quindi è che la iperbola d' intersecazione , dovrà trovarsi fra le due iperbole di tangenza vicinissime fra loro. Da ciò risulta che, avvicinandosi la differenza $\beta - \gamma$ senza fine al valore zero, le due iperbole di tangenza, e quella d' intersecazione, si accosteranno sempre più l'una all'altra, e si confonderanno insieme quando abbiasi $\beta = \gamma$.

136.° La coincidenza della iperbola d' intersecazione, con una di quelle di tangenza, è per tanto impossibile; ma essa deve intendersi come un caso limite, il quale perde il suo significato, allorchè i due sistemi di tangenti riescono esattamente paralleli uno all'altro.

§ 37.

La parabola è un caso distinto delle coniche, quindi le ricerche precedenti, relative alle serie di ellissi e d' iperbole, quando si vogliano applicare alle serie di sole parabole, riescono più semplici. Crediamo utile per tanto, prima di terminare questa terza parte , indicare l' analisi che serve a raggiungere, per una serie di sole parabole omofocali, la linea d' intersecazione, spettante a due sistemi di parallele, tangenti alle parabole stesse.

137.° L'equazione (9) della parabola , che ha nel fuoco la origine delle coordinate, riducesi alla

$$(70) \qquad y = \tfrac{1}{2} \sqrt{[p(p + 4x)]} \; ;$$

e la equazione della tangente a questa curva, che forma coll' asse della medesima un angolo α, si ottiene, con eliminare dalla (47), equazione generale della tangente ad una qualunque curva, cioè dalla

$$(71) \qquad y' = x' \text{tang.}\alpha + y - x \text{tang.}\alpha \; ,$$

i due simboli x, y, mediante la (70), e la

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\alpha \; .$$

Nel caso attuale abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}.\alpha = \sqrt{\left(\frac{p}{p + 4x}\right)} ,$$

donde

$$x = \frac{p}{4} (\cot.^2\alpha - 1) ;$$

quindi, effettuando nella (71) la sostituzione indicata, otterremo successivamente le

$$y' = x'\text{tang}.\alpha + \frac{1}{2} \sqrt{[p(p + 4x)]} - x\text{tang}.\alpha ,$$

$$y' = x'\text{tang}.\alpha + \frac{1}{2} p.\cot.\alpha - \frac{p}{4} (\cot.^2\alpha - 1)\text{tang}.\alpha ,$$

$$y' = x'\text{tang}.\alpha + \frac{1}{4} p(\cot.\alpha + \text{tang}.\alpha) ,$$

ovvero la

$$(72) \qquad y' = x'\text{tang}.\alpha + \frac{p}{2\text{sen}.2\alpha} ,$$

equazione che rappresenta quella fra le tangenti alla parabola, che forma coll'asse delle x l'angolo α.

138.° Venendo quindi a determinare la linea d' intersecazione, che si riferisce ai due sistemi di parallele tangenti, e formanti rispettivamente gli angoli β e γ coll'asse delle parabole omofocali, dobbiamo eliminare il parametro p dalle

$$(73) \qquad y' = x'\text{tang}.\beta + \frac{p}{2\text{sen}.2\beta} , \qquad y' = x'\text{tang}.\gamma + \frac{p}{2\text{sen}.2\gamma} ,$$

appartenenti rispettivamente, a motivo della (72), alle due tangenti di qualunque iperbola delle omofocali. Per tanto avremo le

$$p = 2(y' - x'\text{tang}.\beta)\text{sen}.2\beta , \qquad p = 2(y' - x'\text{tang}.\gamma)\text{sen}.2\gamma .$$

quindi sarà

$$(y' - x'\text{tang}.\beta)\text{sen}.2\beta = (y' - x'\text{tang}.\gamma)\text{sen}.2\gamma ,$$

ovvero

$$y' = 2 \frac{\text{sen}.^2\beta - \text{sen}.^2\gamma}{\text{sen}.2\beta - \text{sen}.2\gamma} x' .$$

Però abbiamo (a)

(a) Lotteri, Vol. 1.°, p. 361, formula 45, e 42.

$$\text{sen.}^2\beta - \text{sen.}^2\gamma = \text{sen.}(\beta + \gamma)\text{sen.}(\beta - \gamma) \;,$$

$$\text{sen.}2\beta - \text{sen.}2\gamma = 2\text{sen.}(\beta - \gamma)\cos.(\beta + \gamma) \;,$$

laonde sostituendo, e sopprimendo gli apici come ora inutili, si avrà la

$$(74) \qquad y = x\,\text{tang.}(\beta + \gamma) \;;$$

equazione che rappresenta una retta passante per la origine, cioè pel comune fuoco, la quale comprende l'angolo $\beta + \gamma$ coll'asse, come già dal teorema XVI sapevamo.

139.° La retta che divide in mezzo l'angolo, compreso fra le due tangenti di una qualunque loro coppia, date mediante le (73), forma evidentemente (§ 22, (68.°)) coll'asse delle x l' angolo $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Da ciò dobbiamo concludere che la retta passante pel fuoco delle parabole omofocali, e formante angoli eguali colle due tangenti, ossia diretta secondo la bisettrice dell'angolo compreso fra queste, deve avere per equazione la

$$(75) \qquad y = x\,\text{tang.}\,\frac{\beta + \gamma}{2} \;.$$

Quindi resta dimostrato, che la retta d' intersecazione (74), forma coll'asse delle parabole, un angolo doppio, di quello formato coll'asse medesimo dalla retta (75), bisettrice dell'angolo, compreso dalle indicate due tangenti.

140.° Immaginando per tanto una sola parabola, potremo enunciare il seguente

Teorema XXVII. *Da qualunque punto del prolungamento di un raggio vettore di una parabola, guidando due tangenti a questa, esse faranno angoli eguali, colla retta che forma coll'asse della data parabola un angolo, metà di quello formato coll'asse medesimo dal raggio vettore stesso.*

Abbiamo la dichiarazione grafica di questo teorema, osservando (fig. 25) che a' rappresenta il fuoco della parabola, e che a'X rappresenta l'asse della medesima, essendo a'G un suo raggio vettore prolungato. Dai tre punti qualunque A, B, C di questo prolungamento, sono guidate le coppie di tangenti alla parabola stessa, cioè le A M, A M' dal punto A, le B N, B N' dal punto B, e le C P, C P' dal punto C. Quindi si vede che le rette A R, B R', CR'', rispettivamente bisettrici degli angoli, formati dalle tangenti medesime in ciascuna loro coppia, sono paraliele fra loro, e fanno coll'asse a'X angoli,

23 fig 25

ciascuno metà di quello formato, dal raggio vettore G a' coll'asse medesimo, cioè si vede graficamente verificata la seguente uguaglianza

$$\mathrm{A\,R}\,a' = \mathrm{B\,R}'a' = \mathrm{C\,R}''a' = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}\,a'\mathrm{X}'.$$

§ 38.

141.° Data una serie di parabole omofocali, ed una retta che passa pel comune loro fuoco, proponiamoci di conoscere il sistema, od i sistemi di coppie di parallele tangenti, che hanno la retta medesima per luogo geometrico delle intersecazioni, relative a quei sistemi. Dicasi α l'angolo compreso fra la data retta, e l'asse delle parabole omofocali; prendendo in considerazione le (74), (75), si vede che tutti quei sistemi di coppie di parallele tangenti, soddisfaranno all'attuale quisito, pei quali la somma $\beta + \gamma$ uguaglierà l'angolo α. Siccome poi rimane invariata la (75), cioè la retta bisettrice; così vediamo che tutte quelle coppie di tangenti, formanti angoli eguali con una retta, comprendente coll' asse delle parabole omofocali un angolo, metà di quello compreso dalla (74), cioè dalla retta data, col medesimo asse, hanno la stessa retta d' intersecazione.

Mediante la fig. 11, si dichiara graficamente quanto fu ora concluso; poichè nella medesima si trovano due sistemi di coppie di parallele tangenti, dei quali uno è rappresentato dalle coppie

$$(g\mathrm{H},\ g\mathrm{K})\ ;\ (\mathrm{G'H'},\ \mathrm{G'K'})\ ;\ (\mathrm{G''H''},\ \mathrm{G''K''})\ ;\ \ldots\,.$$

e l'altro dalle

$$(c\,d,\ c\,d')\ ;\ (c'e,\ c'e')\ ;\ (c''f,\ c''f')\ ;\ \ldots\,.$$

mentre la $b's$ rappresenta la retta della equazione (75). Si verifica poi nella figura medesima, che la retta $g\,b'$ rappresenta il geometrico luogo delle intersecazioni, che appartenenti ai due sistemi di coppie sopra indicati; ed altresì che la direzione g S di tutte le bisettrici, rimane invariabile per qualunque degli angoli, formati dalle coppie di tangenti, guidate nella figura stessa.

(*Continuerà*).

COMUNICAZIONI

Monsig. Nardi espose i quattro progetti del telegrafo circumterracqueo; paragonò i tratti immensi, più o meno lunghi, le difficoltà, le possibilità, ed i vantaggi dei progetti stessi.

Il R. P. Secchi parlò sulla pioggia di sabbia, e sulla caligine degli ultimi giorni di febbraio testè decorso.

Articoli favorevoli alla memoria delle isotermiche, pubblicata dal sig. Serra–Carpi. - Comunicazione del prof. P. Volpicelli.

Nella nostra tornata del 3 dicembre 1865, pag. 38 di questo volume, ebbi l'onore di comunicare all'accademia gli articoli, che in alcuni giornali scientifici comparvero, favorevoli alla pubblicazione della memoria del sig. ingegnere Serra–Carpi, sulle linee isotermiche della nostra penisola. Credo che il continuare in queste comunicazioni, possa riescire gradito all'accademia; perciò mi permetto di osservare primieramente, che nel N.° 36, pag. 14, della meteorologia italiana, si trova un altro articolo, il quale prende in considerazione onorevole molto, il citato lavoro dello stesso ingegnere, per cui riceve ora egli gratuitamente, cogli arretrati, lo stesso giornale.

In secondo luogo il ch. astronomo in Modena, sig. prof. Domenico Ragona, nella sua recente memoria sulla distribuzione della temperatura in Italia, fra i vari argomenti che imprende a trattare, riporta pure una sua formola, per mezzo della quale, giunge ad esprimere la temperatura media di qualunque stazione italiana, ridotta al livello del mare. In questa formula, la indicata temperatura, è una funzione lineare del coseno della latitudine, e del seno della longitudine di una stazione.

Inoltre il prof. medesimo, a mostrare come la stessa formula si accordi colla sperienza, giovasi quasi unicamente delle cifre riportate dal Serra-Carpi nella sua citata memoria, quindi mette in evidenza l'accordo perfetto di queste, con quelle dallo stesso astronomo calcolate, mediante la formola da lui proposta.

Finalmente il sig. Ragona, in questa sua interessante memoria, fa menzione di un'altra formula, proposta dal celebre Barone Plana, colla quale si giunge a dedurre, che la temperatura media di Torino, ridotta al livello del mare,

sarebbe di 14.°, 41 centigradi, e questo risultamento è vicinissimo a quello del sig. Serra-Carpi, calcolato secondo le osservazioni meteorologiche della città stessa.

In una parola tutta la parte della memoria del sig. Ragona, ove trattasi delle isotermiche della nostra penisola, costituisce una onorevole conferma, tanto delle cifre, quanto dalle teoretiche vedute, riportate dal nominato ingegnere, nel suo lavoro su questo argomento.

Alle quali onorevoli testimonianze vuolsi altresì aggiungere, che l'Annuario scientifico ed industriale italiano, accenna con espressioni lusinghiere al lavoro sulle isotermiche dell' Italia dell' ingegnere nominato, ed ammira come abbia potuto egli raccogliere le osservazioni di 74 italiane stazioni.

Da ultimo vogliamo chiudere questa comunicazione, colle seguenti parole, che il ch. prof. Magrini profferiva nell'ateneo veneto, sul principio del suo dotto rapporto circa il lavoro del Serra-Carpi (1), dicendo « Trattò que-
» st'argomento, nuovo per l'assieme, con tanto amore e con tale cura, ac-
» cortezze di vedute, ed esattezza e rigore di deduzioni, da doversegli at-
» tribuire maggiore benemerenza dagli italiani, di quella che egli vuole mo-
» destamente riservarsi, dichiarando di voler porre una piccola pietra per il
» grande edificio. Ed invero, a mio credere, di questo scientifico edifizio,
» egli non solo, ideò il disegno e la pianta, ma eresse qua e colà colonne
» e mura robuste; cosicchè coll'opera del tempo, e delle osservazioni coscien-
» ziose degli scienziati della penisola tutta, potrà andare al desiderato com-
» pimento con onore, frutto dei buoni studi ».

---

(1) Vedi Atti dell'Ateneo Veneto, serie II, vol. III, puntata seconda, giugno 1866, pag. 167.

COMMISSIONI

Sull'opera del sig. Comm. Alessandro Cialdi, *che ha per titolo : Sul moto ondoso del mare, e sulle correnti di esso, specialmente su quelle littorali.*

RAPPORTO

(Commissari sig.[ri] prof.[ri] Comm. N. Cavalieri S. Bertolo, cav. G. Ponzi, P. Volpicelli, P. A. Secchi *relatore*).

È assai raro ai giorni nostri l'avere ad occuparsi di opere elaborate, che sieno il frutto di molto studio, paziente lettura, e lunga esperienza : attualmente si preferisce la brevità, e la diffusione di giornali, alle opere di fondo e di fatica. Ma certe grandi questioni non possono trattarsi a questo modo; e fortunatamente noi abbiamo l'occasione di occuparci oggi di una di queste opere serie, fatta sulla natura, e gli effetti del moto ondoso del mare, e delle correnti, dal nostro collega il sig. comm. Alessandro Cialdi.

Il volume che abbiamo sott'occhio di 693 pagini, è il prodotto di molti anni di studio, e di fatica. Cominciato fin dal 1853 come semplice lettera, fu notabilmente aumentato, e presentato all' accademia nostra nell' anno 1855, e inserito ne' suoi atti. Questo lavoro nella presente edizione , è divenuto un'opera voluminosa, che contiene nuovi trattati, e racchiude tesori di notizie indispensabili ai marini, fatti importanti pei geologi, pei fisici, e norme preziose per le costruzioni idrauliche marittime de' porti.

Rammenterete che l'accademia, nell'approvare il rapporto della presente commissione, come risulta dagli atti dell'accademia, v. Tom. VI, p. 183, compilato per ordine dell' accademia medesima sul lavoro del Cialdi nel 1855 (epoca in cui non era esso ancora fra i membri ordinari dell'accademia), convenne che si facesse istanza presso il ministero del commercio e dei lavori pubblici, onde uno studio tanto utile, e così felicemente iniziato dall'autore, fosse promosso tra i nostri marini; ed una lettera del nostro presidente accompagnava tale accademica risoluzione all' indicato ministero. Questa incontrò favorevole accoglienza , ed il Cialdi venne d' officio incaricato a continuare gl' intrapresi studî, ed oggi egli sottopone al giudizio dell' accademia

il risultamento delle ulteriori sue ricerche, prima di presentarlo al ministero stesso.

L'Autore in prova delle sue teoriche, riunisce due elementi, che di rado vanno insieme; cioè immensa lettura e copia di materiali, dedotti dalle altrui opere, e gran numero di osservazioni, tutte sue proprie, fatte tanto durante le lunghe navigazioni di mare e di fiumi , in cui ha speso gran parte della sua vita, quanto nell'occasione di costruzioni de' porti, di cui si è ora occupato per commissione da esso ricevuta.

È questa dunque un'opera vasta e profonda, di cui difficile sarebbe dare un sunto: cercheremo tuttavia di esporre quanto basti a formarne una idea.

Esordisce egli coll'analisi delle opere degli autori, che lo hanno preceduto nella teorica del moto ondoso; ne forma delle categorie, che, stante la diversità delle vedute, chiama egli scuole, dividendole per nazioni. Da questa parte del lavoro si desume la storia, e lo stato della scienza, intorno all'argomento che tratta.

Sul movimento delle molecole nella massa ondeggiante, non si ferma, e perchè crede mancare su ciò una sufficiente sperienza , oltre ad una compiuta teorica, e perchè suo precipuo scopo è la investigazione sul complesso del moto ondoso, e sugli effetti di esso.

Passa poi a considerare gli effetti del vento in mare, i contrasti di correnti tra correnti, di onde tra onde, esamina l'azione del vento nelle grandi tempeste alla superficie del mare, e termina col notare gli effetti del vento contro le rive.

Quindi, preso ad esame quanto si è osservato circa l'altezza, la lunghezza, e la velocità delle onde , raccoglie le misure trovate dai navigatori , e manifesta esistere de' vuoti nelle osservazioni fatte, proponendo il modo di provvedervi.

Ma lo scopo principale dell'autore, quello è di mettere sotto il vero loro punto di vista, i fenomeni delle onde del mare, per trarne la spiegazione di molti fatti, tanto relativi alla navigazione, qnanto alla costruzione de' porti.

Tre sono i punti principali, su cui ci fermeremo brevemente.

1.° La profondità nella quale si risente il moto ondoso nel mare.

2.° Il moto di trasporto prodotto dalle onde, e dai flutti, ossia la teorica del flutto-corrente.

3.° L'applicazione delle predette dottrine alla nautica, ed all' idraulica.

In quanto alla profondità , cui riesce sensibile il moto ondoso , egli di-

delle masse liquide, i quali non costituiscono delle correnti ordinarie; perchè in realtà essi sono movimenti parziali, e variabili in direzione ed in forza; perchè cominciano, e finiscono sempre in mezzo al mare, ossia non hanno direzione determinata da una data estremità all' altra di punti fissi, come le correnti ordinarie; e perchè non se n'è potuto ancora stabilire la regola per istruzione dei naviganti.

A questa importante questione il Cialdi ha diretto un particolare studio. Egli, dai fatti raccolti dal Maury stesso, e da altri non pochi, tolti dai giornali dei più accreditati navigatori, dimostra che quei movimenti della superficie del mare, sono prodotti dalle onde incalzate da forte vento, e conclude:

« Che se la sola azione del vento e delle onde, non si volesse credere
» sufficiente, come causa unica dei vastissimi movimenti di cui parla il Maury,
» io non pretendo di escludere interamente quella che egli mette in campo;
» . . . anzi le due spiegazioni potrebbero esistere entrambi, e forse darsi la
» mano, purchè non siano in avvenire confuse le ordinarie correnti, coi
» particolari e straordinari moti dovuti alle onde. »

Dopo questa conclusione, e dopo le antecedenti dimostrazioni, dove l'autore ha parlato dell' incognito moto di trasporto straordinario, cui soggiacciono i bastimenti, malgrado la scienza e l'esperienza di chi li dirige, e dopo l' esposizione dell' insufficienza dei mezzi, proposti per correggere il veduto errore di stima, provato i gravi danni che l' umanità, il commercio, e lo stato risentono da questo errore, riepiloga nel modo seguente:

« Egli è certo, che in tempo di venti forti, l' acqua, nella parte supe-
» riore de' marosi, è sensibilmente spinta in avanti. Spesso vedesi la super-
» ficie delle grandi onde intaccata da gran numero di piccoli flutti, i quali
» frangendosi a volute, fanno biancheggiare il mare; fenomeno da indicarsi
» col titolo di *mare a montoni* . . .

« Dunque nei detti casi devesi far entrare nel conto di stima del ba-
» stimento, l'elemento di trasporto dovuto ai marosi, interi o franti che sieno;
» il quale avrà più o meno valore, secondo la forza, la durata e l'estensione
» del vento, e sarà adatto a superare, nei casi di vento furioso e continuato,
» quattro miglia e più l'ora.

» Con questo nuovo studio su i trasporti straordinarî, giungerassi a di-
» minuire gran numero di quei secondarî corsi di acqua, di cui oggi, in tutte
» le direzioni, sono irrigate le carte correnti, siccome sparirono già gran nu-
» mero di quelle seccagne, di cui erano seminate le carte dell' Oceano, per-

» chè sarà determinata la vera causa di ogni trasporto. Si è veduto in fatti
» che si ritengono per correnti ordinarie quei trasporti, i quali sono dedotti
» dalla differenza del cammino di stima con quello osservato, ovvero dal rin-
» venimento di bottiglie gettate in un dato punto, ed in altro raccolte; men-
» tre in verità, cotesti trasporti, possono essere soltanto movimenti parziali
» e temporanei, dovuti alla forza e durata del vento, ora in questa, ora in
» quella direzione. Per sì fatta via sarà data spiegazione a quell' *incognito moto*
» *di trasporto*, come l'annunziava de Courtanvaux, a quell'*agente occulto*, come
» lo chiamava Macarte, a quella *fin quì ignota ma fatale corrente*, come si
» esprimeva il Piddington , a quell' *improviso misterioso impulso o spinta* ,
» come dice lo Hall, a quel *guadagno di flusso*, come lo qualifica il Keller,
» in somma si sapranno calcolare quelle stravaganze di forza, e di direzione,
» che verificansi anche nei paraggi di correnti costanti. Stravaganze che sor-
» prendono, inquietano i più esperti navigatori, troppo spesso troncano la vita
» a migliaia di generosi, intelligenti, e robusti cittadini, e distruggono milioni
» di capitali, necessari ed attesi dal commercio e dallo stato, e che hanno fatto
» dire a Vicendon Dumoulin, nel render conto delle rotte delle corvette l'Astro-
» labe e la Zèlée, comandate da d' Urville, che *il lettore sarà forse maravigliato*
» *delle differenze che potrà notare, sia nella forza, sia nella direzione delle*
» *correnti, dedotte dalle rotte delle corvette; ma noi crediamo dovere avvertire*
» *in antecedenza, che tutti questi calcoli sono stati scrupolosamente riveduti, e*
» *che queste anomalie devono necessariamente riferirsi agli errori delle stime*
» *fatte col solcometro, e la bussola* »: errori che sono risultati molte volte, mi
» sia lecito di soggiungere , perchè non si è tenuto conveniente conto del
» moto di trasporto di massa, causato dai marosi ».

Ma un'altra causa di questo trasporto si ha presso il lido, a cagione della reazione del fondo.

La quantità di azione, o forza viva, che anima la massa dell'onda, allorchè questa da un mare profondo giunge presso il lido, trovasi necessariamente diffusa in una massa diversa, e quindi deve aumentare la celerità delle molecole della nuova massa minore, onde resti costante il prodotto mv^2. Di più l'ostacolo incontrato dalla parte inferiore della massa, fa che la velocità molecolare non restata estinta presso al fondo, venga comunicata alla superficie; e così quel piccolo moto orbitale, che anche teoricamente sempre trovasi nell'onda, viene a trasformarsi in moto traslatorio della massa intera, e ad avere alla superficie notabile effetto per la navigazione.

Benchè la teorica di questo fatto sia forse un poco oscura, esso però non è men certo; e il nostro autore, dopo averlo sviluppato, e reso evidente con una ricca serie di fatti, si riassume dicendo :

» Inoltre ho voluto trattare nel modo il più manifesto, l'esistenza di eguale
» fenomeno di trasporto nelle onde *anche senza vento*, ma apprezzabile per
» l'uso della navigazione, in quei luoghi *soltanto*, ove i marinari con verità,
» ma con erronee espressioni, dicono: *i frangenti attirano il bastimento*; *la*
» *corrente tira a terra*; *la calamita attrae in terra i bastimenti* ; ossia ove
» il fondo del mare non permette ad esse onde di svilupparsi liberamente ;
» il che in generale, e nei grossi tempi, accader deve dal ciglio delle ghir-
» lande dei terreni avventizi sino alla riva, e con rapida progressione: feno-
» meno che ho chiamato *flutto-corrente della superficie*. E pure di questo
» trasporto, ho, in genere, accennato ad un valore; acciocchè siano aggiunti
» i dati per correggere anche questa seconda importante causa di sinistri ,
» ed acciocchè l'una e l'altra dimostrazione serva almeno a convincere ognuno,
» della grande influenza dei fenomeni, di cui ho ragionato, del bisogno che
» si ha del ripetuto lavoro, e della utilità che da esso ricaverebbe la navi-
» gazione di altura, non che quella di costa ».

Le prove di questi movimenti sono analizzate con molta estensione, per la loro importanza dal nostro autore , e convalidate con moltissime autorità ed osservazioni.

Dopo aver stabilito questi due grandi principi, che il moto ondoso si propaga a grandi profondità , e che esso può dare origine a una vera corrente (che l'autore chiama flutto-corrente) , esso passa alle importanti applicazioni di queste dottrine :

E primieramente ne risulta essere indispensabile ai marini, tener conto nella navigazione per istima di questo trasporto di flutti, anche in alto mare; ed esorta però i navigatori a stabilire colla sperienza gli elementi necessari a questo calcolo , che per comodità dovrebbe ridursi a tavole, con cui correggere facilmente la rotta del bastimento. Il qual calcolo si farebbe facilmente, dietro la conosciuta velocità del vento per l' alto mare.

Nei luoghi poi ove riesce sensibile la influenza del fondo, per generare il flutto-corrente , dovrà tenersi conto della direzione e volume delle onde rapporto alla costa.

L'autore pure crede, che a tal moto possa attribuirsi taluno di que' rimescolamenti di masse d'acque marine, che sono stati interpretati prima come

deviazioni delle correnti, e specialmente della corrente del Golfo. Questo pure può essere di gran servizio ai marinai, per non prendere abbaglio e confondere le correnti sistematiche dell'Oceano, cogli accidentali trasporti dovuti ai flutti.

Ma una delle cose più importanti, e su cui l'autore anche si trattiene a lungo, è l'influenza che ha questo trasporto, prodotto dal moto ondoso, nelle vicinanze dei lidi, per l'interrimento de'porti, e specialmente di quelli costruiti alle foci de'fiumi.

Tutti sanno come interrimenti così fatti, siano fatali a queste opere idrauliche, e come i mezzi finora indicati per evitarli sieno riusciti vani. Da valenti idraulici sono stati creduti originati dal trasporto delle materie, fatto dalla corrente littorale detta del Montanari. Ma il nostro autore mostra l' insufficienza di tal causa, con molti argomenti; e invece, esaminando gli effetti del trasporto delle onde, conclude che a queste si deve principalmente.

Non possiamo intraprendere a sviluppare le sue prove, che sono assai copiose ; solo diremo che gli interrimenti dipendendo dal vento dominante, e non dalla direzione della corrente, mostrano essi stessi che se questa ha pur qualche influenza, non è certamente quella che in fine ha la vittoria.

Da questo consegue che, a riuscire nella impresa di tali porti , è mestieri avere in vista: 1.° di dar loro tale una disposizione, che il flutto-corrente non tenda coi suoi trasporti di materiali a colmarli ; 2.° di far agire il flutto-corrente stesso a spurgarli.

A tale effetto l'autore offre un sistema di costruzione assai proprio di sua invenzione, e che sancito da illustri ingegneri idraulici, sta ora effettuandosi pel porto di Pesaro : ma non soltanto i nostri piccoli porti sono minacciati da tal nemico. L' opera più colossale che ora sta eseguendosi, cioè il gran canale dell' istmo di Suez, è minacciato di sollecita inoperosità da questo nemico, assai poderoso in quei paraggi. L'autore quindi prende in seria considerazione questo disastro, lo pondera molto, e discute i mezzi proposti per impedirlo, tutti, a quanto mostra la pratica del passato , insufficienti e costosissimi. Quello per tanto che in piccola scala è stato adottato per Pesaro, sarebbe forse il solo che potrebbe riuscire anche pel Porto-Saido. La sua proposta è tanto più degna di essere applaudita e sperimentata, in quanto che l'eseguirla non porterebbe nessun ulteriore dispendio, nè lavoro gran fatto diverso da quello finora progettato; e quando riuscisse in quelle vaste proporzioni, certamente sarebbe di una incalcolabile utilità, e anche mancando di effetto, nulla o quasi nulla si perderebbe.

È tale in poche parole l' idea di questa opera, che noi non esitiamo di raccommandarla tanto ai marini, quanto ai governi illuminati, per profittarne; e concludiamo coll' invitare l'accademia a volere far plauso a questo lavoro, e riconoscendolo utile, volerlo presentare come tale al ministro del commercio, della marina, e lavori pubblici, assicurandolo dell' avere l' autore fatto tale opera, che può grandemente giovare l' arte nautica, ed alla scienza idraulica, in relazione alle provvide insinuazioni, che il medesimo autore ha ricevute dal ministro stesso, allorchè fu da esso invitato a proseguire ed ampliare questi suoi pregevoli studî.

Le conseguenze di questo rapporto, furono approvate ad unanimità dell'accademia.

CORRISPONDENZE

L' Emo. e Rmo. sig. Cardinale Altieri, coll'onorevole suo dispaccio del 17 febbraio 1866, N.° 4279, manifesta l'approvazione sovrana, per la elezione del sig. prof. astronomo Lorenzo Respighi, a socio ordinario dell'accademia nostra.

Il sig. senatore Élie de Beaumont, segretario perpetuo dell'accademia delle scienze nell' I. Istituto di Francia, ringrazia per gli Atti de' Nuovi Lincei ricevuti dall'accademia stessa.

Il sig. Spallanzani, segretario generale della R. accademia di scienze, lettere, ed arti di Modena accompagna in dono con una sua lettera, varie pubblicazioni dell'accademia stessa.

Il sig. prof. Lorenzo Respighi, con sua lettera diretta al nostro sig. presidente, ringrazia per essere stato eletto uno dei trenta soci ordinari Lincei.

La signora Emilia Forchhammer, ed il sig. dottore Giovanni Forchhammer, danno parte della dolorosa perdita, fatta per la morte del nostro corrispondente straniero, il chiarissimo sig. dott. Giovanni Giorgio Forchhammer, rispettivamente marito e padre loro. Questa perdita, lamentevole anche per l'accademia nostra, ebbe luogo a Copennaghen nel 14 dicembre 1865.

Il sig. Filippo Bornia, con una sua lettera, fa giungere in dono all'acca-

demia, il ritratto fotografico, del defunto nostro collega prof. D. Ignazio Calandrelli.

Il sig. cav. Antonio Coppi, presentò in dono, una copia del suo discorso agrario, letto nell'accademica tornata Tiberina del 15 di gennaio del 1866.

La università Carolina di Lund, città della Svezia, per mezzo del suo bibliotecario sig. E. W. Berling, fa giungere in dono i primi due volumi degli atti relativi alla università stessa.

La società imperiale di scienze, agricoltura, ed arti di Lilla, spedisce all' accademia nostra il programma dei concorsi ai premi pel 1866, e per gli anni seguenti.

L'accademia di Archeologia del Belgio, di concerto colla società francese di archeologia, spedisce il programma del congresso archeologico, che avrà luogo in Anversa, e che dovrà durare dal 12 agosto 1866, a tutto il 21 dello stesso mese, invitando ad intervenire.

COMITATO SEGRETO

Il comitato accademico propose per soci corrispondenti stranieri gli scienziati seguenti:

Signori { De Saint Venant, a Parigi,
Dausse, a Parigi,
Le Joulis, a Cherbourg.

I votanti essendo 18, dallo squittino segreto per voti bianchi e neri, si ebbe il risultamento che siegue:

		Voti	
		Bianchi	neri
Signori	De Saint Venant	17	1,
	Dausse	15	3,
	Le Joulis	14	4.

Avendo tutti ottenuta l'assoluta maggioranza di voti favorevoli, ed essendovi molte vacanze nel novero dei soci corrispondenti stranieri, l'accademia risolvette che ognuno veniva eletto corrispondente, salva l'approvazione sovrana.

L'accademia riunita in numero legale a un'ora pomeridiana, si sciolse dopo due ore di seduta.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

P. Volpicelli. — A. cav. Coppi. — B. Tortolini. — G. cav. Ponzi. — P. Sanguinetti. — S. Cadet. — M. cav. Azzarelli. — E. Rolli. — L. Respighi. — L. Jacobini. — B. Boncompagni. — V. cav. Diorio. — D. Chelini. — F. Nardi. — C. Sereni. — E. Fiorini. — P. A. Secchi. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo.

Pubblicato nel 20 di agosto del 1866.
P. V.

OPERE VENUTE IN DONO

Bullettino Meteorologico del R. Osservatorio Astronomico di Palermo. Dicembre 1865.

Rendiconto dell' Accad. delle scienze fisiche e matematiche. Napoli gennaio 1866.

Catalogo di Lepidopteri della Lombardia, compilato dai fratelli Antonio e Gio. Batta Villa. Milano 1865. Un fasc. in 8.°

Intorno alla fauna lepidotterologica della Lombardia. Nota di Antonio Curò. Milano 1865. Un fasc. in 8.°

Archiv . . . *Archivio per la Storia Austriaca.* Fasc. 12 e 13 del 1865.

Sitzungsberichte . . . *Atti della I. Accademia delle Scienze di Vienna.* Classe delle scienze matematiche e naturali. Fasc. 1-10 del 1865. - Della nuova serie – fasc. 9° e 10° del 1864; e 1-5 del 1865.

Idem. Classe delle scienze storiche e filosofiche. Fasc. 9° e 10° del 1864; e 1-6 del 1865.

Fontes rerum austriacarum. Vol. VI°, 1865.

Register . . . *Catalogo* 43-50 *delle memorie presentate dalla Classe delle scienze matematiche e naturali, della I. Accademia delle Scienze di Vienna.* 1865.

Acta Universitatis Lundensis – scienze matematiche e filosofiche. Vol. 2, 1864.

Oversigt . . . *Atti della R.* ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI COPENAGHEN. 1864.

Almanach . . . *Almanacco della I. R.* ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI VIENNA pel 1865.

Il valore della latitudine di Modena, raffermato e difeso. Memoria del prof. GIUSEPPE BIANCHI. Modena, 1866. Un fasc. in 4.°

Sopra un nuovo caso di sudore, tinto in azzurro dall'indaco. Nota del prof. GIOVANNI BIZIO. Un fasc. in 8.° Venezia 1865.

Sopra l' influenza dell'orina, nel modificare alcune chimiche reazioni; del MEDESIMO.

Analisi chimica dell'Acqua di Civillina; del MEDESIMO.

Bullettino Meteorologico del R. OSSERVATORIO DI MODENA, *con corrispondenza e notizie risguardanti la provincia. N.*[i] 1, 2, 3; 1865-66.

Memorie della R. ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI IN MODENA. Tomo VI.

Sul tema proposto dalla R. ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI IN MODENA. « Se la libertà d' insegnamento sia un diritto secondo ragione, ed in caso affermativo, entro quali limiti debba tenersi circoscritta. *Dissertazione del cav.* CESARE CANTU', *premiata nel concorso accademico dell' anno* 1863.

The transactions . . . *Transazioni della R.* ACCADEMIA IRLANDESE. Vol. 24[mo], antichità parte 2[a], 3[a], 4[a], – Scienze, parte 4[a] e 6[a] – Letteratura, parte 2.[a]

Proceedings . . . *Bullettini della R.* ACCADEMIA SUDDETTA. Vol. VI all' VIII. – 1853 al 1864 – Vol. IX, parte prima.

Experimental . . . *Esposizione sperimentale sopra il potere conduttore delle sbarre di ferro, per G.* FORBES. Edimburgo, 1862. Un fasc. in 4.°

The celebrated . . , *Sopra la celebre teorica delle parallele.* – Dimostrazione del teorema Euclide I assioma 12, *per M.* RYAN. Washington, 1866; un fasc. in 8.°

Comptes . . . *Conti resi dell'*ACCADEMIA DELLE SCIENZE, DELL' *I.* ISTITUTO DI FRANCIA, in corrente.

Discorso agrario di A. Coppi. Roma 1865.

Programme . . . *Programma dei concorsi della società imperiale delle scienze dell'agricoltura, e delle arti di Lilla.*

Invito ad intervenire al congresso archeologico. che avrà luogo in Anversa, dal 12 *sino al* 21 *di agosto* 1866, *unito al programma delle materie che sono ad esso relative.*

	Errori	Correzioni
Pag. 39, lin. 15	deratta	diretta
» » lin. 17	liceo	linceo
» 65, lin. 21	*alle serie stesse*	*alla serie stessa*
» 76, lin. 17	*iberbola*	*iperbola*
» 81, lin. 3	a alla	alla

N.B. La numerazione di ognuna delle pagine, comprese fra la 108 e la 153, si trova, per errore di stampa, sempre accresciuta di 100.

Pag. 247, lin. 1	stagioni	stazioni
» » lin. 5	avvicinava	avvicina
» 249, lin. 10	ed	ad
» 157, lin. 9 sal.	sia o	sia
» 168, lin. 18	HG	H*g*
» » lin. 19	GK	*g*K
» » lin. 20	G	*g*
" 205 lin. 16 sal.	si tolga la nota (1)	

IMPRIMATUR
Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR
Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae
Vicesgerens.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE V.ª DELL' 8 APRILE 1866

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

Observations de l' étoile double 42 Comae Ber. et première ébauche des éléments de son orbite, par Otto Struve (présentées par le P. A. Secchi).

L'étoile double 42 Comae Ber. découverte par mon père à l'aide de la grande lunette de Dorpat, commençait à attirer son attention particulière depuis l'année 1833, où elle se présentait pour la première fois comme étoile simple parfaitement ronde. Depuis ce temps elle a été observée aussi régulièrement que possible à Dorpat par mon père et par moi, à Poulkova par moi seul. Par rapport à la liste suivante de mes observations de Poulkova, je remarque que les directions observées et corrigées diffèrent entre elles de l' effet des erreurs systématiques déduites des observations des étoiles doubles artificielles. Les distances mises en parenthèses sont obtenues par différentes méthodes d'estimation, dans des cas où la proximité des deux étoiles n'admettait pas de mesures micrométriques proprement dites. Les grossissements VI, VII, VIII dont nous avons fait usage dans ce cas, sont respectivement de 858, 1169 et 1458 fois.

1728 42 Comae Bor.; 6,0; 6,0

Date de l'observ.	Temps sid.	Grossissem χ=	Distance	Direction observée	Direction corrigée		
1840, 42	13h 5m	VII	(0,"45)	190,°6	197,°5		
40, 47	15 0	VII	(0, 40)	14, 2	14, 6	m.	
40, 47	13 40	VII	(0, 40)	10, 7	14, 9		
41, 41	12 50	VI	(0, 35)	7, 0	14, 1		Les deux étoiles à peine séparées.
41, 41	13 0	VI	(0, 40)	8, 1	14, 9		
42, 37	13 0	VI	(0, 30)	6, 4	12, 8	m.	oblongue
42, 39	12 45	VI		7, 3	15, 2		oblongue
42, 41	13 15	VI	(0, 25)	7, 9	13, 7		les deux étoiles encore séparées.
42, 41	13 10	VII	(0, 24)	6, 9	12, 7		par moments » »
42, 43	12 35	VII		8, 3	17, 6		» » » »
45, 47		Étoile simple, aucune trace de forme oblongue.					
46, 38	12 25	VII		248,	249,		Soupçon de fig. oblongue, les deux diamètres se rapportent : : 3 : 4.
46, 39	13 10	VI		245,	246,		
46, 42	13 50	VI		244,	245,		
47, 41	13 30	VI		186,	187,		obl. rapport des diam. 3 : 5.
47, 41	13 10	VII		193,	202,	?	par moments les étoiles séparées.
47, 45	14 25	VII		192, 7	195, 5		Distance au dessous de 0,"15.
48, 38	12 37	VII	0, 24	5, 6	13, 6	m.	obl. par moments les étoiles séparées
48, 42	13 13	VII	0, 29	6, 9	12, 4		
48, 46	14 0	VI	0, 20	9, 2	12, 1		
49, 37	12 16	VII	0, 35	0, 8	7, 5	certe min.	
49, 42	13 15	VI	0, 36	5, 9	10, 6	» »	
49, 46	14 0	VII	0, 31	6, 6	7, 7		
50, 38	12 33	VII	0, 38	4, 9	12, 5		
50, 39	13 2	VII	0, 38	4, 4	9, 0		
50, 41	12 40	VII	0, 41	6, 2	13, 3		
51, 39	12 40	VI	0, 39	0, 1	5, 2	(6)(6) certe min.	
51, 43	13 19	VII	0, 44	3, 6	6, 5	(5.6)(6)	
51, 43	13 26	VII	0, 40	3, 7	6, 1		
51, 45	14 23	VI	0, 41	8, 0	8, 5		
52, 40	12 35	VII	0, 47	5, 1	11, 7		
52, 43	13 0	VI	0, 47	6, 2	11, 9		
52, 45	14 2	VII	0, 50	8, 1	9, 1		
53, 39	12 50	VI	0, 47	6, 5	13, 1		
53, 40	12 40	VII	0, 51	4, 9	11, 0		
53, 41	12 46	VII	0, 46	3, 3	8, 4	aeg.	
54, 38	12 38	VI	0, 51	6, 6	14, 1		
55, 40	12 45	VI	0, 56	4, 4	10, 5		
55, 47	13 52	VII	0, 53	6, 6	7, 7		
57, 47	14 8	VI	0, 38	7, 5	8, 8		
57, 51	14 44	VII	0, 38	7, 0	5, 8		
58, 43	13 10	VII	(0, 30)	3, 6	7, 6		Les étoiles encore séparées.
58, 44	13 25	VII	(0, 28)	4, 9	8, 2		
59, 37		VII		41,			
59, 37		VII		33,			Figure oblongue soupçonnée, mais pas sûre.
59, 37		VIII		42,			
59, 38		VIII		43,			
59, 40		VII	Étoile simple				
61, 40	12 30	VII	0, 34	1, 4	7, 4		Distinctement séparées.
61, 43	13 17	VII	0, 37	1, 6	3, 9	m.	
62, 39	11 53	VII	0, 47	1, 4	9, 1	aeg.	
62, 42	13 2	VI	0, 45	5, 3	10, 6	m.	
63, 44	13 8	VI	0, 47	3, 5	7, 6		
64, 42	12 44	VI	0, 45	4, 1	10, 4		
64, 42	12 54	VII	0, 46	6, 4	12, 2		
64, 43	13 5	VII	0, 39	4, 8	9, 1	certe min.	

Je réunirai maintenant ces observations dans des valeurs moyennes pour chaque année, en ajoutant à la liste les mesures obtenues à Dorpat par mon père et par moi.

OBSERVATIONS DE DORPAT

Époque	Distance	Direction	Nombre des jours d'abs.	Observateur
1827, 28	0,″570	10,°9	1	W. Struve
29, 40	0, 640	11, 6	3	» »
33, 36	Étoile simple			» »
34, 43	Soupçon de fig. obl.	228, 3	1	» »
35, 39	Étoile oblongue	11, 2	4	» »
36, 42	(0, 303)	10, 2	3	W. et O. Struve
37, 40	(0, 395)	10, 8	6	W. Struve
38, 40	(0, 358)	11, 5	6	W. et O. Struve

OBSERVATIONS DE POULKOVA

Époque	Distance	Direction	Nombre des jours d'abs.	Observateur
1840, 45	(0, 417)	15, 7	3	O. Struve
41, 41	(0, 375)	14, 5	2	» »
42, 40	(0, 250)	14, 5	5	» »
45, 47	Étoile simple			» »
46, 40	Soupçon de fig. obl.	246, 7	3	» »
47, 42	Étoile oblongue	194, 8	3	» »
48, 42	(0, 243)	12, 7	3	» »
49, 42	0, 340	8, 6	3	» »
50, 39	0, 390	11, 8	3	» »
51, 42	0, 410	6, 6	4	» »
52, 43	0, 480	10, 9	3	» »
53, 40	0, 480	10, 8	3	» »
54, 38	0, 510	14, 1	1	» »
55, 44	0, 540	9, 1	2	» »
57, 49	0, 380	7, 3	2	» »
58, 44	(0, 290)	7, 9	2	» »
59, 38	Soupçon de fig. obl.	39, 8	4	» »
61, 42	0, 355	5, 6	2	» »
62, 40	0, 460	10, 0	2	» »
63, 44	0, 470	7, 6	1	» »
64, 42	0, 423	10, 6	3	» »

Il résulte de ces observations que dans le courant de 37 ans une des deux étoiles qui composent ce système a été éclipsée trois fois par l'autre. C'est ici un exemple unique jusqu'à présent dans les systèmes stellaires et qui nous permet de déduire avec certaine facilité une valeur approximative au moins pour un des éléments de son orbite, nommément pour la durée de la révolution. Cependant une autre particularité qui se prononce dans le tableau précédent, rend les conclusions à ce sujet en apparence moins sûres. Les deux

composantes de ce système sont à tel degré d'égale grandeur (6,0 selon les *Mensurae Micrometricae*), qu' il n'y a pas moyen de discerner par le seul aspect entre les deux directions opposées. En appelant l'une des deux étoiles A, l'autre B, il est impossible de dire à chaque moment si B est au nord d'A ou viceversa. Au commencement de mes observations de Poulkova j'ai tâché encore de noter à chaque occasion, laquelle des deux étoiles m'a paru la plus grande, mais après avoir acquis la conviction que le jugement dans ce cas est tout à fait incertain, j' ai maintenu plus tard la règle de faire la lecture de la direction toujours du côté nord, afin de ne pas troubler le jugement de ceux qui voudront s'occuper de ce système, par des indications qui, en effet, ne méritent aucun poids.

Si le plan de l'orbite était tellement incliné vers le rayon visuel qu'on pût se laisser guider par la succession des directions observées, l' égalité de l'éclat ne ferait aucun grand obstacle à la déduction des éléments. Mais dans notre cas ce moyen n' est pas applicable. Les directions observées montrent qu'ici le rayon visuel coïncide à tel point avec le plan de l'orbite, que, dans tous les cas où les deux étoiles ont été vues distinctement séparées, l'angle de position n'a pas varié de quantités qui surpassent les limites admissibles des erreurs d' observation. Cette dernière circonstance nous donne directement des valeurs approximatives pour les deux éléments qui determinent la situation du plan de l' orbite, mais elle nous prive en même temps du moyen d' employer les directions observées à la déduction des autres éléments. Nous sommes donc obligés de nous en tenir dans ce cas uniquement aux distances mesurées, qui, on le sait, cèdent de beaucoup en exactitude aux directions, surtout dans les systèmes très resserrés.

Mon père, en basant ses conclusions sur l' identité des directions observées avant et après l'occultation de 1833, avait énoncé en 1837 l' hypothèse (Mensurae micrometricae pag. 5) que l' étoile B. après avoir été cachée par A pour une courte période, était ressortie du même côté nord des rayons de cette dernière, en attribuant ainsi à l'orbite une excentricité qui s'approchait de l' unité. Dans cette hypothèse les trois occultations successivement observées auraient compris deux révolutions entières et comme les deux extrêmes diffèrent entre elles de 26 ans, il aurait fallu conclure à une période de 13 ans seulement. Mais en regardant attentivement la succession des distances mesurées, on voit facilement qu' une pareille période ne leur satisfait pas. En 1845, par exemple, l' étoile était parfaitement ronde, tandis qu' en

1858 les deux étoiles ont été vues encore distinctement séparées. De 1840 à 1842 la distance à diminué considérablement et en 1855 elle avait à peine atteint son maximum. Nous voyons en outre que le maximum de la distance observée à Dorpat entre 1827 et 1829 s'accorde assez en grandeur avec celui de la période de visibilité entre les occultations de 1845 et 1859, en différant déjà au delà des limites admissibles des erreurs d'observation, de celui que nous avons mesuré entre 1833 et 1845, ou après 1859. Toutes ces considérations réunies nous ont conduit à supposer à l'orbite une révolution d'environ 26 ans et une excentricité assez considérable, pour expliquer les différences dans les intervalles entre les époques des occultations observées et des maxima des distances.

Après quelques tâtonnements préalables, nous nous sommes arrêtés aux éléments suivants :

Temps du périhélie T. $= 1839, 60$
Demi grand axe $a = 0,''500$
Excentricité $e = 0, 075$
Durée d'une révolution 25, 5 ans, ou moyen mouvement
annuel $m = 14,^\circ 12$

en y admettant que le rayon visuel coincide parfaitement avec le plan de l'orbite et qu' il soit en outre perpendiculaire au grand axe de l'orbite réelle. En d'autres termes nous y avons supposé l'angle compris entre le périhélie et le noeud ascendant $P - \Omega = 0^\circ$, l'inclination de l'orbite $i = 90^\circ$, la longitude du noeud ascendant $\Omega = 10,^\circ 5$,

La dernière valeur résulte de la moyenne des directions observées, si nous excluons toutes les observations, dans lesquelles les deux étoiles n'ont pas été vues distinctement séparées.

Avec ces éléments, Mr. V. Fuss. astronome surnuméraire de l'observatoire central, a comparé les mesures isolées des distances. On conçoit facilement que pour la direction on a dû obtenir la valeur constante $= 10,^\circ 5$, valeur qui ne diffère sensiblement des directions observées, que dans les cas où le deux étoiles offraient ensemble à peine le soupçon d'une figure oblongue. Voici maintenant le résultat de ces calculs par rapport aux distances :

Epoque	Distance calc.	Observ.Calc.
1827, 28	0,"535	+ 0,"035
29, 40	0, 454	+ 0, 186
33, 36	0, 057	— 0, 057
34, 43	0, 080	
35, 39	0, 188	
36, 42	0, 297	+ 0, 006
37, 40	0, 380	+ 0, 015
38, 40	0, 438	— 0, 080
40, 45	0, 450	— 0, 033
41, 41	0, 405	— 0, 048
42, 40	0, 331	— 0, 081
45, 47	0, 012	— 0, 012
46, 40	0, 126	
47, 42	0, 243	
48, 42	0, 345	— 0, 102
49, 42	0, 428	— 0, 088
50, 39	0, 487	— 0, 097
51, 42	0, 526	— 0, 116
52, 43	0, 537	— 0, 057
53, 40	0, 523	— 0, 043
54, 38	0, 484	+ 0, 026
55, 44	0, 415	+ 0, 125
57, 49	0, 220	+ 0, 160
58, 44	0, 109	+ 0, 181
59, 38	0, 007	
61, 42	0, 247	+ 0, 108
62, 40	0, 340	+ 0, 120
63, 44	0, 415	+ 0, 055
64, 42	0, 455	— 0, 032

Cette comparaison nous apprend qu' il existe encore une certaine régularité dans les différences entre le calcul et l'observation , qui , probablement , pourraient être diminuées encore considérablement par l' introduction de valeurs plus approchées des éléments , pour lesquels nous sommes partis de suppositions très vagues, comme par exemple pour la longitude du périhélie. Mais pour le moment il paraît que nous pouvons nous contenter de ces éléments grossièrement approchés. Avant de procéder plus loin dans ces recherches, il faudra examiner encore à quel point les mesures des deux observateurs sont sujettes aux mêmes erreurs constantes pendant toute la période de leurs observations, et s' il n'y a pas de différences constantes entre les mesures et les estimations. Cet examen, en demandant des recherches plus étendues, doit être reservé pour une autre occasion. Autant que je puis en juger maintenant, les différences entre l'observation et le calcul seront dans ce cas

très fortement diminuées par l' introduction des corrections expérimentelles à déduire du complet de nos observations comparées avec celles de Dorpat.

Quelque grossièrement ébauchés que soient nos éléments, ils suffisent à représenter presque toutes les observations à tel degré qu' il n'y reste plus de contradiction manifeste. Au moins tous les phénomènes caractéristiques de l'orbite en résultent d'une manière très satisfaisante. Cela se manifeste surtout dans les faits suivants :

1.° L'étoile à été vue parfaitement ronde aux époques 1833, 36 et 1845, 47 et pour ces époques le calcul donne les distances des centres respectivement 0",057 et 0",012.

2.° A l'expression « Soupçon de figure oblongue » , employée en 1834, 1846, et 1859, correspondent les distances calculées 0",080, 0",126 et 0",007.

3.° L'étoile à été dite oblongue en 1835, 39 et 1847, 42 et le calcul donne pour ces époques les distances 0",188 et 0",243. C'est effectivement à la distance d' environ 0",20 qu' en général les images de deux étoiles de l'éclat des composantes de 42 Comae commencent à se confondre dans notre grande lunette par un état favorable du ciel.

4.° Le calcul indique pour les maxima absolus de la distance les époques 1827,0 et 1852,5. Les maxima mesurés sont notés 1829,4 et 1855,4. Sans doute nous ne devons pas omettre que , dans les deux cas , l' observation est en retard de deux ou trois ans sur le cacul, mais la valeur absolue des deux différences n'est pas considérablement affectée par cette circonstance, parce que vers les époques des maxima les changements des distances sont insignifiants dans le courant de plusieurs années.

5.° Le temps du périhélie, qui, dans notre cas, devrait correspondre au seul maximum relatif observé, a été fixé par le calcul à 1839,6 et l'observation directe lui assigne avec un accord assez satisfaisant l'époque 1840,5.

Dans toute la liste de nos observations il n'y a pour le moment qu'une seule donnée, qui se trouve encore en contradiction manifeste avec la théorie. C'est le résultat fourni par les observations de 1858. La dite année j'ai obtenu deux observations de 42 Comae, par des images très favorables et dans ces deux occasions j'ai estimé la distance des centres respectivement de 0",30 et de 0",28, en y ajoutant expressément la remarque que, par moments, j' ai vu les deux étoiles distinctement séparées, ce qui ne pourrait avoir eu lieu, si la distance n'avait été que de 0",109, comme le veut notre théorie. Pour une pareille distance j'aurai dû employer l'expression « Soupçon de figure ob-

longue » ou tout au plus « Étoile oblongue ». Ainsi le problème de produire un accord plus satisfaisant avec les observations de la dite année , devrait former un des points principaux d' issue pour les hypothèses ultérieures sur les éléments de l' orbite. L' accord rétabli dans ce cas entrâinerait en même temps une correction de la différence plus considérable trouvée pour le résultat de l'année précédente 1857. En outre nous avons pour indices à nous guider dans les hypothèses futures sur les éléments, le retard remarqué entre les maxima de la distance observée et calculée, et enfin les différences des directions notées en 1834 , 1846 et 1859 à des époques où les deux étoiles étaient tellement resserrées, qu'elles offraient seulement le soupçon d'une figure oblongue. Mais à cause des raisons indiquées plus haut, il parâit pour le moment inutile d'entrer dans des discussions plus détaillées à ce sujet. Évidemment l'application des formules différentielles pour la correction des éléments serait dans ce cas peine perdue, tant q'on ne serait pas parvenu par d'autres procédés à des valeurs plus approchées.

Dans les différents recueils d'observations nous rencontrons bien quelques observations isolées faites sur cette étoile par d'autres astronomes. Cependant leurs mesures ne peuvent pour le moment en rien contribuer à une déduction plus exacte des éléments, soit parce que les différences constantes dans les mesures des distances, qui, dans ce cas, jouent un rôle prépondérant, ne sont pas encore suffisamment évaluées pour les différents observateurs, soit parce que leurs observations sont trop isolées et ne forment pas de série continue comme les nôtres.

Quant aux résultats principaux de notre recherche, nommément la durée de la révolution , la valeur du demi-grand axe et l'excentricité , je ne crois pas qu' ils subiront des changements très considérables par les observations futures. Ils recevront leur confirmation ou réfutation définitive en très peu d'années. Si notre théorie est juste, le système devra nous fournir de nouveau l'aspect d'une étoile simple dèjà en 1870, tandis que l' hypothèse d'une excentricité très forte, combinée avec une période deux fois plus rapide, reculerait de deux à trois ans, l'époque où l'étoile devra de nouveau se présenter simple. En tout cas notre discussion suffira, j'éspère, à diriger l'attention des astronomes sur ces époques critiques.

NOTE SUR UN ARTICLE INSÉRÉ DANS LES *NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES* ET RELATIF A LA PUBLICATION INTITULÉE « *Passage du traité De la musique d'Aristide Quintilien* », *etc.* (*).

L'auteur d'un article inséré dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (avril 1866, p. 189, l. 1–24) s'étonne qu'un homme qui s'occupe de l'histoire de l'arithmétique ait pu attacher à des textes grecs où certaines propriétés des nombres reçoivent une application superstitieuse, assez d'importance pour prier deux hellénistes de traduire et d'expliquer un de ces textes, et pour être curieux de connaître l'époque de l'auteur. Le critique paraît avoir oublié que, lorsqu'il s'agit de faire l'histoire d'une connaissance, il faut bien la saisir dans les textes les plus anciens où on la recontre, lors même qu'elle y serait appliquée à un usage puéril. C'est ainsi que l'histoire de l'astronomie et celle de la chimie trouvent des documents précieux dans le fatras des astrologues et des alchimistes. C'est ainsi que des notions assez avancées sur les propriétés des nombres se trouvent impliquées dans certaines rêveries antiques sur leurs significations mystérieuses et sur les influences chimériques qu'on leur attribuait, ou bien dans certaines formules bizarrement énigmatiques sous lesquelles on se faisait un jeu de cacher des notions mathématiques. C'est ainsi que le *nombre nuptial* de Platon et les remarques subtiles d'Aristide Quintilien sur les nombres qui représentent les sons musicaux et sur les rapports prétendus de ces nombres avec certains phénomènes physiologiques, peuvent jouer un rôle sérieux dans l'histoire antique de diverses propriétés de nombres, et notamment de l'égalité $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. En effet, cette égalité se trouve certainement impliquée dans le passage de Platon sur le *nombre nuptial*, comme on en peut voir la preuve donnée par M. Vincent dans le tome XVI de *Notices et extraits des*

(*) Voir « ATTI ‖ DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA ‖ DE'NUOVI LINCEI ‖ TOMO XVIII. — ANNO XVIII. » (1865—66) », ecc. — « SESSIONE VII.ª DELL' 11 GIUGNO 1865 » (pag. 365—376).

manuscrits de laBibliothèque du Roi (**), et par moi dans un article de la *Revue archéologique* (***). Cette même égalité se trouve aussi dans le passage d' Aristide Quintilien traduit et commenté dans la publication mentionnée ci–dessus, comme on en peut voir la preuve dans cette publication même.

TH. HENRI MARTIN.

(**) Paris, 1847, in-4°, p. 184, lig. 9—36, p. 185—193, et p. 194, lig. 2—19.
(***) XIII^e année, 15^e livraison, 15 août 1856, pages 257—287.

Ricerche analitiche, relative al geometrico luogo, tanto dei punti di tangenza fra uno, e due sistemi di parallele, con una serie di coniche omofocali; quanto dei punti d' intersecazione delle tangenti parallele di un sistema, colle rispettive di un altro. — *Memoria del prof. P.* VOLPICELLI (fine) (*a*).

§ 39.

Per non dovere interrompere nel seguito l'andamento dell'attuali ricerche, premettiamo le seguenti osservazioni, circa le curve pedali centriche, tanto della ellisse, quanto della iperbola.

142.° Chiameremo *pedale centrica della ellisse*, o *della iperbola*, il geo-

(*a*) Per quello che precede , v. questo vol., pag. 219.

metrico luogo dei piedi delle perpendicolari, guidate dal centro di una qualunque di queste curve, sulle tangenti alle medesime (a).

143.° Per determinare l'equazione della pedale centrica, spettante alla ellisse, prendiamo la

$$(76) \qquad y = \frac{n}{m} \sqrt{(m^2 - x^2)} \, ,$$

che appartiene ad una curva ellittica, riferita agli assi $2m$, $2n$, ed avremo

$$(77) \qquad \frac{dy}{dx} = - \frac{n}{m} \frac{x}{\sqrt{(m^2 - x^2)}} \, .$$

Sappiamo che l' equazione dalla tangente al punto (x, y) di qualsiasi curva, si esprime (§ 20, (56.°)) colla

$$(78) \qquad y' = \frac{dy}{dx} x' + y - \frac{dy}{dx} x \, ,$$

nella quale x', y' sono le coordinate *correnti*. Se in questa ultima equazione introduciamo i valori delle y, $\frac{dy}{dx}$, presi dalle (76), (77), otterremo la

$$y' = - \frac{n}{m} \frac{x}{\sqrt{(m^2 - x^2)}} x' + \frac{n}{m} \sqrt{(m^2 - x^2)} + \frac{n}{m} \frac{x^2}{\sqrt{(m^2 - x^2)}} \, ,$$

e riducendo si avrà la

$$(79) \qquad y' = - \frac{n}{m} \frac{x}{\sqrt{(m^2 - x^2)}} x' + \frac{nm}{\sqrt{(m^2 - x^2)}} \, ,$$

equazione che rappresenta la tangente alla ellisse (76), nel suo punto (x, y).

144.° Per trovare il piede della perpendicolare a questa tangente, dobbiamo dalla origine delle coordinate, ossia dal centro della ellisse, guidare alla tangente medesima una perpendicolare, che avrà per equazione la

$$(80) \qquad y' = \frac{m\sqrt{(m^2 - x^2)}}{nx} x' \, .$$

Ad ottenere poi l'equazione della pedale richiesta, ossia la relazione fra le x', y', che sono le coordinate del punto d' intersecazione fra la tangente (79), e la perpendicolare (80), fa d'uopo eliminare il simbolo x dall' equazioni stesse.

(a) La curva ottenuta guidando da un punto fisso le perpendicolari sulle tangenti ad un'altra qualunque curva, fu denominata in latino *pedalis*, in italiano *pedale*, in inglese *pedal*, in francese *podaire*, ed in tedesco *Fusspuncten - Curve*. Noi per indicare che il punto da cui furono guidate le perpendicolari, è il centro, sia dell'ellisse, sia della iperbola, denomineremo la curva stessa *pedale centrica* della ellisse, o della iperbola.

Per tanto della (80) avremo

$$n^2y'^2x^2 = m^4x'^2 - m^2x'^2x^2 ,$$

donde

$$(81) \qquad x = \pm \frac{m^2x'}{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}} ,$$

quindi

$$m^2 - x^2 = m^2 - \frac{m^4x'^2}{m^2x'^2 + n^2y'^2} = \frac{m^2n^2y'^2}{m^2x'^2 + n^2y'^2} ,$$

ovvero

$$(82) \qquad \sqrt{(m^2 - x^2)} = \pm \frac{mny'}{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}} ;$$

però non sappiamo ancora se i segni dei secondi membri delle (81), (82), si corrispondono fra loro. Ma dalla (82), moltiplicata per $\frac{n}{m}$, abbiamo

$$\frac{n}{m} \sqrt{(m^2 - x^2)} = \pm \frac{n^2y'}{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}} ,$$

ovvero

$$(83) \qquad y = \pm \frac{n^2y'}{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}} .$$

E siccome la semplice considerazione grafica ci mostra, che ogni coordinata del punto appartenente alla ellisse, deve avere il medesimo segno della corrispondente, che appartiene al relativo punto della pedale; così vediamo ad evidenza, che in ambedue le (81), (83), e quindi anche nella (82), debbono valere soltanto i segni positivi. Quest'ultima ricerca fu necessaria; poichè, mentre la (80) fu innalzata al quadrato, s' introdusse un'altra retta, cioè la

$$y' = - m \frac{\sqrt{(m^2 - x^2)}}{nx} x' ,$$

e quindi anche un altro punto d' intersecazione, che non appartiene all'attuale geometrica ricerca.

Sostituendo adunque i trovati valori delle x , $\sqrt{(m^2 - x^2)}$ nella (79) , presi col segno positivo, avremo la

$$y' = - \frac{m}{n} \frac{m^2x'^2}{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}} \cdot \frac{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}}{mny'} + mn \frac{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}}{mny'} ,$$

ovvero la

$$y' = -\frac{x'^2}{y'} + \frac{\sqrt{(m^2x'^2 + n^2y'^2)}}{y'};$$

e sopprimendo gli accenti, perchè ora inutili, sarà

$$(y^2 + x^2)^2 = m^2x^2 + n^2y^2 \tag{84}$$

la cercata equazione della pedale centrica di una ellisse, avente per semiassi le m, n, ed essendo rappresentata dalla

$$\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 = 1.$$

Non è fuor di proposito quì osservare, che i due parametri m^2, n^2 della pedale centrica di una ellissi, corrispondono rispettivamente ai quadrati dei semiassi di questa curva, generatrice della pedale stessa.

145.° La pedale (84), passa pei quattro vertici della ellisse; poichè la sua equazione viene soddisfatta da qualunque delle seguenti quattro coppie di valori delle coordinate, cioè dalle

$$(x = m,\ y = o);\ (x = -m,\ y = o);\ (x = o,\ y = n);\ (x = o,\ y = -n)\ .$$

Ciò chiaro apparisce anche dal riflettere, che nei quattro vertici della ellisse, corrispondono i piedi delle perpendicolari, abbassate dal centro di questa curva, sulle tangenti ai vertici stessi.

§ 40.

La pedale centrica della ellisse, rappresentata dalla (84), può costruirsi senza neppure aver bisogno della ellisse generatrice. A tal fine introduciamo nella (84) le coordinate polari, ed intendiamo che l' angolo φ, sia contato a partire dall'asse delle x; avremo :

$$x = r\cos.\varphi\ ,\quad y = r\text{sen}.\varphi\ ,\quad r^2 = x^2 + y^2\ ,$$

e la (84) si ridurrà nella

$$r^2 = m^2\cos.^2\varphi + n^2\text{sen}.^2\varphi\ . \tag{85}$$

equazione polare della pedale stessa.

Facciasi (fig. 26)

$$OB = \frac{m}{2}, \quad OC = \frac{n}{2},$$

quindi si descrivano, dai punti B, C come centri, due semicircoli, e si guidino le corde AD, FE. Ponendo

$$MOX = \varphi, \qquad \text{ed} \qquad FH = AO,$$

avremo

$$\overline{EH}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FH}^2 ;$$

ma

$$EF = OE\text{sen}.\varphi = 2OC\text{sen}.\varphi = n\text{sen}.\varphi , \quad OA = OD\cos.\varphi = 2OB\cos.\varphi = m\cos.\varphi ;$$

dunque

$$\overline{EH}^2 = n^2\text{sen}.^2\varphi + m^2\cos.^2\varphi :$$

Confrontando questa equazione colla (85), conosceremo il raggio vettore

$$r = EH ,$$

corrisondente al dato angolo φ, come ci eravamo proposti.

146.° Un' altra costruzione della stessa pedale si ottiene, osservando che per l'ultima formula dell'articolo 144.°, l'equazione polare di una ellisse dei semiassi m, n, viene rappresentata dalla

$$\frac{r^2\cos.^2\varphi}{m^2} + \frac{r^2\text{sen}.^2\varphi}{n^2} = 1 ,$$

ovvero dalla

$$(86) \qquad r^2 = \frac{m^2n^2}{n^2\cos.^2\varphi + m^2\text{sen}.^2\varphi} .$$

Quindi nella (85), per evitare confusione, cangeremo le coordinate r, φ nelle r', φ', ed avremo la

$$(87) \qquad r'^2 = m^2\cos.^2\varphi' + n^2\text{sen}.^2\varphi' ,$$

per la equazione polare della pedale centrica della ellisse (86). Moltiplicando fra loro le (86), (87), avremo la

$$(88) \qquad r^2r'^2 = m^2n^2\frac{m^2\cos.^2\varphi' + n^2\text{sen}.^2\varphi'}{n^2\cos.^2\varphi + m^2\text{sen}.^2\varphi} ,$$

nella quale se, per un caso particolare, poniamo

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi ,$$

avremo evidentemente la

$$r^2 r'^2 = m^2 n^2 ;$$

ma le quattro quantità r, r', m, n; sono intrinsecamente positive, perciò sarà

$$rr' = mn .$$

Laonde, se prendasi nella ellisse (fig. 27), un qualunque raggio vettore $OP = r$, corrispondente all'angolo $\varphi = AOP$; inoltre se prendasi, nella corrispondente pedale, un raggio vettore $OQ = r'$, relativo all'angolo $\varphi' = AOQ = \frac{\pi}{2} - \varphi$, dovrà verificarsi l'equazione precedente; cioè il prodotto dei due raggi vettori OP ed OQ, dovrà uguagliare il prodotto mn.

147.° Questa proprietà della pedale centrica della ellisse, dà luogo alla seguente costruzione. Data una ellisse, per trovare un qualunque punto della indicata pedale, si guidino due rette (fig. 27) OM, ON, formanti rispettivamente angoli eguali cogli assi della ellisse medesima, si costruisca la quarta proporzionale r', fra le rette

$$OP = r, \quad OA = m, \quad OB = n ,$$

la quale determinerà sulla ON il cercato punto Q della pedale stessa.

§ 41.

Dopo avere trovato la pedale centrica della ellisse, passiamo a trovare quella che si riferisce alla iperbola. Sappiamo che quando nella equazione appartenente alla ellisse dei semiassi m, n, si cangia in $n\sqrt{-1}$, uno n dei medesimi, l'equazione riducesi a rappresentare una iperbola, che possiede il semiasse trasverso m, ed il coniugato n.

148.° Facendo adunque l'indicato cangiamento nella (84), avremo la

$$(y^2 + x^2)^2 = m^2 x^2 - n^2 y^2 , \tag{89}$$

per la pedale centrica della iperbola

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 .$$

Non sarà inutile quì osservare, che i due parametri m^2, n^2, contenuti nella equazione della pedale centrica della iperbola, corrispondono rispettivamente ai quadrati dei semiassi di questa curva, generatrice della pedale stessa. Anche questa pedale, passa pei due vertici della sua generatrice iperbola; ciò si vede osservando, che la (89) si trova soddisfatta dalle due seguenti coppie di valori

$$(x = m, \ y = o) \ ; \ (x = -m, \ y = o) \ .$$

149.° La (89) può costruirsi molto semplicemente, senza conoscere la iperbola generatrice. In fatti se introduciamo le coordinate polari (r, φ), abbiamo

$$x = r\cos.\varphi \ , \qquad y = r\text{sen}.\varphi \ , \qquad r^2 = x^2 + y^2 \ ,$$

e la (89) diverrà

$$(90) \qquad r^2 = m^2\cos.^2\varphi - n^2\text{sen}.^2\varphi \ .$$

Ora (fig. 26) facciasi

$$\text{OB} = \frac{m}{2} \ , \quad \text{OC} = \frac{n}{2} \ ,$$

e si descrivano dai punti B, C, come centri, due semicircoli. Volendo trovare il valore del raggio vettore r, corrispondente a qualsiasi angolo MOX $= \varphi$, si guidino le AD, FE, e facciasi EG $=$ OA. Dai triangoli rettangoli OAD, OEF abbiamo rispettivamente

$$\text{OA} = \text{OD}\cos.\varphi = 2\text{OB}\cos.\varphi = m\cos.\varphi \ , \ \text{FE} = \text{OE}\text{sen}.\varphi = 2\text{OC}\text{sen}.\varphi = n\text{sen}.\varphi \ ;$$

ma dal triangolo rettangolo FEG, abbiamo

$$\overline{\text{GE}}^2 - \overline{\text{FE}}^2 = \overline{\text{FG}}^2, \qquad \text{ovvero} \qquad \overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{EF}}^2 = \overline{\text{FG}}^2 \ ;$$

dunque dalla eseguita costruzione otterremo la

$$m^2\cos.^2\varphi - n^2\text{sen}.^2\varphi = \overline{\text{FG}}^2 \ ;$$

perciò, mediante la (90), si avrà FG $= r$, cioè si avrà il cercato valore di r, come ci eravamo proposti.

150.° Volendo trovare la pedale centrica della iperbola *equilatera*, dobbiamo nella (89) porre $m = n$, ed avremo la

$$(91) \qquad (y^2 + x^2)^2 = m^2(x^2 - y^2) \ ,$$

mentre la (90), per la medesima sostituzione, si trasformerà nella

$$(92) \qquad r^2 = m^2(\cos.^2\varphi - \text{sen}.^2\varphi) = m^2\cos.2\varphi \ ,$$

equazioni, ognuna delle quali rappresenta la stessa *lemniscata* (a). Giova quì osservare, che l'unico parametro m^2 dell'una o l'altra equazione, appartenente alla lemniscata, è il quadrato del semiasse trasverso della iperbola equilatera sua generatrice.

§ 42.

151.° Dopo le premesse attuali, se abbiasi una data serie di coniche, aventi gli stessi fuochi, corrisponderà, come già fu dimostrato (§ 4, 11.°), a ciascun angolo α, compreso fra un sistema di parallele tangenti alle medesime omofocali, e l' asse traverso loro, una determinata iperbola equilatera di *tangenza*. Proponiamoci ora di trovare il geometrico luogo dei *fuochi*, appartenenti alle diverse iperbole di tangenza, nella ipotesi che abbiansi più sistemi di parallele tangenti, ovvero nella ipotesi che l'angolo α passi pei possibili valori, compresi da 0° fino a 180°. Da queste ricerche dovremo escludere il caso, in cui le coniche omofocali sieno parabole; perchè nel medesimo, la iperbola di tangenza si riduce (§ 7, (21.°)) ad una retta, e perciò non esiste alcun fuoco. Per tanto, dovendo limitare la seguente analisi alle serie di coniche, non compresa la parabola, potremo stabilire la origine delle coordinate nel centro comune alle coniche stesse.

152.° Ricordiamo in *primo* luogo che, (§. 4, (11.°)) ogni sistema di parallele tangenti, fa un angolo α coll' asse delle ascisse; che un assintoto di qualunque iperbola di tangenza, è parallelo alle tangenti del sistema indicato; e che le iperbole di tangenza, essendo equilatere, gli assintoti loro formano un angolo $\frac{\pi}{4}$ coll' asse delle ascisse. Perciò, chiamando φ l' angolo compreso dall' asse della iperbola di tangenza, e quello delle ascisse, angolo che nella (24) è denotato con (xx'), si avrà

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{4}\,, \quad \text{od anche} \quad \varphi = \alpha - \frac{3}{4}\pi\,;$$

secondo che α sia $<$ ovvero $>$ 90.°

In *secondo* luogo, chiamando c_1 la eccentricità della indicata iperbola di tangenza, già espressa con c' (§ 6), avremo dalla (28) la

$$c_1 = c\sqrt{(2\text{sen}.2\alpha)}\,, \quad \text{ovvero la} \quad c_1 = c\sqrt{(-2\text{sen}.2\alpha)}\,,$$

(a) V. Lotteri, parte 2., Pavia 1822, pag. 209.

secondo che α sia $<$ ovvero $>$ 90°, ed il sistema delle

$$
(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \alpha - \frac{\pi}{4}, \quad c_1 = c\sqrt{(2\text{sen}.2\alpha)}, \\ \text{ovvero delle} \\ \varphi = \alpha - \frac{3}{4}\pi, \quad c_1 = c\sqrt{(-2\text{sen}.2\alpha)}, \end{array} \right.
$$

determinerà il fuoco della iperbola di tangenza, corrispondente all'angolo α, mediante le coordinate polari φ, c_1, ove c_1 rappresenta il raggio vettore.

153.° Dopo ciò chiaro apparisce, che coll'eliminare dalle (93) il simbolo α, unica quantità indeterminata in esse contenuta, la risultante deve rappresentare il cercato geometrico luogo dei fuochi, appartenenti alle diverse iperbole di tangenza. Per tanto dalle due prime delle (93) abbiamo

$$2\alpha = 2\varphi + \frac{\pi}{2},$$

e dalle ultime due delle medesime si ottiene

$$2\alpha = 2\varphi + \frac{3}{2}\pi;$$

quindi

$$\text{sen}.2\alpha = \text{sen}.\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos.2\varphi,$$

ovvero

$$\text{sen}.2\alpha = \text{sen}.\left(2\varphi + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos.2\varphi.$$

Sostituendo il primo di questi valori nel primo di c_1, ed il secondo dei valori medesimi nell'altro dello stesso c_1, avremo in ambo i casi la

$$(94) \qquad c_1 = c\sqrt{(2\cos.2\varphi)},$$

formula che rappresenta la equazione polare, del geometrico luogo dei fuochi delle iperbole di tangenza.

154.° Per ottenere l'equazione di questa curva, mediante le coordinate ortogonali x, y, coll'origine al centro comune delle coniche omofocali, avremo fra le coordinate polari e le ortogonali, le seguenti relazioni

$$(95) \qquad c_1^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{c_1} = \cos.\varphi, \quad \frac{y}{c_1} = \text{sen}.\varphi.$$

Fatta la sostituzione nella (94), cangiata prima in

$$c_1^2 = 2c^2(\cos.^2\varphi - \text{sen.}^2\varphi) ,$$

essa ridurrassi alla

$$(96) \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2) ,$$

equazione dello stesso luogo geometrico, riferito però ad un sistema ortogonale, coll'origine al centro comune delle coniche omofocali.

155.° Confrontando la (96) colla (91), si vede che queste coincidono fra loro, quando la m^2 della (91) si cangia nella $2c_1^2$; vale a dire, quando pongasi

$$m = c\sqrt{2} .$$

Quindi apparisce ad evidenza, che la (96) rappresenta essa pure una lemniscata; cioè la pedale centrica di una iperbola equilatera (§ 41, (150.°)). Il semiasse traverso m di questa iperbola, coincide, come vedesi dalla equazione sua, con quello delle x, e la sua lunghezza è $c\sqrt{2}$, mentre la eccentricità sua si esprime con $2c$. Infatti sappiamo che la eccentricità c_1 di una qualunque iperbola equilatera, ed avente per semiasse trasverso m, si ottiene dalla

$$c_1 = \sqrt{(2m^2)} = \sqrt{(2.2c^2)} = 2c .$$

156.° Dai precedenti ragionamenti si conclude il seguente

Teorema XXVIII. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, tanti sistemi di parallele tangenti, sarà il geometrico luogo dei fuochi delle relative iperbole di tangenza una lemniscata. Gli assi poi della iperbola equilatera, generatrice di questa lemniscata, coincideranno con quelli comuni alla serie delle coniche indicate, mentre la eccentricità della iperbola medesima, sarà doppia di quella comune alle coniche stesse.*

157.° La costruzione (fig. 28) dichiara il teorema ora enunciato, nella quale a', b' indicano i fuochi comuni alla serie delle coniche, rappresentate per maggior semplicità da una ellisse MN, e da una iperbola ABA'B'. Il numero delle iperbole di tangenza, generalmente parlando, è illimitato; ma nella figura medesima queste iperbole sono rappresentate da due soltanto, cioè dalla F a' r'' G F' b' r''' G', e dalla C a' s'' D C' b' s''' D', le quali, come si vede, passano l'una e l'altra pei due fuochi a', b', comuni alle coniche omofocali. Appartengono (§. 18, (52.°)) alla prima iperbola di tangenza le direzioni SS', TT' delle tangenti perpendicolari fra loro; ed alla seconda iperbola di tangenza le altre due direzioni T''T''', S''S''', anch' esse perpendicolari fra loro. Gli

assi trasversi di queste due iperbole di tangenza, si trovano rispettivamente sulle direzioni PQ, P'Q'. La lemniscata, luogo geometrico dei *fuochi* delle iperbole equilatere di tangenza, vedesi rappresentata dalla $O\,q\,h\,s\,r\,O\,r'\,s'\,g\,q'$. Inoltre la iperbola generatrice di questa lemniscata è la $I\,h\,K\,I'\,g\,K'$, che possiede una eccentricità Of, doppia di quella Oa', appartenente alle coniche omofocali. E poi manifesto che gli assi OX, OY della iperbola equilatera $I\,h\,K\,I'\,g\,K'$, generatrice della lemniscata $O\,q\,r\,O\,r'\,q'$, sono coincidenti con quelli che appartengono alla serie di coniche omofocali. Finalmente, supponendo cognita la lemniscata, luogo geometrico dei fuochi delle varie iperbole di tangenza, si troverà il fuoco di una qualunque iperbola di tangenza $F\,a'\,G\,F'\,r'''\,G'$, nei punti d'incontro r, r' dell'asse PQ di questa iperbola colla lemniscata indicata.

158.° Fu stabilito (§. 22, (72.°)) che la iperbola d'*intersecazione*, appartenente a due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, può eziandio considerarsi come iperbola di tangenza, relativa ad un terzo sistema di parallele, tangenti alla medesima serie di omofocali, e viceversa. Perciò, se immagineremo tante iperbole d'intersecazione, avremo in queste altrettante iperbole di tangenza, ognuna relativa ad un altro sistema di parallele tangenti alle medesime omofocali; dobbiamo quindi concludere il seguente

Teorema XXIX. *Guidando ad una serie di coniche omofocali, tanti sistemi di parallele tangenti le coniche stesse, il geometrico luogo dei fuochi delle diverse iperbole d'intersecazione, sarà una lemniscata; e la seconda parte del teorema precedente, avrà luogo egualmente anche in questo.*

§ 43.

159.° Dopo aver trovato il geometrico luogo dei fuochi, appartenenti alle diverse iperbole di tangenza, e d'intersecazione; passiamo a determinare quello dei *vertici* delle iperbole medesime, che sarà pur esso una lemniscata. In fatti denotiamo con a_1 il raggio vettore della curva, luogo geometrico cercato; e riflettiamo che in una qualunque iperbola equilatera, il rapporto fra il semiasse trasverso, e la eccentricità, si esprime sempre con $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Perciò, siccome a_1 rappresenta pure il semiasse trasverso, ed essendo (§ 42) già denotata con c_1 la eccentricità di una qualunque iperbola equilatera di tangenza; così dovremo avere

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Rigorosamente parlando, si dovrebbe anche quì distinguere il caso $\alpha < 90.°$, dall'altro $\alpha > 90.°$, come già fu distinto (§ 42, (152.°)); però, a motivo di brevità, ci limiteremo al solo primo di questi due casi, ed ognuno potrà facilmente di per se, applicare l'analisi anche al secondo. Per tanto dalla (28) abbiamo

$$(97) \qquad c_1 = c\sqrt{(2\text{sen}.2\alpha)} ,$$

dunque avremo

$$(98) \begin{cases} a_1 = \dfrac{c\sqrt{(2\text{sen}.2a)}}{\sqrt{2}} = c\sqrt{(\text{sen}.2\alpha)} , \\ \text{e ragionando poi come all'articolo 152.°, otterremo eziandio la} \\ \varphi = \alpha - \dfrac{\pi}{4} . \end{cases}$$

Per avere l' equazione polare del cercato luogo geometrico dei *vertici*, dobbiamo eliminare le variabili α dalla prima delle (98), introducendo in essa la variabile φ : e poichè dalla seconda delle (98) stesso abbiamo $2\alpha = 2\varphi + \frac{\pi}{2}$, quindi (§. 42, (153.°)) $\text{sen}.2\alpha = \cos.2\varphi$; perciò sarà

$$(99) \qquad a_1 = c\sqrt{(\cos.2\varphi)} .$$

Eseguendo, mediante le (95), la trasformazione solita delle coordinate polari nelle rettangolari , come già fu eseguita nell' articolo 154.° , ed avvertendo che nelle medesime si deve porre a_1 invece di c_1 , avremo la

$$(100) \qquad (x^2 + y^2)^2 = c^2(x^2 - y^2) .$$

Ognuna di queste ultime due equazioni, la prima polare, la seconda ortogonale, fa conoscere che il cercato luogo geometrico dei *vertici* delle iperbole di tangenza, è pure una lemniscata, come in principio fu asserito.

160.° Essendo già dimostrato che la lemniscata (99), passa pei vertici della iperbola generatrice (§ 41, (148.°)); perciò, facendo nel suo secondo membro $\varphi = 0$, si avrà $a_1 = c$: vale a dire il semiasse trasverso della detta iperbola generatrice, uguaglia la eccentricità comune alle coniche della serie data. Ma la stessa iperbola generatrice, per essere equilatera, deve avere, come dalla geometria sappiamo, il semiasse alla eccentricità sua c_2 , nel rapporto di $1 : \sqrt{2}$;

quindi le due eccentricità, una della iperbola generatrice, l'altra delle coniche omofocali, forniranno la proporzione

$$(101) \qquad c : c_2 = 1 : \sqrt{2} .$$

161.° Deve riconoscersi, che questo medesimo rapporto è pure quello, nel quale stanno fra loro, la eccentricità massima fra tutte le appartenenti alle iperbole di tangenza, e la eccentricità comune delle coniche omofocali; poichè (§ 6, (15.°)) ponendo nella (28) $\alpha = 45.°$, avremo la proporzione seguente

$$c'(= c_1) : c = \sqrt{2} : 1 .$$

Dalla coesistenza di queste due proporzioni, si ha $c_2 = c_1$; vale a dire la eccentricità c_2 della iperbola generatrice della lemniscata, eguaglia la eccentricità massima c_1, fra tutte quelle appartenenti alle iperbole di tangenza. E riflettendo che le indicate due iperbole, l' una e l'altra equilatere, posseggono il medesimo centro, e le medesime direzioni degli assi, dobbiamo concludere che queste curve si confondono fra loro.

162.° Da quanto fu dimostrato nell'articolo che precede, possiamo dedurre il seguente

Teorema XXX. *Guidando ad una serie di coniche omofocali tanti sistemi, ognuno di tangenti fra loro parallele, il geometrico luogo dei vertici delle relative iperbole di tangenza, è una lemniscata, che ha per generatrice quella fra le iperbole equilatere di tangenza, che fra tutte possiede la eccentricità maggiore: questa poi deve stare alla eccentricità comune delle indicate coniche, come* $\sqrt{2} : 1$.

163.° Per delucidare graficamente il teorema ora esposto, è da riflettere (fig. 28), che il geometrico luogo dei vertici delle indicate iperbole di tangenza, consiste nella lemniscata

$$O\, p\, a'\, s''\, r''\, O\, r'''\, s'''\, b'\, p' ,$$

di cui la iperbola generatrice, trovasi disegnata nella figura stessa, mediante la L a' R R' b' L'. Sappiamo inoltre che la medesima dev'essere equilatera, e che i suoi vertici debbono coincidere coi punti a', b'. I fuochi di questa iperbola sono nei punti g, h, i quali contemporaneamente sono vertici della iperbola I h K I' g K', generatrice della lemniscata O r s h q O q' g s' r', luogo geometrico dei fuochi delle diverse iperbole di tangenza. Quindi può dirsi che i vertici g, h della iperbola generatrice della indicata lemniscata dei fuochi, coincidono coi fuochi della seconda iperbola, generatrice della lemniscata dei vertici.

Supponendo poi cognita la lemniscata dei vertici, si troveranno anche quelli r'', r''' di una qualunque iperbola di tangenza F r'' G F' r''' G', i quali consistono nei punti d'incontro dell'asse PQ di questa iperbola, colla medesima lemniscata.

164.° In quella guisa che il teorema XXVIII fu esteso, mediante il teorema XXIX, alle iperbole d'intersecazione, similmente potremo estendere il teorema che precede alle iperbole stesse, mediante il seguente

Teorema XXXI. *Guidando ad una serie di coniche omofocali tanti sistemi, ognuno di parallele tangenti alle coniche medesime, il geometrico luogo dei vertici delle relative iperbole d'intersecazione, consiste pur esso in una lemniscata; e la seconda parte del teorema XXX, avrà luogo egualmente anche in questo.*

Dividendo la (99) per la (94), avremo

$$a_1 : c_1 = 1 : \sqrt{2} \,,$$

e siccome a_1, c_1 sono i raggi vettori appartenenti al medesimo valore di φ, relativi alle due lemniscate, una dei vertici, l'altra dei fuochi delle iperbole di tangenza; così vediamo *che queste lemniscate sono simili fra loro, e similmente poste, rispetto al centro comune ad esse.*

§ 44.

I teoremi finora dimostrati circa i luoghi geometrici, tanto dei fuochi, quanto dei vertici delle iperbole equilatere, sia di tangenza, sia d'intersecazione, possono ancora ottenersi mediante un punto di vista, differente da quello che precede; cioè quei teoremi si possono raggiungere, senza dipendere dalla omofocalità delle coniche date. In fatti guidando ad una serie di coniche omofocali tutte le iperbole equilatere di tangenza, corrispondenti alle possibili direzioni dei sistemi di parallele tangenti, sappiamo che queste iperbole (§ 4, (11.°)) hanno un centro comune, il quale coincide con quello appartenente alle coniche stesse. Sappiamo inoltre che queste iperbole di tangenza, debbono passare pei due fuochi comuni alle coniche omofocali. Da ultimo sappiamo (§ 18, (52.°)) che qualunque iperbola equilatera soddisfacente a queste condizioni, deve considerarsi come iperbola di tangenza rispetto ad un sistema di coniche omofocali.

165.° Da ciò discende che le iperbole, siano di tangenza, siano d'intersecazione si possono anche definire indipendentemente dalla omofocalità, dicendo che sono esse quelle iperbole equilatere concentriche, passanti per due punti egualmente lontani dal centro loro comune, i quali si congiungono da

una retta, che passa pel centro stesso, e che perciò costituisce un diametro in ciascuna iperbola; quindi è chiaro che, se la iperbola medesima passerà per uno di questi due punti, dovrà passare anche per l'altro. Da ciò concludiamo che le condizioni ora indicate, per determinare completamente le stesse iperbole equilatere , senza dipendere dalla omofocalità , si riducono soltanto alle due seguenti, cioè: 1.° che le iperbole equilatere, sieno di tangenza, sieno d'intersecazione debbono essere *concentriche* : 2.° che debbono ciascuna passare per *un dato punto*.

166.° Da quanto fu ora esposto, e dal considerare che la iperbola equilatera generatrice, indicata nel teorema XXVIII, possiede una eccentricità, doppia di quella spettante alle coniche omofocali, considerate in esso, vediamo che il medesimo può enunciarsi diversamente col seguente

Teorema XXXII. *Il geometrico luogo dei fuochi di tutte le iperbole equilatere concentriche , le quali passano per un dato punto , consiste in una lemniscata. La direzione poi dell' asse appartenente alla iperbola equilatera generatrice di questa lemniscata, è una retta, che passa pel comune centro, e pel dato punto ; mentre la eccentricità della iperbola medesima, eguaglia la doppia distanza di questi due punti.*

Si verifica facilmente (fig. 28), che O rappresenta il centro comune, ed a' il punto dato, pel quale debbono passare tutte le iperbole equilatere. Il geometrico luogo dei fuochi di tutte queste iperbole consiste in una lemniscata $O\,q\,h\,s\,r\,O\,r'\,s''\,g\,q'$. La iperbola equilatera $I\,h\,K\,I'\,g\,K'$, generatrice di questa lemniscata, possiede per asse trasverso la retta gh, che passa pel dato punto a', e pel centro comune O. Inoltre la sua eccentricità Of, risulta doppia della distanza Oa' fra il centro, ed il punto dato.

167.° Tutto quanto fu ora esposto, riguardo al geometrico luogo dei fuochi delle iperbole di tangenza, può ripetersi eziandio, riguardo al geometrico luogo dei vertici delle iperbole stesse. Quindi osservando che (fig. 28), il semiasse Oa' della iperbola generatrice della lemniscata dei vertici, è anche la distanza fra il centro comune O, ed il punto dato a'; potrà il teorema XXX, dar luogo all'altro seguente.

Teorema XXXIII. *Il geometrico luogo dei vertici di tutte le iperbole equilatere concentriche, le quali passano per un dato punto, consiste in una lemniscata. La direzione dell'asse appartenente alla iperbola equilatera, generatrice di questa lemniscata, è una retta, che passa pel comune centro, e per quel dato punto; mentre la eccentricità della iperbola medesima , è alla distanza fra i due punti stessi, come* $\sqrt{2} : 1$.

§ 45.

Assegneremo in questo paragrafo,il geometrico luogo dei vertici, di una serie d' *iperbole*, fra loro concentriche; le quali, passando tutte per un dato punto, posseggono un *qualunque* l'angolo assintotico eguale in ognuna. Si collochi l'origine delle coordinate x, y nel centro comune di queste iperbole; inoltre pongasi un altro sistema di coordinate x', y' concentrico al primo, in guisa che l'asse delle x' coincida con quello trasverso di una qualunque delle indicate iperbole, essendo l' angolo $(xx') = \omega$. L'equazione di questa iperbola, quando al secondo sistema sia riferita, sarà la seguente

$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{(x'^2 - a^2)}\ ,$$

ovvero la

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 + a^2b^2 = 0\ , \tag{102}$$

ove a rappresenta il semiasse trasverso della iperbola stessa.

168.° Volendo che questa iperbola riferiscasi al primo sistema fisso di coordinate, x, y, dovremo secondo le (18), (§ 3), cangiare le x', y' rispettivamente nelle

$$x\cos.\omega - y\text{sen}.\omega\ , \quad \text{ed} \quad x\text{sen}.\omega + y\cos.\omega\ .$$

Fatte nella (102) queste sostituzioni, avremo la

$$a^2(x^2\text{sen}.^2\omega + y^2\cos.^2\omega + 2xy\text{sen}.\omega\cos.\omega)$$

$$- b^2(x^2\cos.^2\omega + y^2\text{sen}.^2\omega - 2xy\text{sen}.\omega\cos.\omega) + a^2b^2 = 0\ ,$$

e riducendo sarà

$$\left\{\begin{aligned} &(a^2\text{sen}.^2\omega - b^2\cos.^2\omega)x^2 + (a^2\cos.^2\omega - b^2\text{sen}.^2\omega)y^2 \\ &\quad + 2(a^2 + b^2)xy\text{sen}.\omega\cos.\omega + a^2b^2 = 0\ . \end{aligned}\right. \tag{103}$$

Questa equazione rappresenta *ognuna* di quelle iperbole, che hanno il centro loro nella origine delle coordinate, mentre l'asse trasverso mobile delle medesime iperbole, forma l'angolo variabile ω, coll'asse fisso delle ascisse.

169.° Introducendo nella (103) la condizione, che l' angolo assintotico

qualunque delle iperbole dalla medesima rappresentate, sia costantemente 2δ in ognuna, dovremo avere per qualunque iperbola

$$\text{tang.}\delta = \frac{b}{a}, \quad \text{ovvero} \quad b = a\text{tang.}\delta\,,$$

e la (103) si ridurrà nella

$$(\text{sen.}^2\omega - \cos.^2\omega\text{tang.}^2\delta)x^2 + (\cos.^2\omega - \text{sen.}^2\omega\text{tang.}^2\delta)y^2$$
$$+ 2(1 + \text{tang.}^2\delta)xy\text{sen.}\omega\cos.\omega + a^2\text{tang.}^2\delta = 0\,.$$

Moltiplicando per $\cos.^2\delta$, otterremo la

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\text{sen.}^2\omega\cos.^2\delta - \cos.^2\omega\text{sen.}^2\delta)x^2 \\ &+ (\cos.^2\omega\cos.^2\delta - \text{sen.}^2\omega\text{sen.}^2\delta)y^2 \\ &+ 2xy\text{sen.}\omega\cos.\omega + a^2\text{sen.}^2\delta = 0\,, \end{aligned} \right.$$

e questa equazione rappresenta tutte quelle iperbole che hanno: 1.° il loro centro nella origine delle coordinate; 2.° il semiasse trasverso variabile $= a$; 3.° l'angolo assintotico costante 2δ; 4.° l'angolo variabile ω, compreso fra l'asse trasverso, e quello delle ascisse x.

170.° Per semplicità maggiore, facciamo che l'asse delle ascisse, passi per quel punto, pel quale debbono passare tutte le iperbole della equazione (104); e chiamiamo p la distanza costante di questo punto dalla origine delle coordinate, ossia dal centro delle iperbole stesse. Posto ciò chiaro apparisce, che la (104) dev'essere soddisfatta, dal porre in essa

$$x = p \quad \text{ed} \quad y = 0\,;$$

laonde, in questo caso, l'equazione medesima si ridurrà nella seguente

$$(105) \qquad (\text{sen.}^2\omega\cos.^2\delta - \cos.^2\omega\text{sen.}^2\delta)p^2 + a^2\text{sen.}^2\delta = 0\,.$$

che rappresenta, per mezzo delle coordinate polari ω ed a, il geometrico luogo dei vertici sopra indicati.

Per giungere, col mezzo delle coordinate ortogonali, al geometrico luogo dei vertici di queste iperbole, come ci siamo proposti; riflettiamo che l' asse trasverso di qualunque iperbola è la variabile a, mentre l'angolo che questo asse forma con quello delle x, venne indicato con ω: quindi chiaro apparisce che, se denoteremo con x_1, y_1 le coordinate di un qualunque vertice, fra quelli appartenenti al sistema loro destro, dovremo avere le

$$(106) \qquad x_1 = a\cos.\omega\,, \quad \text{ed} \quad y_1 = a\text{sen.}\omega\,,$$

mentre le coordinate di un qualunque vertice, fra quelli che appartengono al sistema loro sinistro, saranno le

(107) $$x_1 = -a\cos.\omega\,, \quad \text{ed} \quad y_1 = -a\text{sen}.\omega\ .$$

Eliminando i simboli a ed ω dalla (105), mediante le (106), si otterrà il geometrico luogo del primo sistema dei vertici di tutte le iperbole in proposito. Per tanto dalle (106) abbiamo le

(108) $$a^2 = x_1^2 + y_1^2\,, \quad \cos.^2\omega = \frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2}\,, \quad \text{sen}.^2\omega = \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}\,,$$

e sostituendo questi valori nella (105), avremo la

$$\left(\frac{\cos.^2\delta}{x^2 + y^2}\,y^2 - \frac{\text{sen}.^2\delta}{x^2 + y^2}\,x^2\right)p^2 + (x^2 + y^2)\text{sen}.^2\delta = 0\ ,$$

nella quale furono soppressi gli accenti, perchè ora inutili; e riducendo si avrà

(109) $$p^2x^2 - p^2y^2\cot.^2\delta = (x^2 + y^2)^2\ .$$

Quando poi si volesse il geometrico luogo del sistema sinistro dei vertici delle iperbole stesse, dovrebbero eliminarsi le medesime a, ω della (105), mediante le (107). Ma siccome la (105) contiene i simboli da eliminarsi, tutti elevati alla seconda potenza; perciò, sebbene le (107) sieno di contrario segno a quello delle (106), tuttavia l'equazione risultante, sarà pure in questo caso la (109). Da ciò si deduce che l'uno e l'altro vertice di ciascuna iperbola di quelle in proposito, trovansi nella medesima curva, rappresentata dalla (109).

171.° Confrontando la (109) colla (89), vediamo che queste due curve coincidono fra loro, allorchè abbiasi

$$m = p\,, \quad n = p\cot.\delta\ .$$

Quindi apparisce (§ 41, (148.°) che la cercata curva dei vertici, consiste nella pedale centrica di una iperbola, che possiede il semiasse trasverso $m = p$, ed il semiasse coniugato $n = p\cot.\delta$. Inoltre, μ denotando il suo semiangolo assintotico, avremo

$$\text{tang}.\mu = \frac{n}{m} = \cot.\ \delta\ ;$$

quindi sarà

(110) $$\mu = \frac{\pi}{2} - \delta\ .$$

Dunque l' iperbola che ha per pedale centrica la (109) , cioè la curva luogo geometrico dei vertici appartenenti alle iperbole in proposito, possiede un semiangolo assintotico , non uguale a quello δ , *comune* alle indicate iperbole ; ma bensì questi due semiangoli assintotici, sono uno complemento dell'altro, come risulta dalla (110).

172.° Inoltre se riflettiamo che (§. 41 , (148.°)) la pedale centrica di una iperbola, sempre passa pei due vertici della iperbola medesima; e se abbiamo riguardo a quanto fu ora stabilito, circa la iperbola generatrice della pedale sua centrica (109), potremo tutto riassumere nel seguente

Teorema XXXIV. *Il geometrico luogo dei vertici di una serie d' iperbole concentriche, le quali, oltre al passare tutte per un dato punto fisso, posseggono un medesimo semiangolo assintotico , consiste nella pedale centrica di una iperbola, che ha lo stesso centro delle prime, un suo vertice coincidente col dato punto, ed un semiangolo assintotico complemento di quello comune alle iperbole della serie data.*

Si vede facilmente, che l'attuale teorema è più generale del precedente XXXIII, il quale può considerarsi come un suo corollario ; però mentre l'attuale comprende tutte le iperbole, il XXXIII comprende soltanto quelle che sono equilatere.

173.° Per dichiarare con una costruzione (fig. 29) questo teorema, rappresenti N il centro comune della data serie d' iperbole, sia P il dato punto pel quale tutte debbono passare , facciasi $ROR' = 2\delta$ l' angolo assintotico , che per quello riguarda la sua grandezza, è comune a tutte le iperbole della serie. Abbiamo, per maggiore semplicità, disegnate soltanto quelle iperbole, di cui gli assi trasversi passano pel secondo e quarto quadrante delle coordinate, e sono di numero sei, rappresentate rispettivamente dalle

$$SPUTP'Z \; ; \; S'PV'U'T'W'P'Z' \; ; \; S''PV''U''T''W''P'Z'' \; ;$$

$$S'''PV'''U'''T'''W'''P'Z''' \; ; \; S^{iv}PV^{iv}U^{iv}T^{iv}W^{iv}P'Z^{iv} \; ; \; PV^{v}U^{v}T^{v}W^{v}P'Z^{v} \, .$$

La curva poi dei vertici, è rappresentata dalla

$$OmPV'V''V'''V^{iv}V^{v}OW^{v}W^{iv}W'''W''W'P'n \, ,$$

pedale centrica di un'altra iperbola, che passa eziandio pel punto dato P, ed è rappresentata da $GPHG'P'H'$, mentre l' angolo $R''OR'''$ assintotico di essa, congiunto all'angolo assintotico comune alle iperbole della data serie, e rappresentato da POU^{vi} per la iperbola $PV^{v}U^{v}T^{v}W^{v}P'Z^{v}$, formano 180.° Ciò

bene si riconosce nella figura medesima, considerando che i rispettivi lati di questi due angoli, cioè le rette OR'', OR', e le OR, OR''', comprendono angoli di 90° fra loro; perciò, come sappiamo dalla geometria, la somma degli angoli assintotici $R''OR''' + ROR'$ dovrà egnagliare π. È poi facile immaginare, che la prima iperbola SPUTP'Z della serie data, ruotando intorno al centro comune O, produca di mano in mano le altre iperbole; cosicchè diminuisca continuamente in questo suo moto rotatorio l'asse delle medesime, senza che queste cessino di passare tutte pel punto P. Gli assi trasversi loro, prenderanno successivamente le posizioni

$$PP', \; V'W', \; V''W'', \; V'''W''', \; V^{iv}W^{iv}, \; V^{v}W^{v}.$$

Finalmente col diminuire sempre più l'asse trasverso, a motivo della sua rotazione, partendo esso da $V^{v}W^{v}$, i corrispondenti vertici sempre più si accosteranno al centro comune O; cosicchè nell'istante in cui l'asse trasverso medesimo riducasi a zero, la iperbola corrispondente ridurrassi alle due rette $T^{vi}U^{vi}$, $F\varphi$, le quali s' intersecheranno fra loro nel centro comune O, sotto l'angolo assintotico 2δ invariato. Da ciò risulta che *l'asse trasverso della iperbola ruotante, può nel suo moto rotatorio, giungere soltanto a prendere le direzioni* OR, *ed* OR', *determinate dal semiangolo assintotico dato*

$$XOR = XOR' = \delta.$$

Inoltre, nel caso della figura, gli assintoti della medesima iperbola ruotante, non oltrepassano le rette $T^{vi}U^{vi}$, $T^{vii}U^{vii}$; in guisa che, lo spazio compreso fra le medesime, corrispondente all'angolo acuto, $T^{vi}OT^{vii}$, e dall'opposto al vertice, non viene occupato dalle iperbole prodotte da questa rotazione. Tale fatto però non si verifica in generale; perchè dipendente dall'essere il *dato* angolo assintotico 2δ, minore o maggiore di un retto. La figura stessa rappresenta il primo di questi due casi; quindi la OR', non può giungere a formare un angolo di 45.° coll'asse OX, e la OU^{vi} non lo può formare di 90.° col medesimo asse. Quante volte poi l'angolo assintotico 2δ fosse ottuso, caso che non è rappresentato in figura, la OR' divergerebbe più di 45.° dall'asse OX; quindi la OU^{vi} più di 90.° dall'asse medesimo: perciò chiaro apparisce che l' indicato spazio, nel quale non possono entrare le iperbole, più non esisterebbe.

Quando si avesse $2\delta = 90.°$, vale a dire quando le iperbole della serie fossero equilatere, si avrebbe il caso limite, in cui le rette OU^{vi} ed OU^{vii}, coinciderebbero l'una sull'altra; quindi s' incontrerebbe il caso già considerato

(§. 44, (167.°)), nel quale il geometrico luogo dei vertici di queste iperbole, risulta da una lemniscata. Riguardo inoltre al caso medesimo, riflettiamo che il teorema XXXIV conferma l' altro XXXIII ; poichè nel primo di questi teoremi, l'angolo assintotico della iperbola generatrice, sommato coll'altro assintotico comune alle iperbole della serie, formano insieme 180.° : ma nel teorema XXXIII questi due angoli pur essi formano insieme 180.°, perchè ognuno dei medesimi è di 90.°; dunque si verifica la indicata conferma fra quei due teoremi.

§ 46.

Col teorema XXXIV, abbiamo assegnato il geometrico luogo dei vertici di una serie d' iperbole, definita sul principiare del §. 45 ; occupiamoci ora nell'assegnare il geometrico luogo dei fuochi della medesima serie d' iperbole.

174.° A questo fine debbo premettere, che chiamerò *punto equiquoziente*, riguardo alla data serie d' iperbole, quello mobile Q sull'asse delle medesime, collocato in ciascuna iperbola (fig. 30), per modo, che il rapporto fra la sua distanza QO dal centro comune O, ed il semiasse trasverso FO della iperbola medesima, rimanga costante. Per trovare analiticamente questo punto nella data serie d' iperbole, dobbiamo valerci della (105), che, cambiando in essa ω in φ, ed a in r, si riduce alla

$$(111) \qquad r = p\sqrt{(\cos.^2\varphi - \text{sen.}^2\varphi \cot.^2\delta)} \ ,$$

curva che rappresenta il geometrico luogo dei vertici, espresso colle coordinate polari r, φ.

175.° Sia q il valore numerico del dato rapporto, relativo al punto equiquoziente, avremo

$$\frac{\text{OQ}}{\text{OF}} = q \ ,$$

e chiamando r' (= OQ) il raggio vettore della curva da determinarsi , dovremo per un *medesimo* valore di φ, avere la

$$\frac{r'}{r} = q \ ;$$

perciò dalla (111) si avrà la

$$(112) \qquad r' = pq\sqrt{(\cos.^2\varphi - \cot.^2\delta \text{sen.}^2\varphi)} \ ,$$

equazione che rappresenta il cercato luogo geometrico del punto Q. La equa-

zione medesima, per la (90) (§ 41), rappresenta la pedale centrica di una iperbola, di cui

$$pq \ , \ pq\cot.\delta \ ,$$

esprimono rispettivamente il semiasse trasverso, ed il suo semiasse coniugato; mentre il semiangolo assintotico μ' della medesima, si ottiene dalla

$$\operatorname{tang}.\mu' = \frac{pq\cot.\delta}{pq} = \cot.\delta \ ,$$

che fornisce la

$$\mu' = \frac{\pi}{2} - \delta \ .$$

176.° Da ciò si vede che, qualunque sia la posizione del punto Q sull'asse della iperbola, il suo geometrico luogo consiste sempre nella pedale centrica di una iperbola, di angolo assintotico costante $\pi - 2\delta$, eguale a quello 2μ, corrispondente alla iperbola generatrice, del geometrico luogo dei vertici (§ 45, (171.°)). Quindi possiamo enunciare il seguente

Teorema XXXV. *Il geometrico luogo di un punto equiquoziente, relativo ad una serie d' iperbole concentriche, le quali passando per un dato punto fisso, posseggono tutte lo stesso angolo assintotico, è la pedale centrica di una iperbola. Questa è concentrica colle iperbole della serie; l'asse trasverso della medesima passa pel dato punto, e possiede un angolo assintotico, il quale sommato con quello comune alle iperbole della serie, forma due retti. Finalmente si trova il semiasse trasverso di questa iperbola, moltiplicando il dato rapporto relativo a quel punto equiquoziente, per la distanza del dato punto fisso dal centro comune alle iperbole stesse.*

§ 47.

Ora passando, come ci proponemmo (§ 46), a determinare il geometrico luogo dei fuochi, appartenente alla ruotante iperbola, ed obbligata sempre a passare per un dato punto, riflettiamo che in questo caso il rapporto

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OF}} = q \ ,$$

è necessariamente costante; perchè in una iperbola, quando, come nel caso nostro, è costante l'angolo assintotico, è pure costante il rapporto fra la eccentricità e l'asse qualunque della medesima, rapporto che, nel caso attuale,

consiste nella ragione OQ : OF; quindi sarà

$$q=\frac{OQ}{OF}=\frac{1}{\cos.\delta},$$

ove OQ rappresenta la eccentricità di una qualunque iperbola ruotante, mentre OF rappresenta il semiasse trasverso della iperbola stessa, δ essendo il suo semiangolo assintotico costante.

177.° Sostituiscasi nella (112) il valore di q ora trovato, ed avremo la

$$r'=p\sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2\delta}\cos.^2\varphi-\frac{1}{\operatorname{sen.}^2\delta}\operatorname{sen}^2\varphi\right)}.$$

Da questa equazione, facendo in essa $\varphi=o$, abbiamo

$$r'=\frac{p}{\cos.\delta},$$

e rifiettendo che in tale caso, r' esprime tanto il raggio vettore del vertice della pedale indicata, quanto il semiasse trasverso della sua iperbola generatrice; potremo concludere, che il semiasse trasverso medesimo, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente per un cateto la distanza p, e l' angolo δ adiacente al cateto stesso. Questa conseguenza discende anche dall'ultimo periodo del teorema precedente, quante volte in esso introducasi pel dato rapporto, quello relativo al caso attuale; cioè il rapporto $\frac{1}{\cos.\delta}$ fra la eccentricità, ed il semiasse trasverso. Dopo ciò facilmente si potrà conclude il seguente

Teorema XXXVI. Il *geometrico luogo dei fuochi di una serie d' iperbole fra loro concentriche, le quali oltre a passare per un dato punto fisso, posseggono lo stesso angolo assintotico, è una pedale centrica di una iperbola. Questa è pure concentrica con quelle costituenti la serie, possiede un semiangolo assintotico complemento di quello comune alle date iperbole, ed ha il semiasse trasverso rappresentato dalla ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente per un cateto la distanza del comune centro dal punto fisso, e per angolo adiacente a questo cateto, il semiangolo assintotico delle iperbole indicate.*

Questo teorema comprende il XXXII come corollario; però l'attuale appartiene a tutte le iperbole, mentre quello richiede iperbole ognuna equilatera.

178.° Per dichiarare con una costruzione lo stesso teorema, osserviamo (fig. 29), che il geometrico luogo dei fuochi, appartenenti alle date iperbole

della serie, viene rappresentato dalla curva

$$O\,F^{IV}\,F'''\,F''\,F'\,F\,m'\,O\,n'\,\varphi\,f'\,f''\,f'''\,f^{IV}\;,$$

che costituisce la pedale centrica della iperbola D F E D′ φ E′, i vertici F, φ della quale, coincidono coi fuochi della iperbola S P U T P′ Z, cioè di quella fra le iperbole date, che possiede il semiasse trasverso maggiore di tutti gli altri della serie. Gli assintoti O R″, O R‴ della D F E D′ φ E′, sono comuni anche alla iperbola generatrice della curva dei vertici, cioè alla iperbola G P H G′P′H′.

Come nell'articolo 173.°, fu considerato il moto generatore del geometrico luogo dei vertici, mediante la iperbola ruotante; così potrebbe qui considerarsi anche il moto generatore del geometrico luogo dei fuochi, mediante la ruotazione della medesima curva. Ma poichè queste due ricerche, presentano fra loro un' analogia quasi del tutto completa ; perciò qui ci limiteremo ad una esposizione breve, dei soli risultamenti, relativi alla seconda fra le ricerche stesse.

Partendo la iperbola ruotante, dalla sua posizione iniziale, nella quale il suo asse trasverso passa pel dato punto P , il rispettivo punto della curva dei fuochi, si trova in F ; però mentre la iperbola stessa ruota, la eccentricità sua diminuisce, vale a dire decresce il raggio vettore r della curva dei fuochi, esso divenendo successivamente

$$OF\;,\quad OF'\;,\quad OF''\;,\quad OF'''\;,\; OF^{IV}, \ldots$$

Continuando la iperbola ruotante il suo moto , il fuoco della medesima , sempre più si avvicinerà al centro comune O , ed allora giungerà in questo punto , quando la iperbola stessa , tutto il suo moto avrà compiuto ; cioè quando il suo trasverso asse, avrà percorso tutto l'angolare spazio, terminato dall'asse X O, e dall'assintoto R′ O. Il fin quì detto fa vedere, come viene dalla curva dei fuochi percorso un solo quadrante; lo che basta per mostrare, come i tre altri vengano percorsi dalla curva stessa.

§ 48.

179.° Pongasi dato il centro comune di una serie di *ellissi*, fra loro simili, ma non similmente poste, le quali passino tutte per *un dato punto*; si cercano i luoghi geometrici dei vertici loro. Sappiamo che la equazione della iperbola, si trasforma in quella propria della ellisse, quando in luogo del semiasse b, pongasi $b\sqrt{-1}$. Possiamo perciò concludere immediatamente, fa-

cendo questa sostituzione nella (103), che la equazione di *ognuna* delle ellissi dei due semiassi variabili a, b, coi loro centri nella origine delle coordinate, rappresentandosi con ω l'angolo compreso fra il semiasse loro a, e l'asse delle ascisse x, consiste nella seguente

$$(113)\quad \begin{cases} (a^2\text{sen.}^2\omega + b^2\cos.^2\omega)x^2 + (a^2\cos.^2\omega + b^2\,\text{sen.}^2\omega)y^2 \\ + 2xy(a^2 - b^2)\,\text{sen.}\omega\,\cos.\omega - a^2b^2 = 0\ . \end{cases}$$

180.° Per introdurre in questa uguaglianza la condizione, che le ellissi sono simili, riflettiamo essere tali queste curve, allora quando i *corrispondenti* semiassi delle medesime, stanno fra loro in un rapporto costante. Per tanto, chiamando h il valore numerico di questo rapporto, è chiaro che la condizione della similitudine, potrà introdursi nella (113), mediante una qualunque delle due seguenti

$$(114)\qquad b = ha\ ,\ b = \frac{1}{h}a\ ,$$

ognuna delle quali soddisfa la condizione stessa. Ritenendo per ora la prima soltanto delle (114), ed introducendola nella (113), avremo la

$$(115)\quad \begin{cases} (\text{sen.}^2\omega + h^2\cos.^2\omega)x^2 + (\cos.^2\omega + h^2\text{sen.}^2\omega)y^2 \\ + 2xy(1 - h^2)\text{sen.}\omega\cos.\omega - a^2h^2 = 0\ . \end{cases}$$

181.° Pongasi per maggiore semplicità, che l'asse delle x passi pel dato punto, collocato alla distanza p dal comune centro delle ellissi; dovrà la (115) essere soddisfatta dalle coordinate del punto stesso, cioè dalle

$$x = p\ ,\ y = 0\ ,$$

quindi avremo la

$$(116)\qquad (\text{sen.}^2\omega + h^2\cos.^2\omega)p^2 - a^2h^2 = 0\ .$$

182.° Da ora in poi dobbiamo distinguere, se il geometrico luogo cercato, sia quello dei due vertici, corrispondenti al semiasse trasverso a, che comprende coll'asse delle x l'angolo ω; ovvero sia quello degli altri due vertici, corrispondenti al semiasse coniugato b. Nel *primo* caso abbiamo pei due vertici rispettivamente le (106), (107); cosicchè, sostituiti nella (116) i valori delle

$$a^2\ ,\ \text{sen.}^2\omega\ ,\ \cos.^2\omega\ ,$$

ottenuti da ciascuna di queste due citate uguaglianze, avremo, tanto per le (106), quanto per le (107), la

$$\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}+h^2\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)p^2=h^2(x^2+y^2) \ ,$$

ovvero la

$$(117) \qquad p^2x^2+\frac{p^2}{h^2}y^2=(x^2+y^2)^2 \ ,$$

nelle quali abbiamo soppresso gli accenti. Osservando che, tanto per le (106), quanto per le (107), si giunge alla medesima equazione (117); dovemo concludere, che i due vertici, corrispondenti all'asse trasverso $2a$, sono collocati sopra una medesima curva, cioè sopra la (117).

183.° Venendo al *secondo* caso, e ricercando il geometrico luogo dei due vertici, corrispondenti all' altro asse $2b=2ha$, riflettiamo che, per essere questo perpendicolare all'altro $2a$, deve fare coll'asse delle x, un angolo espresso da $90°\pm\omega$, prescindendo dal segno algebrico; quindi avremo le

$$x=b\cos.(90°\pm\omega)=ha\text{sen}.\omega \ ,$$

$$y=b\text{sen}.(90°\pm\omega)=ha\cos.\omega \ ,$$

Queste uguaglianze, nelle quali anche prescindemmo dal segno algebrico, valgono per l'uno e l'altro vertice dell'asse $2b$, da cui si otterranno le

$$(118) \quad a^2h^2=x^2+y^2 \ , \ \cos.^2\omega=\frac{y^2}{x^2+y^2} \ , \ \text{sen}.^2\omega=\frac{x^2}{x^2+y^2} \ .$$

Introducendo questi valori nella (116), avremo la

$$(x^2+h^2y^2)p^2-(x^2+y^2)^2=0 \ ,$$

ovvero

$$(119) \qquad p^2x^2+h^2p^2y^2=(x^2+y^2)^2 \ ,$$

equazione che può facilmente ottenersi anche dalla (117), facendo in essa la sostituzione di $\frac{1}{h}$ in luogo di h.

184.° Abbiamo stabilito mediante le (114), che il rapporto dei semiassi di qualunque delle simili ellissi, può esprimersi nei due seguenti modi

$$\frac{b}{a}=h \ , \ \frac{a}{b}=h \ ;$$

perciò chiaro apparisce, che lo sviluppo dei due precedenti casi, potrebbesi ripetere, anche introducendo nella (113) la seconda delle (114), invece della prima. E siccome la seconda stessa riducesi alla prima, cangiando semplicemente h in $\frac{1}{h}$; così rilevasi che pel cangiamento medesimo, effettuato nella (117), dovremo avere una curva , essa pure soddisfacente al quisito. Eseguendo il cangiamento indicato, avremo la

$$p^2x^2 + p^2h^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 ;$$

equazione che coincide colla (119). Concludiamo pertanto che la (119), si può raggiungere, o sostituendo nella (117) $\frac{1}{h}$ in luogo di h , ovvero seguendo l' analisi dell'articolo 183.°

185.° Dai ragionamenti ora istituiti si vede, che il cercato luogo geometrico dei vertici delle indicate ellissi, consiste in due curve *differenti*, rappresentate dalle

$$(117) \qquad p^2x^2 + \frac{p^2}{h^2}y^2 = (x^2 + y^2)^2 ,$$

$$(119) \qquad p^2x^2 + h^2p^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 ,$$

§ 49.

186.° Per analizzare le due precedenti equazioni, confrontiamo le medesime colla (84) (§ 39), e vedremo che l'una e l'altra possono ridursi a coincidere con questa, quando pongasi nella (117)

$$(120) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m = p , \quad n = \dfrac{p}{h} , \\ \text{e nella (119)} \\ m = p , \quad n = hp . \end{array} \right.$$

187.° Quindi è chiaro che le due curve dei vertici, rappresentano le pedali centriche di due ellissi (fig. 31), la prima coi semiassi

$$\text{OP} = p , \quad \text{OV}^{\text{IV}} = \frac{p}{h} ,$$

la seconda coi semiassi

$$\text{OP} = p , \quad \text{O}w = ph ;$$

188.° Si vede inoltre, che le indicate due ellissi, generatrici delle pedali centriche, hanno un semiasse comune OP, che rappresenta il minore appartenente alla ellisse $PV^{iv}P'W^{iv}$, ed il maggiore appartenente all'altra $PwP'v$; le quali due curve sono fra loro simili, essendo chiaro che il rapporto dei corrispondenti semiassi, è per ambedue lo stesso, cioè rappresentato dalla costante h. Di più si vede che le due medesime ellissi, vengono comprese in quelle simili e concentriche date: possiamo da tutto ciò concludere il seguente

Teorema XXXVII. *Il geometrico luogo dei vertici di una serie di ellissi, concentriche fra loro e simili, che passano tutte per un dato punto fisso, consiste nelle pedali centriche di due ellissi, che sono rispettivamente la massima e la minima di quelle costituenti la data serie. La distanza poi fra il comune centro ed il punto dato, esprime tanto il semiasse maggiore della minima, quanto il minore della massima.*

189.° Dichiareremo graficamente il teorema ora concluso, ponendo che da O sia rappresentato (fig. 31) il centro comune della serie di ellissi, fra loro simili; e che rappresenti P il punto dato, pel quale tutte debbono passare. La serie delle ellissi concentriche fra loro, e simili, viene rappresentata dalle

$$PwP'v\,,\quad PV'w'P'W'v',\quad PV''w''P'W''v'',\quad PV'''w'''P'W'''v''',\quad PV^{iv}P'W^{iv}.$$

Tutte queste ellissi trovansi coi loro assi maggiori nel primo e terzo quadrante; e per evitare confusione , abbiamo tralasciato di rappresentare nella figura stessa le altre ellissi, di cui gli assi maggiori passerebbero pel secondo, e quarto quadrante.

Le due curve dei vertici, sono espresse dalle

$$PV'V''V'''V^{iv}mP'W'W''W'''W^{iv}n\;,\quad Pm'ww'w''w'''P'n'vv'v''v''',$$

la prima appartenente al geometrico luogo dei vertici, corrispondenti agli assi maggiori delle simili ellissi della serie loro, la seconda appartenente a quello dei vertici, corrispondenti agli assi minori della serie stessa.

Nella prima di queste due curve, consiste la pedale centrica della ellisse $PV^{iv}P'W^{iv}$, che corrisponde alla massima della data serie; nella seconda poi consiste la pedale centrica della ellisse $PwP'v$, che corrisponde alla minima della serie stessa.

Tornando sui luoghi geometrici delle (117), (119), sappiamo che il primo di questi è la pedale centrica di una ellisse, che possiede i semiassi (v. le (120))

$$m=p\,,\quad n=\frac{p}{h}\,,$$

essendo m il semiasse maggiore OP. Quindi se abbiasi h minore dell unità, si avrebbe $m > n$, ed in tal caso la (117), rappresenterebbe quello dei due luoghi geometrici, che appartiene alla pedale centrica della ellisse massima $W^{IV}PV^{IV}P'$. Per conseguenza in questo medesimo caso, dovrà la (119) rappresentare quella pedale centrica, che si riferisce alla ellisse minima $wP'vP$. Se poi fosse h maggiore della unità, si verificherebbe l'opposto.

Può immaginarsi che la serie delle simili ellissi, venga prodotta ruotando la ellisse $PwP'v$ intorno al comune centro C, in guisa che sempre passi pel punto P, restando però simile a se stessa. Con questo moto rotatorio, gli assi della ellisse ruotante, prendono successivamente le posizioni $W'V'$, $W''V''$, $W'''V'''$,... continuamente crescono, e quando l'asse maggiore della medesima ellisse ruotante, ha percorso un angolo retto, essa riducesi nella $PV^{IV}P'W^{IV}$.

Mentre poi la ellisse indicata concepisce questo moto angolare, il suo minore asse, passando dalla posizione vw, successivamente assume le posizioni $v'w'$, $v''w''$, $v'''w'''$, ..., e giunge nella posizione PP', dopo avere percorso un angolo retto. In questo movimento il vertice v dell' asse minore, descrive l' arco $vv'v''v'''$P della pedale centrica, spettante alla ellisse $PwP'v$. Da ciò si vede che la ellisse ruotante, mentre percorre 90.°, descrive una quarta parte di ciascuna delle due curve dei vertici, e la ellisse medesima, continuando il suo moto rotatorio, sino a compiere un intero giro, avrà prodotto interamente le due curve dei vertici. Per questa proprietà, il caso delle ellissi, distinguesi essenzialmente (§ 45, (173.°)) da quello delle iperbole (fig. 29); poichè nel medesimo, l'asse della iperbola ruotante, può solo descrivere un angolo, eguale al comune assintotico ROR', e disposto simmetricamente rispetto l'asse OX; cioè rispetto la retta di congiunzione, fra il centro comune O, ed il dato punto P. La estensione angolare poi $T^{VII}OU^{VI}$, nella quale sono comprese, tutte le singole iperbole della serie (fig. 29), sarà doppia dell'angolo assintotico ad esse comune.

§ 50.

190.° Come nel caso di una serie d' iperbole concentriche, aventi lo stesso angolo assintotico, ed un punto comune (§ 46, (174°)), fu introdotto il concetto del *punto equiquoziente*, similmente lo introdurremo nel caso attuale di una serie di ellissi, concentriche fra loro, e simili. Ripetiamo adunque, che questo punto, è mobile sopra uno qualunque degli assi della ellisse ruotante, ed è in ciascuno collocato per modo, che il rapporto fra la sua distanza r' dal comune centro, e l'asse nel quale si trova, sia costante.

191.° Indicheremo con q, anche nel caso della serie di ellissi, il rapporto stesso, cioè relativo al punto equiquoziente: dicasi r il raggio vettore della curva dei vertici, raggio che corrisponde sempre ad un semiasse della ellisse ruotante; similmente dicasi r' il raggio vettore spettante alla curva dei punti equiquozienti, raggio che corrisponde alla distanza di questi punti dal centro; avremo per la ipotesi fatta

$$\frac{r'}{r} = q \quad ,$$

come all'articolo 175.°, (§ 46).

192.° Introducendo nelle (117), (119) le coordinate polari (§ 40), quindi sostituendo nelle medesime il valore di r, dato mediante quest'ultima equazione, avremo le

$$(121) \quad r'^2 = p^2q^2\cos.^2\varphi + \frac{p^2q^2}{h^2}\,\text{sen.}^2\varphi \,, \quad r'^2 = p^2q^2\cos.^2\varphi + p^2q^2h^2\text{sen.}^2\varphi \,,$$

la prima delle quali rappresenta (§ 40, (85)) la pedale centrica della ellisse, che ha per semiassi

(122)

$$pq \,,\ \frac{pq}{h} \,,$$

mentre la seconda è la pedale centrica di un altra ellisse, avente per semiassi

$$pq \,,\ pqh \,.$$

193.° Si vede che queste due ellissi, hanno un semiasse pq comune, il quale giace nella direzione OP (fig. 31). In un modo poi del tutto simile a quello dell'articolo 189.°, possiamo quì concludere, che per un $h < 1$, la prima delle (121) rappresenta la pedale centrica della ellisse, generatrice maggiore; mentre la seconda delle stesse (121), rappresenta la pedale centrica della ellisse, generatrice minore; l'apposto poi si verificherà, quando fosse $h > 1$. Per tanto avremo il seguente

Teorema XXXVIII. *Il geometrico luogo di un punto equiquoziente, che appartiene ad una serie di ellissi, concentriche fra loro e simili, ognuna delle quali passa per un dato punto fisso, consiste nelle pedali centriche di due simili ellissi, e similmente poste, rispetto alla massima e minima della serie stessa. I corrispondenti assi di queste ellissi, trovansi moltiplicando rispettivamente quelli della massima e minima ellisse, pel rapporto equiquoziente.*

194.° Il teorema stesso ne abbraccia un altro, nel quale si cerca il geometrico luogo, dei fuochi della data serie di ellissi concentriche fra loro, e simili.

Poichè per questo caso, il rapporto relativo al punto equiquoziente, corrisponde in ciascuna ellisse alla eccentricità sua, divisa pel semiasse maggiore, nel quale si trova il punto dato, rapporto che risulta costante. Poichè, avuto riguardo alla supposta similitudine delle ellissi, abbiamo

$$\frac{b}{a} = h \ ,$$

e siccome sappiamo dover essere

$$b = \sqrt{(a^2 - c^2)} \ ,$$

sarà

$$h = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} = \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)} \ ;$$

perciò dovrà il rapporto $\frac{c}{a} = q$, essere costante, come fu asserito. Dunque i fuochi delle ellissi, appartenenti alla serie data, sono tanti punti equiquozienti; avvegnachè c rappresenta la distanza di qualunque fuoco dal comune centro, ed avremo

$$(123) \qquad q = \sqrt{(1 - h^2)} \ ,$$

equazione da cui viene stabilita la dipendenza *reale* fra il rapporto equiquoziente q, e quello costante h dei semiassi della ellisse che ruota.

195.° In questo caso deve osservarsi che, sebbene qualunque dei fuochi medesimi sia un punto equiquoziente, siccome però questo deve sempre giacere sull'asse maggiore della ellisse ruotante; così vedesi che, pel caso in proposito, la rotazione della ellisse, produrrà una sola delle due pedali, dal teorema precedente indicate. Facilmente poi si vede, che la pedale del caso medesimo, è la centrica di quella ellisse, che nel teorema precedente corrisponde alla massima della serie.

196.° Inoltre apparisce chiaro che, per ottenere il geometrico luogo dei fuochi, dobbiamo sostituire il valore di q, assegnato dalla (123), nella sola prima delle (121), come risulta da quanto fu dichiarato nell'articolo 192.° Per tanto, cangiando r' in r_1, avremo

$$r_1^2 = p^2(1 - h^2)\cos.^2\varphi + \frac{p^2(1 - h^2)}{h^2}\,\text{sen.}^2\varphi \ .$$

Questa equazione polare adunque, rappresenta il geometrico luogo, dei fuochi della indicata serie di ellissi, ed è la pedale centrica di una ellisse (§ 40), che ha per assi $p\sqrt{(1 - h^2)}$, $\frac{p}{h}\sqrt{(1 - h^2)}$.

197.° Dalle precedenti osservazioni, e da quello che fu stabilito nell'ultimo teorema, possiamo concludere il seguente

Teorema XXXIX. *Il geometrico luogo dei fuochi di una serie di ellissi, concentriche fra loro e simili, obbligate a passare per un dato punto, consiste nella pedale centrica di una ellisse, la quale sarà simile, e similmente posta rispetto quella massima della serie data.*

198.° La delucidazione grafica di questo teorema, si ottiene osservando (fig. 31), che il geometrico luogo dei fuochi, è rappresentato dalla curva

$$f f' f'' f''' \mathrm{F}\, n'' f^{\mathrm{vii}} f^{\mathrm{vi}} f^{\mathrm{v}} f^{\mathrm{iv}} \mathrm{F}',$$

pedale centrica della ellisse $f \mathrm{F} f^{\mathrm{vii}} \mathrm{F}'$, ed i punti

$$f, f^{\mathrm{vii}};\quad f', f^{\mathrm{vi}};\quad f'', f^{\mathrm{v}};\quad f''', f^{\mathrm{iv}};\quad \mathrm{F}, \mathrm{F}',$$

rappresentano i fuochi delle rispettive cinque ellissi punteggiate, che costituiscono la data serie loro.

199.° Nel pubblicare questa memoria, fu tenuto l'ordine medesimo, col quale alla nostra mente si presentavano le ricerche in essa contenute ; però dobbiamo avvertire, che la esposizione di queste materie, potrebbe ricevere un ordine più generale, deducendo cioè molte verità per corollario di altre, le quali si trovano quì dimostrate direttamente. Non è poi fuor di proposito, l'osservare la seguente correlazione geometrica: vale a dire che, come il circolo gode tante proprietà non appartenenti alla ellisse; così la iperbola equilatera gode, rispetto alle serie di coniche omofocali, moltissime proprietà, che la comune iperbola non possiede.

APPENDICE

Schiarimento al teorema XVI

200.° La retta d'intersecazione $b'g$ (fig. 11), forma coll'asse $b'\mathrm{X}$ delle parabole omofocali, un angolo $gb'\mathrm{X}$ equivalente alla somma degli angoli $rb'\mathrm{X}$, $\mathrm{T}b'\mathrm{X}$, che sono quelli formati dai due sistemi di parallele, coll'asse comune alle iperbole. Quindi l'angolo $\overline{gb'-\mathrm{X}}$, riesce doppio dell'altro $\overline{g\mathrm{S}-\mathrm{X}}$, che la bisettrice $g\mathrm{S}$ dell'angolo $\mathrm{H}g\mathrm{K}$ dei due sistemi, forma col medesimo asse. In fatti sappiamo dal teorema XIII, applicato al caso della parabola, che la linea d' intersecazione, la quale in questo caso diviene retta gb' d' intersecazione, coincide con quella

di tangenza, che appartiene ad un sistema di tangenti o parallele, che non furono disegnate, o perpendicolari alla retta bisettrice, come le L *l*, L′ *l*′, ... Sappiamo ancora che la tangente fuocale alla linea d' intersecazione, coincide con questa, quando, come nel caso nostro, essa linea diviene una retta. Dunque il teorema IV, articolo 25.°, pel caso attuale dovrà esprimersi come siegue. *La retta di tangenza per una serie di parabole omofocali, forma coll'asse comune a queste, un angolo doppio di quello, formato dal sistema delle tangenti parallele, col medesimo asse; lo che riducesi al teorema III.* E siccome questa retta di tangenza, coincide con quella d' intersecazione, come vedesi (fig. 11), ove gb' è ad un tempo retta d' intersecazione rispetto ai due sistemi di parallele gH e GK, e retta di tangenza rispetto al sistema di parallele Ll; così è chiaro che la retta stessa d' intersecazione gb', forma coll' asse delle parabole un angolo $\overline{gb'\text{—X}}$, doppio di quello $\overline{g\text{S—X}}$, formato coll'asse medesimo, dalla retta gS, bisettrice dell'angolo KgH dei due sistemi di parallele. Ora si vede facilmente che dal teorema XVI, discende il seguente

201.° Corollario. *Se per un punto g, situato fuori di una parabola si guidino ad essa due tangenti, e si congiunga questo punto col fuoco b′ della parabola stessa; la retta gb′ dovrà intersecarla. Se per questa intersecazione si guidi una tangente, formerà essa un angolo retto, colla bisettrice dell'angolo compreso fra quelle due tangenti; ovvero il triangolo, formato dalle tre indicate tangenti, sarà isocele.*

EPITOME DELLA MEMORIA PRECEDENTE

Sviluppo generale dell' equazione , rappresentante qualunque conica , coll' origine delle coordinate in un suo fuoco. Supponendo nella medesima equazione la eccentricità costante , ma variabile l'asse maggiore, rappresenta essa una qualunque serie di coniche omofocali , 1.° ... 4.° —— *Angolo formato dalla tangente ad un qualunque punto di una conica, coll'asse trasverso di essa. Sviluppo dell'equazione, appartenente alla curva di tangenza,* 6.° , 7.° —— *Questa curva passa pei due fuochi comuni alla serie di coniche. Ricerche sulla natura della curva stessa* , 8.° ... 10.° —— *La curva di tangenza è una iperbola equilatera concentrica, rispetto alle coniche omofocali, ed un suo assintoto è parallelo alla direzione del sistema di tangenti,* 10.°, 11.° —— *Spostamento delle coordinate, onde rendere più sem-*

plice l'equazione della iperbola di tangenza, 11.°... 14.° —— Espressione della eccentricità, che appartiene alla iperbola di tangenza, 15.° —— Andamento della eccentricità medesima, pel variare dell'angolo, compreso fra il sistema di parallele tangenti, e l'asse trasverso delle omofocali, 15.°, 16.° —— I casi nei quali la iperbola di tangenza, si riduce a delle rette, sono tre : il primo ha luogo, quando le coniche omofocali divengono parabole; allora si ha una sola retta, che passa pel comune loro fuoco : il secondo si verifica, quando il sistema di parallele tangenti ad esse coniche, sia parallelo ad un asse loro; allora esistono due rette di tangenza, che comprendono un angolo retto : il terzo ha effetto, quando le coniche riduconsi ad una serie di circoli concentrici ; allora si hanno pure due rette di tangenza perpendicolari fra loro, 18.° ... 24.° —— Formula per l'angolo, compreso fra una qualsiasi tangente alla iperbola di tangenza, e l'asse trasverso delle omofocali. La tangente che corrisponde ad un fuoco delle coniche, forma coll' asse trasverso un angolo, doppio di quello spettante al sistema di parallele tangenti, 24.°, 25.° —— Teorema relativo alla iperbola equilatera, 26.° —— Considerazioni sulle coniche omofocali , e sulla specie loro , variando continuamente l' asse trasverso di esse. Partendo quest'asse dall' infinito, le coniche sono da prima circoli, poi vengono ellissi quindi, allorchè il semiasse medesimo diviene minore della eccentricità comune, le coniche divengono iperbole: quando poi l'asse trasverso riducesi a zero, le iperbole si trasformano in due rette. Non tutte le iperbole omofocali, forniscono punti per la iperbola di tangenza. Iperbola limite. Ricerche sopra il moto geometrico del punto di tangenza, quando l'asse trasverso passa dall'essere infinito ad essere nullo 27.°, 28.° —— Variando l'asse medesimo fra questi limiti , dovrà il punto di tangenza descrivere la iperbola di tangenza, in tutta la sua estensione. Si considera un ennunciato, contenuto in un opera del ch. padre M. Iullien, 29.°, 30.° —— Due sistemi di parallele, tangenti alla medesima serie di coniche omofocali, forniscono generalmente parlando due iperbole di tangenza, 31.°, 32.° —— Ma essendo l'angolo compreso fra questi due sistemi un retto, le indicate due iperbole si confonderanno in una, 32.° ... 34.° —— Quando sieno dati due sistemi di parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, e perpendicolari fra loro, per avere completa la curva di tangenza , mediante i soli punti di tangenza , non avvi più bisogno di valersi contemporaneamente delle ellissi e delle iperbole, appartenenti alla serie delle omofocali; ma bensì ciascuna specie di queste curve, fornisce di per se completa la iperbola di tangenza, 35.° —— Particolarizzazione dei

precedenti enunciati, pei tre casi, nei quali le iperbole di tangenza si riducono a delle rette, 36.°, 39.° —— *Dati due sistemi di tangenti parallele, dovrà esistere sempre, pel caso delle ellissi, un parallelogrammo di tangenza,* 39.°...43.° —— *Ma quando le ellissi si trasformino in iperbole, il detto parallelogrammo non esisterà sempre. In questo caso esistono due iperbole limiti,* 43.°...49.° —— *Ricerche sulla possibilità delle tangenti, nel caso delle parabole omofocali. Riassunto dei diversi casi, circa la possibilità, ed il numero delle tangenti, che possono guidarsi ad una serie di coniche, parallelamente a due direzioni date,* 49.°...51.° —— *Data una iperbola, si domandano, tanto le serie di coniche omofocali, quanto le direzioni dei sistemi di tangenti; cosicchè la data iperbola risulti di tangenza,* 51.°...53.° —— *Sviluppo diretto per la curva di tangenza, relativo al caso delle parabole omofocali,* 52.°...55.° —— *Equazione della tangente ad una qualunque conica, espressa in funzione dell'angolo, compreso fra la tangente medesima e l'asse trasverso,* 56.°...64.° —— *Luogo geometrico del punto d' intersecazione di due sistemi di rette parallele, tangenti ad una serie di coniche omofocali, chiamato curva d' intersecazione,* 64.°...66.° —— *Questa curva è anch'essa una iperbola equilatera, concentrica colle coniche, e passante pei fuochi alle medesime comuni. Gli assintoti suoi trovansi, guidando pel comune centro due rette, che dividano in mezzo gli angoli adiacenti delle direzioni, appartenenti rispettivamente ai due sistemi di parallele tangenti,* 67.°...70.° —— *Se ad una serie di coniche, si guidino tre sistemi di parallele tangenti, cosicchè la direzione del primo, divida in mezzo l'angolo compreso fra le direzioni del secondo e terzo; la iperbola di tangenza del primo sistema, si confonde con quella d' intersecazione appartenente al secondo, e terzo,* 71.°, 72.° —— *Guidando ad una serie di coniche omofocali tanti sistemi di parallele tangenti, cosicchè le rette bisettrici degli angoli, formati dalle coppie delle indicate tangenti, riescano parallele fra loro; i vertici degli angoli corrispondenti a queste coppie, si troveranno sopra una medesima iperbola equilatera, ed un assintoto di essa riescirà parallelo alla comune direzione delle bisettrici,* 74.°...76.° —— *Due coppie di sistemi di parallele tangenti, coi lati rispettivamente perpendicolari fra loro, posseggono la medesima iperbola d'intersecazione. A questo enunciato può darsi ancora una forma differente, riflettendo che quattro tangenti, formano un quadrilatero, con due degli angoli opposti, ognuno retto,* 76.°...78.° —— *Formula per la eccentricità della iperbola d' intersecazione,* 79.°...81.° —— *Circa i casi nei quali la iperbola d' intersecazione, si riduce a delle rette: questa ricerca è del tutto simile a quella, che analogamente appartiene alla*

iperbola di tangenza, 81.°...91.° —— *Sulla iperbola d' intersecazione, pel caso in cui gli assi delle coniche omofocali, sieno paralleli ai sistemi di tangenti. Questa iperbola d' intersecazione, possiede una eccentricità massima, rispetto quelle di tutte le iperbole di questa specie,* 91.°...94.° —— *Ricerche sul moto geometrico del punto d' intersecazione, mentre l' asse trasverso riceve successivamente i suoi valori possibili, fra l' infinito, e lo zero. La iperbola d' intersecazione si divide, generalmente parlando, in sei tratti, dei quali quattro di estensione infinita, provengono dalle ellisse, e due di estensione finita provengono dalle iperbole. Confronto di queste provenienze, con quelle rispetto ai punti della iperbola di tangenza,* 95.°...101.° —— *Le due tangenti alla iperbola omofocale limite, guidate parallelamente a quello dei due sistemi di parallele, che forma un angolo acuto coll'asse delle omofocali, maggiore dell'altro, pure acuto, formato dal secondo sistema coll'asse medesimo, sono anche tangenti alla iperbola d' intersecazione,* 101.°...103.° —— *Modificazioni dell'enunciato dei precedenti articoli, pel caso in cui sieno perpendicolari fra loro i sistemi delle parallele tangenti,* 104.° —— *Avendosi due sistemi di tangenti perpendicolari fra loro, non si potrà ottenere, in tutta la estensione sua, la iperbola d' intersecazione, mediante i punti d' intersecazione, per mezzo delle sole ellissi, o delle sole iperbole omofocali,* 105.°, 106.° —— *La tangente fuocale, guidata alla iperbola d' intersecazione, forma coll'asse trasverso delle coniche omofocali, un angolo doppio di quello, formato dalla bisettrice dell'angolo delle due direzioni col medesimo asse,* 107.°, 108.° —— *Data una iperbola equilatera, si domandano le serie di coniche omofocali, e le direzioni di due sistemi di parallele tangenti, alle coniche stesse; cosicchè la iperbola medesima divenga d' intersecazione. Il numero delle soluzioni di tale quesito, è infinitamente maggiore di quello simile, relativo alla iperbola di tangenza,* 108.°...115.° —— *Il teorema dell'articolo* 75.°, *viene applicato al caso, nel quale si considera una conica sola,* 116.°...118.° —— *Costruzione per punti discreti della iperbola equilatera, dati gli assintoti della medesima, ed un punto pel quale deve passare,* 118.°, 119.° —— *Avendosi una serie di coniche omofocali, e due sistemi di tangenti, le due relative iperbole di tangenza, e quella d' intersecazione, s' intersecheranno tutte nei fuochi delle coniche omofocali, senza che le iperbole medesime abbiano altro punto comune,* 120.°...124.° —— *La tangente fuocale della iperbola d' intersecazione, divide in mezzo l' angolo compreso fra le due iperbole di tangenza,* 126.°, 127.° —— *Essendo l' angolo compreso dalle tangenti un retto, la tangente fuocale della unica iperbola di tangenza, e la tangente*

Cenni su di un altro insetto ampellofago, lussureggiante nei vigneti romani.
Comunicazione del cav. prof. Vincenzo Diorio.

La nostra illustre accademica sig. contessa Fiorini-Mazzanti , rimetteva in mie mani, sono or pochi giorni, taluni insetti sorpresi sulla vite vinifera che germogliava; in quei paraggi stessi ove l'anno scorso ebbi l'onore di annunziare all' accademia rinvenute le *Iponomeute* , che giudicando dalle ricerche possibili fra noi, mi credetti autorizzato a ritener per nuove (1). Sono questi d'oggi invece piccoli coleotteri che simulano lo smeraldo ed il zaffiro, per i splendenti colori onde il corpo loro rifulge; e diffusi in quasi tutta l'Europa meridionale , richiamarono già più fiate sù di sè la sferza dello agricoltore , non ostante l'apparente loro bellezza; e l'attenzione dei naturalisti, non sicuri sempre del genere al quale li riportavano. Annunziati infatti dal sommo Linneo per *Curculioni del bidollo* (*Curculio betulae*) (2) dalla *Betula alba* che pure infestano ; furono con il nome istesso indicati da *Gmelin* (3) dal *De Geer*, (4) dal *Fabricio* (5) nell' opera intitolata *Species insectorum* , dal nostro *Petagna* (6). Cangiando poi di parere il *Fabricio* istesso nella *Entomologia systematica* (7) li spostò dai Curculioni, per riunirli agli Attelabi, e ne fece il suo *Attelabus betuleti*. Fu seguito il suo esempio dagli autori della Enciclopedia metodica (8); dal *Dumeril* nel dizionario delle scienze naturali (9), e nella ultima sua pubblicazione della *Entomologia Analitica* (10) ; dal *Boitard* (11) nella prima edizione del manuale di entomologia. Stabilito quasi

(1) V. Atti della P. Accademia dei nuovi Lincei. Tomo VIII, pag. 124, Anno 1865, 8 maggio.
(2) Fauna Svecica 1, n. 486.
(3) Systema naturae edit. 13, curante Gmelin, tom. 1 pars. IV, pag. 1752, n. 39.
(4) Degeer, Mem. tom. 5, pag. 248, n. 36.
(5) Fabricius. Species insectorum, tom. 1, pag. 165, n. 23.
(6) Petagnae Instit. entomol. tom. 1, pag. 210, n. 4.
(7) Entom. System. tom. 1, pag. 387, n. 16.
(8) Encyclopedie methodique, nouvelle edition. A Padove 1792, tom. 4, part. 2 p. 471.
(9) Dizionario delle scienze naturali; Trad. Firenze 1832, vol. 3, pag. 97.
(10) Entomologie analytique. Paris, Firmin Didot 1860, tom. 1, pag. 555, n. 5
(11) Encyclopedie Roret.

al tempo istesso il genere *Rhinomacer* dal Geoffroy (12) vi furono allogati sotto la denominazione di *Rinomacri verdi* (*Rhynomacer viridis*) i nostri piccoli coleotteri. Finalmente eretto dal *Latreille* il genere *Rhynchites* (13); Furono a quest' ultimo trasferiti i *curculioni del bidollo* dell'Aristotele svedese. Imitarono il Latreille lo *Schoennherr* (14) il *Boitard* (15) nella edizione seconda del manuale eutomologico, il *Blanco* (16) ed ultimamente il *Goureau* (17). Scorgesi quindi chiaramente come a nulla meno di quattro generi diversi dovrebbesi riportare l' insetto istesso, se a tutti i quì nominati autori avesse a farsi egual ragione. Or se ai nomi scientifici già riferiti ti prendesse il garbo di aggiungere gli altri non pochi che gli impartisce il volgo (quali ad esempio sarebbero quelli di *cardarelle*, *attelabi del bidollo*, *attelabi verdi*, *punteruoli della vite*, *brachivini della vite* degli italiani; Becmare, Urbec, Urbère, Beche, Lisette, Diableau, Destraux, Velours-vert (18) dei francesi, Cuquillo o coquillo verde, dei spagnuoli ec.); saresti quasi tentato a ripetere che pur troppo scienza aggiunta a scienza produce talor confusione, siccome si dice nel fatto fisico che luce aggiunta a luce qualche volta generi oscurità. Laonde per non perdersi nello intricatissimo labirinto delle sinonimie; costretti a scegliere un nome fra quelle diverse lingue e fra tante orribili favelle, preferiremo la seconda nomenclatura fabriciana, e dietro l'esempio del Dumeril scriveremo sotto dei nostri insetti. – *Attelabus betuleti* Fabr., passando senza indnggiar di più ad isfiorarne la storia.

L' Aristotele svedese epilogò la frase specifica del suo *Curculio betulae* con i segueuti termini: – *Curculio caeruleo – viridis nitens, antennis – atris* (19) Vi aggiunse poi a schiarimento una succinta descrizione dettando così – *Est e mediae magnitudinis speciebus hic curculio. Totus capite, thorace, rostro, elytris, abdomine, pedibus caeruleo – viridi – inauratus seu sericeo nitidissimus. Versus posteriora admodum obtusus, Totum corpus punctis minutissimis excavatis perfusum. Oculi et antennae solae nigrae: harum infimus articulus*

---

(12) Geoffr. insect. tom. 2, pag. 270, n. 2.
(13) Considérations générales sur l'ordre naturelle des animaux etc. Paris 1810, p. 219.
(14) Curculionidum dispositio methodica, Leips. 1826.
(15) Entomologie, (Èncyclop. Roret.) 1843, tom. 2. pag. 70.
(16) Blanco Fernandez. Ensayo de zoologia agricola y Forestal, Madrid 1859, p. 384.
(17) Goureau. Les insectes nuisibles Paris 1861, pag. 8.
(18) Goureau. Op. cit.
(19) Fauna Svec. loc. cit.

reliquis nullo modo longior est, ut in reliquis; clavatae tamen sunt antennae ut in congeneribus. Hic minime salit (20). » Aggiunse qualche cosa alla frase Linneana il *Degeer* (21) dicendo: *Curculio longirostris antennis* RECTIS *nigris,* CORPORE SUBQUADRATO *viridi aurato nitidissimo,* PEDIBUS PURPUREO AENEIS. Ne compì finalmente la descrizione il *Fabricio* dettando : *Variat saepius colore omnino caeruleo. Alter sexus thoracem antrorsum spinosum gerit* (22); Parmi poi che *Schoenherr* sia stato il primo a decifrare quel *alter sexus* dichiarando che è la femmina quella che porta le due spine o meglio i due aculei, impiantati a guisa di spalline sul proto torace e quest' armatura avendo noi rinvenuta tanto sopra parecchi individui della varietà *bleu* quanto sopra altri della varietà verde; non possiamo sottoscriverci al parere di taluni autori, i quali hanno creduto che in questi coleotteri diversificasse pure con il sesso costantemente il colorito. Poco hanno avuto da aggiungere i moderni a queste concise descrizioni degli antichi. Ciò non pertanto non fu inutile il rimarco del Geoffroy che mentre i comuni curculioni portano le antenne piegate ad angolo ed a clava (*antennae clavatae fractae*) ; taluni se ne riscontrano che le hanno non angolose (*antennae clavatae integrae*) e fra questi rinvenendosi il *curculio betulae* ; gli diè con poche altre specie l' occasione d' istituire il genere *Rhinomacer* (Becmare) sopra uno smembramento di quel primo ; ed addivenne per conseguenza il nostro coleottero il *Rhinomacer totus viridi sericeus,* o *Le Becmare vert* di *Geoffroy.* Non avendo però questo nuovo genere dell'autor francese incontrato il favore dei suoi contemporanei, ed anzi essendo stato contrariato dal Degeer ; sarebbesi dimenticato per sempre, se prima il *Fabricio* nella sua *Entomologia systematica*; e poi il *Latreille* e recentemente il *Dumeril* non ne avessero lasciato la ricordanza nelle di loro entomologiche classificazioni. Quest' ultimo però non mi pare abbia rannesso a quella voce lo istesso concetto che aveagli l' istitutore suo stabilito. Leggo infatti il genere *Rhinomacer* caratterizzato dal Geoffroy con la frase sù indicata - *Antennae clavatae integrae* - tanto nella enciclopedia metodica (23) quanto nella Entomologia del Villers (24). Trovo invece lo stesso genere di

(20) Faun. Svec. 605.
(21) Op. et loc. cit.
(22) Spec. insect. loc. cit.
(23) Tom. et vol. cit. pag. 476.
(24) Entomologia Linneana. tom. 1, pag. 589.

Geoffroy, fraseggiato nella Entomologia analitica del Dumeril, in quanto alle antenne così - *à antennes filiformes non coudées etc.* - (25). Così con altro esempio rinvengo l'*Attelabus* distinto da Linneo per le antenne moniliformi - *antennis moniliformibus* (26) -, mentre il testè lodato autore francese, assegna con gl'altri recenti allo stesso genere il carattere delle antenne a clava e non angolose - *à antennes en masse allongée, non coudées* (27) -. Sembrerebbe pertanto potersi da ciò dedurre che il *Rhinomacer* del Dumeril, dovesse riportarsi agli *Attelabi* di Linneo; e l'*Attelabus* di quell'autore, al vero *Rhinomacer* di Geoffroy ritornato condegnamente in vita. E già l'autore della Entomologia nella enciclopedia metodica all'articolo *Rhinomacer* o *Becmare* avea chiaramente confessato ciò stesso scrivendo - *Ce genre avait été confondu avant ce célebre naturaliste* (Geoffroy) *avec celui de charançon* (Curculio) *et celui de l'Attelabe* (Linneano). *Il a été ensuite séparé du premier genre, et donné par presque tous les auteurs, sous le nom d'Attelabes nom que nous avons été forcés de conserver* (28). Posso io pure quì ripetere con il Villers (29) *Genus attelabi etiamnum inter obscura est, nec aptius reperi.*

Se non che a non isviarsi troppo dal soggetto, farem rimarcare che nei nostri insetti, là dove s' impiantano sul becco le antenne, presentasi tracciata una fossetta della quale fra i caratteri generici degli *Attelabus*, non è fatta menzione alcuna. Tale carattere non è sfuggito alla osservazione dei nostri predecessori. Veggiamo anzi con molta soddisfazione che il *Boitard* (30) lo descrive fra i distintivi del genere *Rhynchites* di *Latreille* (smembramento novello dello *Attelabus*), e vi riporta sotto il nome di *Rynchites betuleti* come come sopra indicammo l' insetto che ci stà occupando. E qui vogliam notato che fra i caratteri della Rinchite Latreillana, quella fossetta non viene accennata (31).

Portano i nostri piccoli coleotteri le antenne di 11 articoli: il primo non è maggior degli altri come lo rimarcò Linneo. Gli ultimi tre rappresentano il capo della piccola clava, la quale già dal settimo e dall'ottavo vien prepa-

---

(25) Vol. cit. pag. 548.
(26) Syst. nat. ed. 13, vol. cit. pag. 1521.
(27) Op. e vol. cit. pag. 552.
(28) Op. e vol. cit. pag. 476.
(29) Op. e vol. cit. pag. 217.
(30) Entomol. Roret. tom. cit. p. 68.
(31) Latreille. Op. cit.

rata gradualmente. Dal secondo poi fino all'ottavo, ogni nodo porta due piccole setole laterali. Il capo ed il torace sono punteggiati finamente, ed alla rinfusa. Evvi un solco che quasi ne sparte in due porzioni longitudinali il dorso. Uno scudetto rudimentale scorgesi fra gli astucci od elitre, le quali sono tracciate quasi serialmente da punti assai marcati; e leggermente orlate sul lembo esterno. Non giungono queste con le loro estremità libere a tutto ricuoprire lo addome, che le ultime anella sue presenta nude. Le gambe non portano sproni o spine di sorta alcuna e sono tutte eguali. Risulta di quattro pezzi aggiunti l'uno all'altro ciaschedun tarzo. Il terzo articolo ne è bilobo a lobi ovati ed alquanto mobili. Fra questi s' impianta l' ultimo che sviluppasi nella forma di un uncino a doppia branca, ed a punte rivolte verso le lobature dell'articolo antecedente, in modo da fornire allo insetto un organo potentissimo di presa e di ritegno. Abbiamo infatti veduto questi animaletti tenersi e correre sopra uno specillo forbitissimo di argento senza cadere; non ostante che questo venisse in tutti i sensi agitato. Gli organi della masticazione sono nascosti nello astuccio buccale sifattamente; che ad insetto intiero al di fuori non compariscono che i palpi filiformi sottilissimi, e le punte degli organi trituranti si affacciano solo allora che l' insetto mangia. La lunghezza massima di esso compreso il becco non eccede i 7 millimetri. Gli individui bleù li troviamo costantemente men sviluppati.

Fra gl' istinti più singolari di questi esseri parecchi se ne rimarcano che meritano special menzione; tali sono p. e. quello di aggricciare ed accartocciare le foglie dei nuovi germogli sicchè ritengano e custodiscano meglio le ova che vi depongono in distinti forellini che prima vi han praticati: quello di tagliarne i pedicciuoli quasi per intero, onde avvizzirne il parenchima e farle restar penzoloni: l'altro finalmente di fingersi morti allorquando vengono tocchi o minacciati da vicino. L'abbiam veduti infatti non riscuotersi, quantunque vivi, anche quando uno spillo ne pungeva i tessuti : mentre poi cessato ogni strepito, dileguato ogni periglio cercavano, se non uccisi, uno scampo.

Del resto non troviamo egual chiarezza negli autori che hanno dato la storia del danno che questi animaletti arrecano al vigneto; e crediam perciò necessario di farne almen di due il confronto. Il *Goureau* infatti scrive « Pendono i cartocci (ossia le foglie che su dicemmo istintivamente aggricciate dall' insetto) dalla estremità dei rami, e cadono dopo qualche tempo a terra. Le larve uscite dall'uovo, hanno corroso l' interna superficie del cartoccio per vivere. Giunte a tutto il loro accrescimento, allorchè quello è caduto, esse ne

sortono per entrar sotterra, dove si cangiano in crisalide. L'insetto perfetto comincia a schiudere il 20 settembre, ma una parte della generazione passa l'inverno nel suolo, e non si trasforma che alla fine del maggio seguente. La larva è bianca conico-ovata, piegata ad arco, molle, apoda, liscia, formata di 12 segmenti senza contare la testa che è rotonda, scagliosa giallastra, armata di due mascelle. La crisalide è chiusa in un bozzolo di terra agglutinata, poco solida. L'insetto perfetto è un coleottero della famiglia dei Porta-becco o Rincofori, della tribù degli Attelabidi e del genere Rinchite, *si conosce* sotto il nome di Rinchite del bidollo di Fabricio (32). Il prof. Blanco Fernandez invece dettò così : L'attelabo del bidollo (Rynchites Betuleti) è di un verde setoso al di sopra rilucente e liscio; ha il corpo i piedi ed il becco di un verde dorato, e la fronte un po' schiacciata. La femmina porta da ogni banda del primo segmento toracico una spina dritta ed acuta. Havvene una varietà di un colore turchino-violaceo; un altra offre questo colore soltanto nelle parti superiori , ed ha il becco e la parte inferiore del corpo di un verde setoso. Di tutti gli Attelabi, il verde è il più dannoso, che invade le viti, senza lasciare di trovarsi pure su di altre piante. Sembra che nel mese di giugno depositi la femmina i germi suoi sopra le foglie che taglia , le quali cadono ammarcite ed attorcigliate in terra , dove restano. Nascono in aprile le piccole orughe , *che sono piccole come spille*; saliscono sulla vite ed attaccano i bottoncini o rigetti che distruggono prima del loro *completo* sviluppo. *Fila quindi il suo bozzolo* più piccolo di un pisello, e lo lascia attaccato alla vite o sulle palafitte. Nel maggio ne sorte l'insetto perfetto , e si unisce tantosto il maschio con la femmina spargendosi sulle foglie, su delle quali depositano queste il germe (33). Ora quale delle due storie sarà la vera ? Noi non abbiamo dati sufficienti per giudicarlo.

Era egli ben naturale che in vista del danno che questi insetti arrecano alla vignicoltura, si pensasse al più confacente rimedio. Stimò altri opportuno il dar loro la caccia con frequenti ed attente visite fatte al vigneto in primavera, occupandovi dei ragazzi , quasi in via di passatempo. Ma come sperarne un sicuro risultato nella coltura ad alberato, od a pergola; e negli estesissimi nostri vigneti ? Convennero i più essere più opportuno lo attendere che quelli avessero già ovulato , togliendo alle viti tutte le foglie accartocciate e pen–

(32) Op. cit. pag. 6 in fine e seg.
(33) Op. cit. pag. 384 e seg.

denti, che sono le depositarie della progenitura, per darle sollecitamente alle fiamme. Tale rimedio per altro previene il danno futuro possibile, ma non rimedia in modo alcuno al danno presente: ma infrattanto non vi ha di meglio. Il nostro Attelabo oltre ad abitare la *Vitis vinifera*, infesta pure la *Betula alba* albero non proprio delle pianure nostre, il *Salix alba*, il *Fagus sylvatica*, ed il *Pirus comunis*. Altra fiata si è diffuso nelle ridenti provincie della nostra Italia meridionale. Inclino a credere che la *Rynchites populi* dei recenti e forse anco la *Rynchites baccus* non sieno che varietà della *Rynchites betuleti*; diversificando le tre pretese specie soltanto per isfumature di colorito; per vigore, o disposizione diversa di tinte, mentre hanno i costumi istessi, e ci arrecano lo stesso danno.

Ecco quanto ho potuto raccogliere ed osservare su questo *Ampellofago* che vogliam lusingarci non abbia a prosperar troppo nel nostro paese.

Analisi, e rettificazione di alcuni concetti, e di alcune sperienze, che appartengono alla elettrostatica. — Memoria 1.ª del prof P. Volpicelli.

§ 1.

Recentemente si è creduto poter concludere, che l'elettrico non respinga se stesso; e che i corpi caricati della medesima elettricità, non esercitino gli uni sugli altri verun' azione repulsiva (1), contro quello che dalla più parte di dei fisici, antichi e moderni, viene professato. Si è creduto altresì poter concludere, che i fenomeni, detti di attrazione e di repulsione elettrica, possano spiegarsi mediante una sola forza; cioè *l'attrazione mutua dei corpi elettrizzati differentemente* (2).

Questo concetto della mancanza di elettrica repulsione, non solo è falso, ma neppure ha la qualità di essere nuovo; giacchè prima di Franklin, esso già fu immaginato, come rilevasi dal seguente brano di questo autore, il quale dice « Ho » riconosciuto sempre difficile, spiegare la uguaglianza della repulsione, nei casi

---

(1) Comptes Rendus, t. 60, an. 1865, p. 180 e 181 - Ibidem, p. 452, li. 9 salendo; t. 62, an. 1866, pag. 450, li. 22; e pag. 451, li. 24.

(2) Opera citata, t. 60, an. 1865, p. 452, li. 3 salendo.

» di elettricità positiva e negativa; quindi ne ho parlato sempre a questo
» modo. Ero qualche volta inclinato come voi (Kinnersley a Filadelfia), ripor-
» tare tutto all'attrazione; ma oltre che sembra essere anche questa, non in-
» telligibile in se stessa, più della repulsione; avvi qualche fenomeno di repul-
» sione, che non può tanto facilmente spiegarsi per mezzo dell'attrazione (3).
Inoltre dice lo stesso Franklin « Confesso che mi sembra difficile spiegare
» senza repulsione (dell'elettrico per se stesso), come avvenga che il fluido si
» allontani, da quell'estremo di un corpo indotto, che riguarda l' inducente, il
» quale suppongo caricato di elettricità positiva (4) ». Da ciò vediamo, che Franklin non era favorevole alla dottrina, per la quale si nega la repulsione, propriamente detta, fra corpi elettro-positivi.

Il primo ad invocare l'attrazione dell'aria, che circonda i corpi elettrizzati omologamente, per ispiegare l'allontanarsi dei medesimi fra loro, fu Kinnersley, ragionando sulla sperienza del mulinello elettrico, da esso inventato (5).

Tutti quei fisici, che oggi, nei fenomeni elettrostatici, negano la repulsione, ricorrendo all'attrazione dell'aria che li circonda, furono in questa ipotesi preceduti da Kinnersley (a) nel 1761; e riproducono essi una ipotesi, pubblicata cento anni prima, ventilata di tempo in tempo, ma sempre senza successo.

§. 2.

Alcuni fisici negarono la elettrica repulsione propriamente detta, sia per la elettricità positiva, sia per la negativa; e questi sieguono la ipotesi symmeriana dei due fluidi. Altri poi negarono la stessa repulsione, solo per le elettricità negativa; e questi sieguono la teorica frankliniana di un fluido solo, nella quale, per ispiegare la repulsione di due corpi elettrizzati negativamente, deve ammettersi, che la materia priva di elettrico respinga se stessa. Questo fatto da taluni fu creduto inconciliabile colla gravitazione; quindi per tale motivo negarono essi la realtà della elettrica repulsione, fra corpi elettrizzati negativamente. La mancanza della elettrica repulsione, un tempo ebbe più seguaci, di quello che attualmente ne abbia, dei quali vogliamo quì ricordare i più conosciuti.

---

(3) Oeuvres de Franklin, Paris 1773, t. 1.°, p. 220, li. 10.
(4) Luogo citato, pag. 221, li. 9.
(5) Luogo citato, pag. 202, li. 20.
(a) Oeuvres de Franklin, t. 1.°, p. 303, l. 11.

Il p. Pianciani difese la ipotesi della non esistenza di elettrica repulsione (6), appoggiandosi ad un esperimento, nel quale si abbassavano i pendolini, quando l' aria veniva rarefatta. Siccome però altri fisici negano la esattezza dell' indicato sperimento (7), così non possiamo associarsi al nominato autore. Inoltre il medesimo a convalidare l'opinione sua, riferisce una sperienza di Volta, la quale consiste nel dimostrare, che due dischi elettrizzati omologamente, e posti fra loro a piccola distanza, si allontanano l'uno dall'altro con debole forza (8); pel contrario, caricandoli con elettricità di natura contraria, si attraggono assai fortemente. Dimostreremo in appresso (§ 12), quale sia la vera spiegazione di questo fatto; vedremo che il medesimo, non è punto favorevole alla mancanza della elettrica repulsione.

Kennedy neppur egli ammise la esistenza di questa forza repellente fra le molecole dell'elettrico , e spiegò i fatti elettrostatici ad essa relativi, mediante l'attrazione (9).

Anche Beccaria non ammise la repulsione di cui parliamo, come risulta da un tratto di questo elettricista (10), che trovasi riportato anche nella collezione delle opere di Volta (11); ed il Majocchi professa egli pure la medesima opinione (12). Un altro fisico, il quale sostenne doversi la elettrica repulsione riguardare come apparente, non già come reale, fu il Van-Marum, e fu combattuto da Pfaff (13).

Harris, dopo avere spiegato la ipotesi di Franklin, dice che alcuni fisici francesi tentarono spiegare la elettrica repulsione , mediante l'attrazione, prodotta per influenza dall'aria circostante. Conclude però l'autore medesimo, che tale spiegazione non è soddisfacente , dicendo : « Toutes les explica- » tions, comme on voit, ne sont que les dernières tentatives d'une théorie » insuffisante (14) ». La maggiore difficoltà contro la pretesa mancanza, consiste, secondo questo fisico, nel fatto che le repulsioni elettriche, si producono

(6) Istituzioni fisico-chimiche. Roma 1833, t. 3.°, pag. 80, li. 10 salendo.
(7) V. § 10 di questa memoria.
(8) Collezione delle opere di Volta, tom. 1.°, parte 2.ª, Firenze 1816, pag. 76.
(9) Repertorium der Physik, vol. 6, pag. 115.
(10) Elettricismo artificiale, seconda edizione. Torino 1772, p. 47.
(11) Tomo 1.°, parte 2.ª, pag. 78.
(12) Elementi di fisica, t. 2.°, Torino 1853, pag. 673, li. 5 salendo.
(13) Gehler, Physikalisches Wörterbuch, Leipzig 1827, vol. 3., p. 347, li. 11 salendo.
(14) Leçons élémentaires d'électricité, traduites et annotées par Garnault. Paris 1857, pag. 46, li. 10.

a traverso un mezzo molto rarefatto, come appunto nell'atmosfera, ove la materia trovasi assai diradata.

Volta dopo aver detto (15), essere più apparente che reale la elettrica repulsione , fra corpi elettrizzati omologamente , prodotta non già da una causa distinta , ma dallo stesso principio di attrazione, soggiunge a questo modo (16). « Il qual principio fondamentale, stabilito così bene da Epino, nella » sua grand'opera *Tentamen Theoriae electricitatis et magnetismi* (pag. 40), » è confermato da tutte le prove possibili, e più evidenti ».

Riguardo al citato brano di Epino, riflettiamo, che nel medesimo si dice soltanto, essere la detta repulsione, come anche le altre azioni elettriche, prodotta da esterni agenti, che l'autore stesso confessa di non conoscere. Ognuno perciò vede, che nel brano medesimo, non viene detto consistere la causa della indicata repulsione, in una influenza, che l'aria circostante subisce. Poichè l'autore stesso, parlando generalmente, non altro dice in sostanza, fuorchè di non poter concepire una repulsione, senza l' intervento di un *medium* ambiente. Ciò si accorda colle viste della maggior parte dei fisici, che, ragionando sull'attrazione, confessano essere anche questa inconcepibile fra due corpi, senza verun altro *estrinseco* agente interposto. Possiamo quindi concludere, che Volta diede a Epino tutt'altra opinione, riguardo all'oggetto in proposito, di quella che questo aveva di fatto. Anche Pfaff, come già fu indicato, si pronunciò contro la opinione, che l'aria circostante sia la causa esclusiva dell'allontanamento fra due corpi elettronegativi (17).

§. 3.

Dopo aver esposto, che il concetto della mancanza di elettrica repulsione, non è nuovo , ma bensì da oltre un secolo messo in campo ; e dopo avere indicato i principali fisici che lo seguirono, come anche alcuni di quelli che non lo accettarono, entriamo nell' intrinseco di questo argomento. Ed incominciamo dall'osservare, che alcuni fisici negarono la esistenza della elettrica reale repulsione , perchè opposta la credevano al modo razionale di vedere i fenomeni della natura in genere; principalmente perchè la gravità, sempre attraente si manifesta, e non mai repellente. Questa pretesa opposizione cessa del tutto, quando si rifletta, che non mancano agenti naturali, da cui si ma-

(15) Collezione delle opere di Volta, tom. 1.°, parte 2, pag. 77, li. 13.
(16) Idem, pag. 78, li. 2.
(17) Gehler physikalisches Wörterbuch, vol. 3.°, pag. 347.

nifestano evidentemente forze repulsive; così è della repulsione magnetica, da niuno fino ad ora messa in dubbio ; così pure della repulsione calorifica, la quale si manifesta nella dilatazione dei corpi, operata dal calorico, cui non resiste forza veruna; e così pure della repulsione che regna fra due conduttori mobili, percorsi da correnti elettriche, dirette l'una in contrario senso dell'altra. Quindi vediamo che dal paragonare i fenomeni della natura colla elettrica repulsione, non s' incontra opposizione veruna; ed invece il paragone riesce favorevole alla esistenza della repulsione stessa.

Si è preteso recentemente concludere, la non esistenza della elettrica repulsione, considerando la pressione della elettricità contro l'aria circostante (18). Però è da precisare avanti tutto, in che realmente risieda l'azione dell'elettrico, per distribuirsi nell' aria circostante. Quest' azione non consiste in una forza meccanica, esercitata dall'elettrico stesso contro la pressione dell'aria, la quale non impedisce col suo peso la dispersione della elettricità, distribuitasi alla superficie dei corpi; ma bensì consiste l'azione medesima, nel vincere quella resistenza, che incontra l'elettrico a passare pei coibenti, e quindi anche per l'atmosfera, in virtù della mancanza di conducibilità nei medesimi. Così appunto avviene del calorico, il quale incontra maggiore o minore difficoltà, per passare da un corpo in un altro, che conduce meno del primo. In fatti essendo un corpo in contatto con un altro, a temperatura più bassa, e meno conduttore del primo, il calorico di questo, benchè abbia tensione a distribuirsi anche nel secondo, tutta via non eserciterà pressione meccanica sul medesimo. Poichè diminuiscono le dimensioni del più caldo corpo, mentre il suo calorico si distribuisce nel meno caldo, e senza esercitare pressione meccanica; vincendo con maggiore o minor lentezza quella difficoltà , che oppone al suo passaggio la mancanza maggiore o minore di conducibilità nel secondo corpo.

Come nella elettricità, così nel calorico, la forza espansiva, cioè la forza repulsiva molecolare di questi due agenti, è causa della tendenza loro a distribuirsi sempre in una estensione maggiore. Vero è che generalmente l'elettrico si disperde meno, quando l'atmosfera preme di più, ma in questo caso è generalmente anche vero, che l'atmosfera stessa è più coibente, perchè meno umida; perciò nel caso medesimo, non la maggiore pressione, bensì la maggiore coibenza, è causa della minore dispersione dell'elettrico, dalla superficie dei corpi caricati di esso. Inoltre, poichè l'aria, che sta in contatto dell'elettrico, si elettrizza essa pure, mentre non permette all'elettrico stesso di propagarsi, e poichè questo agente respinge

(18) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, pag. 450-453.

se stesso; così è chiaro che la dispersione della elettricità, dalla superficie dei corpi, elettrizzati, dentro un mezzo coibente, viene impedita dalla elettricità stessa. Dunque l' aria certo impedisce più o meno la dispersione dell' elettrico, ma non col suo peso, bensì colla sua coibenza: che se l'aria si togliesse del tutto, e la umidità con essa, l'elettrico non si disperderebbe affatto ; poichè si riguarda il vuoto , come il mezzo più coibente di tutti. Non mancano fisici distinti che la pensano in così fatta guisa, ed il Belli è fra i medesimi : questo autore (19), con un dotto ragionamento, e col suffragio della sperienza, dimostra quanto erroneo sia, ritenere che nella pressione dell'aria consista la cagione, per cui la elettricità rimanga sulla superficie dei corpi; ed anche il De la Rive fa eco a così fatta opinione (v. §10). L' indicato concetto adunque, relativo alla pressione dell'aria, deve bandirsi dalle fisiche istituzioni.

§. 4.

Ora torniamo sull'argomento, che riguarda la esistenza della reale forza elettrica ripulsiva , per negare la quale fu citato (20) il seguente brano di Poisson : « au sommet d' un cône , la pression du fluide électrique devien-
» drait infinie , si l' électricité pouvait s' y accumuler (21). » Da questo brano si volle concludere quanto siegue (22). « Se la repulsione teorica esi-
» ste , dev' essere impossibile all' atmosfera , opporsi alla dispersione della
» elettricità dalla punta di un cono elettrizzato, salvo che si sperimenti nel-
» l' aria compressa mediante un' infinità di atmosfere. Ma oggi si cono-
» scono molte sperienze, nelle quali una punta elettrizzata non perde la elet-
» tricità sua, quantunque comunichi liberamente coll' atmosfera. Dunque la
» elettrica pressione vi esiste molto debole, invece di esservi grande infinita-
» mente. Dunque la elettrica repulsione punto non esiste. »

Riguardo a tutta questa conclusione osserviamo che, secondo la teorica di Poisson , la elettrica pressione al vertice di un cono, diviene infinita per sei condizioni. La *prima* di queste consiste nel perfetto equilibrio, per parte dell' elettrico distribuito sul cono stesso, e non già nel moto. Questo perfetto equilibrio suppone una perfetta *coibenza* nell'aria, la quale non ha mai luogo, non esistendo fra i corpi uno, che sia perfettamente coibente. Così fatta con-

(19) Corso elementare di fisica sperimentale, vol. 3.°, Milano 1838, pag. 558.
(20) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, p. 450, li. 12.
(21) V. Mémoires de la classe des scien. mat. et phys. de l'Instit. Imp. de France, an. 1811, pag. 6, li. 10 salendo.
(22) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, pag. 450 li. 15.

dizione, fu indicata esplicitamente dello stesso Poisson, avendo egli detto nel citato suo brano, che la pressione dell'elettrico contro l'aria, *diverrebbe* infinita nella punta di un cono, quando il fluido elettrico si *potesse ivi accumulare*. Fra le due pressioni elettriche contro l' aria , cioè quella che si riferisce alla teorica di Poisson, in cui si richiede l'equilibrio perfetto; e quella che si riferisce agli sperimenti, nei quali avvi sempre il moto dell'elettrico, per mancanza di coibenza perfetta nell'aria, ed anche per la grande mobilità delle molecole di questo fluido, esiste una differenza grandissima: similmente alla differenza che ha luogo, fra la tensione di una pila non chiusa, e quella che le appartiene quando essa è chiusa.

La *seconda* condizione consiste, nel dover essere il vertice del cono elettrizzato, un vero geometrico punto, lo che non è possibile raggiungere in pratica ; e la differenza che sussiste fra un materiale punta , e quella che la geometria considera, è grandissima. Perciò la tensione al vertice di un cono materiale, dev'essere molto minore di quello sarebbe, a parità di circostanze, se il cono fosse identico al considerato astrattamente, il quale non potrà mai dall'arte prodursi.

La *terza* condizione voluta dall' analisi di Poisson, consiste nel dovere essere il cono elettrizzato, libero del tutto, e posto in guisa da non esercitare colla elettricità sua, veruna influenza o induzione, sui corpi ad esso circostanti; affinchè non sia vincolata una parte della elettricità stessa, e perciò non sia diminuita la sua naturale tendenza.

La *quarta* condizione richiede, che le molecole dell' ambiente non sieno mobili; affinchè non abbia luogo il trasporto dell' elettrico della punta per parte delle molecole stesse.

Per la *quinta* condizione si vuole, che il mezzo, nel quale la punta si trova immersa, non possa elettrizzarsi dalla elettricità della punta stessa, onde non venga impedito sulla medesima l'aumento della tensione.

In fine la punta elettrizzata, ed è questa la condizione *sesta*, dev'essere talmente lontana da ogni altro corpo elettrizzato, da non poterne risentire nè attrazione, nè repulsione; affinchè non sia menomamente impedito alla punta, di raggiungere la tensione assegnatale dall'analisi.

Qualunque delle indicate sei condizioni mancasse, non potrà mai la punta raggiungere la teoretica sua tensione; ma nella pratica niuna delle condizioni riferite, potrà mai completamente soddisfarsi. Dunque per via di sperienze, non potrà mai verificarsi la elettrica tensione infinita in una punta. Quindi si vede che allo stesso brano di Poisson, fu attribuito un significato pratico, che

non potrà mai raggiungersi, e del tutto differente da quello, che veramente gli appartiene; poichè le condizioni sopra indicate sono puramente astratte. Però sarà molto più preciso, e molto più conforme al fatto, sostituire nel brano citato di Poisson, alla parola *pressione*, quella di *tensione* o *repulsione*.

§. 5.

Ora passiamo ad analizzare una sperienza, da cui si credette poter concludere, che la elettrica repulsione non esiste. Ma innanzi tutto riflettiamo essere tre, le cause favorevoli alla dispersione dell'elettrico; una per parte di questo agente, cioè la tendenza del medesimo a distribuirsi in estensione sempre maggiore: mentre sono due per parte del mezzo, in cui succede la dispersione stessa, cioè la conducibilità di questo mezzo, e la mobilità delle molecole sue. Le cause poi contrarie alla dispersione indicata, sono anche tre; una per parte dell'elettrico, cioè la induzione da esso esercitata sui corpi circostanti, e due per parte del mezzo, cioè la sua coibenza, e la immobilità delle sue particelle.

Si può accrescere l'effetto della coibenza che appartiene all'aria, cioè la difficoltà che la medesima oppone al disperdersi dell'elettrico dalla punta di un cono, impedendo più o meno il moto delle sue molecole. Ciò si ottiene cuoprendo la punta stessa con un recipiente, che non conduca l'elettrico. L'effetto medesimo può essere accresciuto per mezzo della induzione della punta, esercitata sopra un corpo coibente, più o meno vicino alla punta stessa; poichè in tal caso la elettricità della punta, inducendo sul coibente medesimo, resta in parte vincolata dalla induzione.

Ciò premesso, la indicata sperienza consiste (23), nel collocare al centro di un disco coibente, una punta metallica, posta in comunicazione col conduttore elettrizzato di una macchina elettrica. Si osservò che in questa disposizione, la punta disperdeva tanto meno, quanto essa più avvicinavasi al disco, cioè quanto meno sporgeva da esso; e che disperdeva molto più, quando era nell'aria libera, senza il disco. Dalla sperienza medesima, e da qualche altra che in seguito analizzeremo, si è voluto concludere, contro la esistenza della forza elettrica repulsiva.

Fu opposto giustamente a così fatta conclusione, osservando (24), che

(23) Comptes Rendus, t. 60, an. 1865, p. 180 e 181.
(24) Comptes Rendus, t. 60, an. 1865, p. 412, e seguenti.

la riferita sperienza , non è tale da menomamente affievolire le conseguenze della teorica , dell' illustre geometra Poisson , su questo argomento. La spiegazione che della sperienza indicata si dette nel citato luogo, consiste presso a poco in quella , che dalle antecedenti premesse discende. Cioè che la induzione esercitata fortemente sul disco coibente, da quella parte del cono, che sta vicino al disco medesimo, è la causa potissima , per la quale viene diminuita in questo caso la elettrica dispersione. Perciò la riferita sperienza non contraddice alla teorica di Poisson, sul potere disperdente delle punte, nè può condurre a negare la forza elettrica repulsiva.

È però da osservare, che nella giusta opposizione ora citata, si dà per nuovo (25), essere una punta elettrizzata, e coperta da un vaso coibente, quasi del tutto priva del suo potere emissivo; invece questo fatto già fu riconosciuto, e studiato dai fisici, molto prima (26) nel molinello elettrico, a tutti noto, e coperto da una campana di vetro. Si fa consistere la spiegazione del fatto medesimo, « dall'azione repulsiva (27), esercitata sul fluido del molinello, dalla elettricità » della stessa natura, che si deposita nel primo istante nella interna superficie » del vaso coibente, allorchè questo inviluppa la totalità, od una gran parte » del mezzo gasoso , nel quale la punta si trova immersa ». Se taluno domandasse, da che nasce questa forza repellente; si dovrebbe rispondere, nasce dal moto impedito delle molecole aeree, le quali non possono escire dal vaso coibente; perciò mi sembra che questo impedimento, sia la prima causa del fatto di cui parliamo.

§. 6.

Altre sperienze furono immaginate, per concludere la non esistenza della elettrostatica repulsione, le quali ora esporremo « Al conduttore di una mac- » china elettrica (28) , munita di un elettroscopio sensibilissimo , si fissò » un'asta, colla punta diretta nell'aria. Dopo aver elettrizzato quel conduttore, » si aspettò che l'indice dell'elettroscopio, divenuto stazionario, denotasse che » la elettrica pressione alla punta, equilibrava la pressione atmosferica; presen- » tando allora una sfera metallica al conduttore, se ne ottenne una scintilla di

---

(25) Comptes Rendus, t. 60, pag. 413, li. 17 e pag. 414 li. 16.
(26) Gehler, Wörterbuch, ecc. t. 8.°, pag. 952, Lipsia 1836.
(27) Comptes Rendus, t. 60, an. 1865, pag. 414, li. 18 salendo.
(28) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, p. 450, li. 8 salendo.

» un mezzo millimetro di lunghezza circa. Si concluse da questo fatto, che se
» mediante un artificio, non preveduto dalla teorica, si fosse impedito a que-
» sta elettricità di fuggire, sarebbesi realizzata la condizione voluta da Poisson,
» e si sarebbe forzato l' elettrico ad accumularsi alla punta ; in tal caso la
» lunghezza della scintilla tratta dal conduttore , data in mezzi millimetri ,
» avrebbe rappresentato il numero delle atmosfere , bilanciate dalla pres-
» sione contro l' aria, prodotta dal fluido elettrico , accumulato nella punta
» stessa ».

» Tra questi artifici, si scelse quello di porre l'asta puntaguta, dentro un
» tubo di vetro asciutto, che superava un poco la punta stessa. Questo tubo
» aperto, ed avente da 2 a 3 centimetri di diametro interno , era stabilito
» sull'asta medesima: si elettrizzò una piccola macchina, sino a trarre dal suo
» conduttore scintille , ognuna per lo meno avente 100 millimetri di lun-
» ghezza, e senza che la punta lasciasse fuggire in modo notabile la elettri-
» cità, che accumulata stava sovr' essa. La pressione che la elettricità della
» punta medesima esercitava sull' aria (si è creduto) dover essere in questo
» caso di 200 atmosfere circa.

» Ma ciò non è tutto: ciascuna delle punte collettrici acute del condut-
» tore, aveva presso a poco la medesima carica, e tuttavia niuna elettricità
» emetteva sensibilmente ».

» Per conseguenza, quando si traggono delle scintille, di 500 millimetri
» di lunghezza, dal conduttore di una potente macchina elettrica, il fluido ac-
» cumulato sulle punte collettrici, esercita sull'aria ambiente ad un'atmosfera,
» e senza vincere la sua resistenza, una pressione di 1000 atmosfere !

Si è preteso che « Questi risultamenti provano ad esuberanza, la non esi-
» stenza della elettrica repulsione. In fatti per dimostrare (viene soggiunto)
» che questa forza non esiste , non basta forse l' azione paralizzante di un
» tubo, di cui l'apertura offre libero adito al fluido elettrico della punta, sup-
» posto così fortemente spinto dalla sua forza repulsiva ? »

Passiamo ad analizzare il valore delle sperienze riferite ora, e da que-
st' analisi risulterà, che le medesime non danno verun diritto a concludere
la non esistenza della elettrostatica repulsione; perchè le condizioni essenziali,
onde la elettrica tensione di una punta elettrizzata , possa divenire infinita ,
non sono soddisfatte nelle sperienze stesse: le quali condizioni, secondo l'an-
nalisi di Poisson, sono sei, già da noi enumerate, e dichiarate (§. 4).

Appressando all'apertura superiore dell'indicato tubo di vetro, un qualunque

piano di prova , questo si ritirerà carico dell' elettrico raccolto sulla stessa punta , come ho verificato , e come ognuno può verificare facilmente. Perciò non essendo soddisfatta in questa sperienza la *prima*, e la *quarta* delle riferite condizioni, non può aspettarsi che la tensione della punta divenga infinita. Ognuno poi vede, che nelle precedenti sperienze, l'elettrico della punta, induce tanto sull'aria contenuta nel tubo, quanto sulle pareti di esso; perciò questo fluido deve abbassare tanto più la sua tensione, quanto più cresce la induzione dal medesimo esercitata. Per tanto la *terza* condizione non essendo neppure soddisfatta, dovrà nuovamente concludersi, che la tensione della punta non può raggiungere l' infinito.

Il tubo esercita due diverse azioni sulla punta : in principio della sperienza, quando esso non è ancora caricato , accade semplicemente un' attrazione fra l' elettrico della punta e l' indotto nel tubo ; ed è chiaro che per questo fatto deve *abbassarsi* la tensione della punta, ed anche parzialmente impedirsi la dispersione dell'elettrico accumulato in essa. Dopo cominciata la sperienza, ed avendo essa durato un tempo sufficiente, il tubo acquisterà nell'estremo suo aperto, una carica omolologa della inducente, la quale, per essere sopra un isolante, non può scaricarsi nel suolo, e perciò dovrà esercitare un azione repulsiva, che *diminuirà* eziandio la tensione dell'elettrico, acquistato dalla punta, quindi anche la sua dispersione; perciò la tensione medesima non potrà divenire infinita. Continuando la sperienza, il tubo si caricherà in tutta la sua lunghezza, e la dispersione dalla punta, in questo caso, aumenterà, e per conseguenza *diminuirà* maggiormente la elettrica sua tensione. Dunque l'effetto del tubo, rispetto alla tensione della punta, consiste nel diminuirla, e nel non farla mai giungere a quella, che viene dall' analisi assegnata, perchè le condizioni da questa volute, non si possono in pratica verificare.

La *seconda* condizione, affinchè l'elettrico accumulato sulla punta, possegga una tensione infinita, si è che questa punta debba essere tale geometricamente. Ma siccome ciò in pratica non si otterrà mai, poichè le punte nella medesima sempre sono più o meno smussate; così è chiaro che la tensione stessa, eziandio per la mancanza di questa seconda condizione, non può giungere a quello che l'analisi assegna per essa.

Il mezzo coibente , nel quale sta immersa la punta elettrizzata , non devesi elettrizzare omologamente ; affinchè non possa colla sua tensione diminuire quella , che apparterrebbe all' elettrico della punta. Ma nelle sperienze precedenti , come anche in ogni altra di questo genere , la elettriz-

zazione del mezzo, per parte della punta, non potrà impedirsi mai. Quindi è che, anche per la *quinta* condizione, non può la punta elettrizzata, giungere ad una tensione infinita.

Riguardo all'asserto, che le punte collettrici del conduttore della macchina, non emettevano elettrico; dobbiamo rispondere: che se ciò fosse, avverrebbe certo, non già perchè manca la forza elettro-repulsiva, ma bensì perchè quelle punte non soddisfano alla *sesta* condizione; per la quale, secondo la teorica di Poisson, la punta può raggiungere una tensione infinita. Questa condizione richiede, che la punta elettrizzata, sia quanto basta lontana, da un corpo elettrizzato omologamente; affinchè l'accumulazione, e quindi la tensione della punta stessa, non venga diminuita da quella, che appartiene all'elettrico del corpo vicino. Ma il disco della macchina, essendo elettrizzato omologamente alla elettrizzazione delle punte collettrici, queste non potranno tanto caricarsi, per quindi conseguire una tensione infinita; e perciò dall' indicato asserto, non sarà punto infirmata la teorica di Poisson.

Se il tubo poi fosse metallico, e comunicasse col suolo, non potrebbe conservare la elettricità, omologa di quella che dalla punta gli viene comunicata; quindi non esisterebbe più la repulsione sull'elettrico della punta, e vi rimarrebbe soltanto un abbassamento di tensione, per l'esercizio della influenza sul tubo metallico stesso, contro la *terza* delle cinque indicate condizioni.

§. 7.

Passiamo ad analizzare altri argomenti sperimentali, prodotti per sempre negare la esistenza della elettrica forza repulsiva. Si è detto (29). « Ma il tubo » sorpassa un poco la punta; dunque si può per la spiegazione, immaginare » una nuova forza repulsiva, non preveduta da Poisson, di cui sarebbe prov- » visto il bordo del tubo; la quale, obliquamente agendo sulla punta, contro- » bilancerebbe la forza repulsiva del fluido, accumulato sulla punta stessa. » Ciò presso a poco è quello che fu proposto, per dare la spiegazione del » potere paralizzante di una campana di vetro, che ricuopre una punta elet- » trizzata.

» Ma questa spiegazione ingegnosa, sembra opporsi alla teorica. Dove » la pressione supera la resistenza che l'aria le oppone, questa cede, o, se

(29) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, pag. 451, li. 10 salendo.

» vogliamo, il vaso d'aria si rompe, quindi esce il fluido elettrico come per
» un'apertura (*a*).

Noi rispondiamo, che la spiegazione qui controversa, non solo è più vera che ingegnosa, ma neppure alla teorica si oppone. Poichè non è ammissibile affatto, essere la forza repulsiva, esistente fra la parte superiore del tubo e la punta, un artificio non compreso nella teorica di Poisson, ed immaginato soltanto dai fisici per salvarla. No certamente; giacchè la repulsione indicata, costituisce il fondamento essenziale della teorica elettrostatica, secondo le viste di quell' illustre geometra francese. In fatti qual fisico potrà mai negare, che due particelle dello stesso elettrico, tendono ad allontanarsi l'una dall'altra? Niuno; poichè questo è un fatto sperimentale, che si potrà spiegare in diversi modi, ma che non può negarsi. Per tanto il tubo si deve col tempo elettrizzare internamente, per la elettrica dispersione che subisce la punta, come la sperienza dimostra; quindi è chiaro che quell'azione, la quale produce l'allontanamento, fra le molecole di elettricità dello stesso nome, deve aver luogo fra l'estremo del tubo e la punta, secondo la teorica di Poisson; nè perciò questo fatto, può dirsi un artificio immaginato a fine di salvarla.

Per continuare a sostenere la non esistenza della elettro-repulsione, viene soggiunto (30). « Quanto inammissibile sia la riferita spiegazione, basata sul-
» l'ammettere una nuova forza repulsiva, procedente dalle pareti opposte alla
» punta elettrizzata, vedesi dalla sperienza (§ 5); la quale mostra, bastare un
» disco non conduttore, applicato a questa punta in guisa, che la medesima
» lo superi un poco, e tosto si annullerà quasi del tutto, l'emissivo potere
» della punta stessa. Quì niun oggetto è posto avanti alla punta; ed il disco
» è dietro essa. Bisognerebbe dunque attribuire a questo disco, non più una
» forza repulsiva, ma bensì una potenza attrattiva, equivalente a più centinaia
» di atmosfere, per annullare la forza emissiva della punta! Non è ciò inam-
» missibile?

Osserviamo, come già indicammo (§. 6), che in questo caso, non è soddisfatta la *terza* condizione (§. 4), voluta dall'analisi di Poisson, cioè che la elettricità della punta non eserciti veruna induzione; poichè nel caso della ora indicata sperienza, la elettricità della punta stessa, induce sul disco a lei vicino, e perciò diminuisce la sua tensione, quindi anche la sua dispersione. Per questa, e per le altre condizioni, prescritte dall'analisi di Poisson, ed anche non

(*a*) Così Poisson si esprime, nella sua prima memoria di elettrostatica, V. Mém. de l'Instit. Imp., an. 1811, p. 6, li. 16.

(30) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, p. 452, li. 5.

soddisfatte nella riferita sperienza, l'elettrico della punta stessa, non può raggiungere quella infinita tensione, assegnatagli dalla teorica del tutto astratta. Se alla punta, munita del coibente disco, nel modo indicato, si avvicini un piano di prova; si troverà esso carico di elettricità, omologa di quella che appartiene alla punta. Quindi è chiaro che il coibente disco, non vale ad impedire completamente la emissione dell'elettrico dalla punta, ma solo a diminuirla.

La vera spiegazione di questa sperienza, non è basata punto sopra l'esercizio di una forza repulsiva, ma bensì di un'attrattiva; ed è quella che si esercita fra l' indotto disco, e l' inducente punta: laonde si vede che la sperienza stessa, non può condurre logicamente a negare la forza elettro-repulsiva.

§. 8.

Avvi ancora un altra considerazione, per la quale non può dedursi dalle sperienze precedentemente riferite, la non esistenza della forza elettro-repulsiva. In fatti nelle sperienze medesime viene stabilita una proporzionalità, fra la lunghezza della scintilla, tratta dal conduttore della macchina elettrica, e la tensione, impropriamente detta pressione, della punta contro l'atmosfera, prima di aver ottenuta la scintilla stessa; vale a dire dopo che si credette stabilito, lo stato stazionario della carica posseduta dalla punta (31). Ma questa proporzionalità non solo non è dimostrata, ma neppure potrà esserlo; giacchè avvicinando una sfera metallica al conduttore della macchina , la carica elettrica del medesimo subisce una nuova distribuzione, accumulandosi tanto più verso la sfera indotta, quanto più questa si avvicina al conduttore stesso. Da ciò deriva che la lunghezza della scintilla, non è affatto proporzionale alla tensione dell' elettrico accumulato sulla punta , e relativo allo stato stazionario di esso.

Inoltre nelle indicate sperienze si crede, poter misurare la elettrica tensione, di un qualunque punto A del conduttore elettrizzato , punto che nelle medesime consiste sempre nel vertice del cono, applicato al conduttore stesso; presentando ad un altro punto B del conduttore medesimo, una sfera metallica, che certamente fu posta in comunicazione col suolo. Quindi nelle sperienze indicate, la lunghezza della scintilla, ossia la distanza esplosiva del punto B dalla sfera, si ritiene proporzionale alla tensione del punto A; e ciò come dicemmo, non può dimostrarsi vero.

---

(31) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, p. 450, li. 8 salendo, p. 451, li. 15, e li. 21.

Poichè ognun vede, che le disposizioni delle sperienze di cui parliamo, sono appunto quelle, per cui si adopera lo spinterometro (32), il quale serve a misurare la *carica complessiva* del conduttore; non già la tensione di quel punto, dove questa è massima. Non vogliamo quì discutere, quanto sia giustificato l'uso di tale istromento, per la misura complessiva delle cariche ; però certo è, che le indicazioni del medesimo sono, almeno prossimamente, giuste rispetto alla misura stessa, come deve concludersi delle sperienze di Riess, il quale fece uso dello spinterometro, per misurare le cariche dei piattelli del condensatore (33), e della boccia di Leida (34). Questo fisico misurò la carica elettrica in due modi, cioè colla bilancia di torsione, e collo spinterometro ; e vide che questi due modi, si accordavano insieme nel dimostrare, che le cariche sono proporzionali alle distanze esplosive, vale a dire alla lunghezza della scintilla. Soggiunge però il fisico medesimo, che la bilancia di torsione, forniva risultamenti di esattezza maggiore. Anche altri giunsero alla medesima coneguenza, fra' quali deve il sig. Harris essere compreso (35). Perciò se con d, c, k, k', esprimiamo rispettivamente la distanza esplosiva , ovvero la lunghezza della scintilla, la carica del conduttore, e due costanti, avremo

$$(a) \qquad d = kc \ .$$

Ma sebbene lo spinterometro, possa misurare la carica complessiva di un conduttore elettrizzato, certo è che non potrà misurare la tensione di un suo punto qualunque ; non potrà quindi verificarsi quanto viene supposto, nelle precedenti sperienze che analizziamo, essere cioè la lunghezza della scintilla proporzionale alla tensione t di un punto qualunque del conduttore, non escluso quello che appartiene al vertice del cono, applicato al conduttore stesso. In fatti supponiamo vera sì fatta proporzionalità, ed avremo la

$$(b) \qquad d = k't \ ;$$

combinando questa equazione colla precedente, se con H indicheremo una terza costante, otterremo

$$(c) \qquad t = \mathrm{H}c \ ,$$

(32) Corso elem. di fisica sperim. di G. Belli. Milano 1838, t. 3, pag. 55, li. 9, sal.
(33) Riess Die Lehre von der Reibungselectricität. Berlin 1853, vol. 1.°, p. 329, li. 15.
(34) Idem, p. 377, li. 5.
(35) Leçons élémentaires d'électricité traduites et annotées par Garnault, Paris 1857, pag. 120, li. 10.

vale a dire, saremo condotti da quella supposizione, ad ammettere la tensione di un punto qualunque, proporzionale alla carica del conduttore. Ma è facile riconoscere, non potersi ammettere questa proporzionalità nelle sperienze di cui parliamo.

Infatti dalla teorica di Poisson (36) risulta, che se la distanza fra due corpi conduttori, uno elettrizzato e non l'altro, si mantenga costante; allora soltanto la tensione in qualunque punto del corpo elettrizzato, riesce proporzionale alla carica del conduttore stesso. Poichè se quella distanza variasse, allora il diverso avvicinamento ad un qualunque punto del conduttore, farebbe cangiare in ogni luogo del medesimo la elettrica distribuzione; quindi anche la sua tensione, senza che abbia la carica menomamente cangiato. Ma nelle riferite sperienze, cangia continuamente la distanza in proposito, cioè la distanza fra la sfera eccitatrice, la quale agisce come spinterometro, ed il conduttore; dunque, relativamente alle sperienze stesse, non può verificarsi la (c); quindi neppure la (b), che da questa, e dalla (a) discende. Laonde, poichè non può verificarsi la (b), non potremo ammettere, quello che viene supposto vero nelle indicate sperienze, cioè che la lunghezza della scintilla sia proporzionale alla tensione della punta; e cessano perciò le conclusioni, dedotte dalle sperienze stesse.

§. 9.

Potrebbe taluno credere, che ad una elettrica tensione infinita, debba sempre corrispondere una elettrica dispersione pur essa infinita. Però vedremo in questo paragrafo, che sebbene la elettrica tensione al vertice di un cono, teoreticamente debba essere infinita; non per questo dovrà essere tale anche la elettrica dispersione del cono stesso. Poichè la tensione infinita solamente ha luogo in un punto geometrico, cioè nel solo vertice del cono, e non in una sua zona di estensione *finita*. Ma la dispersione di un elemento superficiale deve stare necessariamente in proporzione dell'area sua. Perciò la dispersione del vertice, vale a dire di quella parte del cono che possiede tensione infinita, dovrà esprimersi analiticamente, dal prodotto di un fattore infinito, cioè dalla tensione, per un altro fattore infinitesimo, cioè per l'area della punta. Ma il prodotto $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ non presenta in generale un valore infinito; dobbiamo perciò

(36) Mémoires de l'Institut Imperial, Année 1811, pag. 7, li. 12.

concludere, che fra tutte le dispersioni degli elementi superficiali del cono, avvene una soltanto, la quale può avere un valore finito: e siccome le dispersioni di tutti gli altri elementi superficiali del cono , sono infinitesime ; così vediamo che la dispersione totale del cono stesso, può riescire quantità finita. Vediamo cioè che, dall'essere infinita la elettrica tensione della punta, non può concludersi che la elettrica dispersione sua , come anche di tutto il cono , debba essere infinita.

Accade similmente nell'analisi, ove si hanno integrali definiti, di cui la funzione diviene, per certi valori della variabile, un infinito rispetto gli altri valori della variabile stessa ; e con tutto ciò si trova, che l' integrale riesce finito. Così p. e. abbiamo

$$\int_{o}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{\alpha} ,$$

valore finito, sebbene per $x = o$ la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ divenga infinita. Da ciò si deve concludere , che contando le x sull'asse del cono, e coll'origine al suo vertice, quando la tensione sulla superficie del medesimo fosse rappresentata da $\frac{1}{\sqrt{x}}$, la dispersione sarebbe realmente finita, quantunque debba essere la tensione infinita, nel suo punto corrispondente ad $x = o$.

§. 10.

Nelle sperienze analizzate (§ 6), si è creduto, che la elettrica tensione, misurata erroneamente (§ 8) collo spinterometro, possa misurarsi pure colla pressione dell'atmosfera, che nelle sperienze stesse, fu a torto riguardata causa necessaria, per impedire la elettrica dispersione. Questo concetto include, che la conducibilità dell'aria si debba, in parità di circostanze, considerare inversamente proporzionale alla sua pressione ; per conseguenza dovrebbesi riguardare il vuoto qual conduttore perfetto. Quanto erronea sia questa opinione, può vedersi da ciò che siegue.

Chi ammette che la elettrica tensione, possa misurarsi colla pressione dell'aria, e che la elettrica dispersione venga impedita dalla pressione stessa (37),

(37) Comptes Rendus, t· 62, an. 1866, p. 450 li. 25, e pag. 451, li. 3.

deve ammettere necessariamente, che la conducibilità per l'elettrico sia maggiore nell'aria secca rarefatta, e minore nell'aria medesima compressa. La fallacia di questa conseguenza, viene dimostrata dai ragionamenti che sieguono, e che sono istituiti da fisici di molta rinomanza.

L' illustre De la Rive si esprime a questo modo su tale argomen-
» to (38). I fatti dimostrano, che se l'aria trattiene la elettricità sulla su-
» perficie dei corpi, ciò non è punto per la pressione che la medesima eser-
» cita, ma bensì pel potere isolante, che dalla sua natura stessa dipende. L'aria,
» non altramente che i gas, agiscono adunque come uno strato isolante di re-
» sina: e poichè nel vuoto il più perfetto, i corpi ritengono ancora sulla su-
» perficie loro uno strato d'aria, che vi si mantiene aderente ; questa circo-
» stanza spiegherebbe perchè i fenomeni elettrici, si manifestano ancora nel
» vuoto . . . . Il sig. Harris ha osservato, che le repulsioni, e le attrazioni
» fra corpi conduttori elettrizzati, hanno luogo nel vuoto come nell'aria: nuova
» prova dell'errore che si commette, facendo entrare la pressione atmosferica
» nei fenomeni di elettrica dispersione ».

Sopra la coibenza del vuoto, furono istituite molte ricerche da vari autori; però le relative sperienze presentano qualche difficoltà per produrre un vuoto realmente secco : giacchè la umidità sviluppata dalla rarefazione dell' aria , rende più conducibile questa. Molti si servirono del vuoto barometrico, prodotto da un mercurio bollito bene. Così Walsh (39) construì un sifone a mercurio, coi pozzuoli isolati , e più alto dell' altezza barometrica , in guisa che le due colonne di mercurio , venivano separate da un vuoto. Comunicando poi ad una delle due colonne di mercurio un poco di elettricità, vide la luce nella parte vuota , ed elettrizzarsi l' altra colonna. La luce non apparve, quando il mercurio era prima bene bollito , e la seconda colonna di mercurio non si elettrizzò affatto, lo che provava la coibenza del vuoto. Questa ricerca sperimentale si fece alla presenza di Franklin, De Luc, e Cavallo. Morgan (40) modificò alquanto la sperienza stessa, coprendo la esterna parte di una camera barometrica colla stagnuola; poscia comunicando a questa una carica elettrica, vide la luce nell' interno, quando il mercurio non fu bollito a bastanza, mentre nel contrario caso, il fenomeno luminoso più non si produceva. Que-

---

(38) Traité de l'électricité théorique et appliquée, vol. 1.°, pag. 128, li. 4.

(39) Gilbert Annalen, vol. 11, an. 1802, p. 160, li. 5 salendo.

(40) Philosophical Transactions, f. 1785, p. 272. — Belli corso elem. di fis., vol. 3.°, p. 547, Milano 1838.

sta sperienza, si deve spiegare, assomigliando l'adoperato congegno ad una boccia di Leida, e riguardando la luce, che comparve nell' interno, come l'effetto di un trasporto della elettricità libera, sviluppata dentro la camera del barometro stesso, nella quale l'aria costituiva l'armatura interna.

Erman si valse anch'esso della camera barometrica (41) ben secca, nella quale entrava un filo di platino, traversando il tubo, ma senza toccare il mercurio; mentre un'altro filo, posto nel pozzuolo, era in comunicazione con un elettroscopio sensibile; dando al filo di platino superiore una carica elettrica, vide che l'elettroscopio rimase immobile: ciò dimostra che il vuoto non conduce.

Il sig. Eisenlohr riconobbe la coibenza del vuoto, avendo egli detto, che il vuoto si contava erroneamente fra i conduttori (42), e il sig. Wiedemann dice che il vuoto perfetto e asciutto, diviene coibente (43).

Il celebre Davy (44), adoperò contemporaneamente la macchina pneumatica ed il mercurio, per produrre in un tubo il vuoto, nel quale introdusse un filo di platino, saldato alla estremità chiusa del tubo stesso, ed avendone pendenti altri due sottilissimi, onde servire da elettroscopio. Vide con questo mezzo il nominato fisico, che il vuoto non è buon conduttore dell'elettrico, e che lo è tanto meno, quanto più la sua temperatura diminuisce; però sembra che il vuoto in queste ricerche non fosse giunto ad essere perfetto.

Col vuoto della macchina pneumatica sperimentò anche Dessaignes (45), il quale vide che un elettroscopio, caricato di elettricità, divergeva sotto la campana per due ore.

Harris fece questa medesima sperienza (46), e vide che l' elettroscopio non subì veruna diminuzione, quando la densità dell'aria si era ridotta ad $^1/_{300}$.

Anche Riess (47) trattò così fatto argomento; e dalle sue sperienze ottenne quel medesimo successo, che già fu ottenuto dai citati autori. Inoltre questo fisico riconobbe, che la presenza di un altro corpo, vicino a quello elettrizzato, influisce molto sopra i risultamenti di queste ricerche. Per tale presenza la

---

(41) Gilbert Annalen, vol. 11, an. 1802, p. 163.

(42) Lehrbuch der Physik 1863, p. 520.

(43) Die Lehre vom Galvanismus Braunschweig 1863, vol. 2.°, p. 872.

(44) Philosoph. Trans. f. 1822 pag. 64, e seg. — Belli, opera citata, pag. 548, li. 21. — Pianciani, op. cit. pag. 50, li. 11 salendo.

(45) Gilbert Annalen, vol. 48, pag. 50.

(46) Philosoph. Trans. f. 1834, p. 213 — Repertorium der Physik, vol. 2, p. 14.

(47) Idem vol. 2, pag. 15.

elettrica dispersione deve accrescersi; e secondo le sperienze del Riess, l'aumento è maggiore nell' aria rarefatta, che in quella di densità ordinaria. Da ciò si vede che l'azione complessiva dell'aria rarefatta e del secondo corpo, in parità di circostanze, possono favorire la dispersione indicata. In fatti dal citato fisico si riferiscono i risultamenti numerici di alcuni sperimenti, dai quali è comprovata la giustezza di questo asserto (*).

Il sig. Gassiot (*a*), in occasione de' suoi studi, riguardo alla stratificazione della elettrica luce, riconobbe anch'esso, che il vuoto perfetto è coibente. Questo dotto fisico produsse il vuoto entro un tubo di Geissler, per mezzo del gas acido carbonico rarefatto, che fece assorbire poi dall' idrato di potassa, fuso in un piccolo recipiente, posto a comunicare coll' interno del tubo stesso. In siffatta sperienza, egli vide sparire del tutto la luce, quando interpose il tubo indicato, fra i roofori di una fortissima elettrica pila. Inoltre il nominato fisico vide ancora, che gli elettrometri, applicati sugli estremi dei roofori medesimi, non diminuivano punto le divergenze loro. Tutto ciò dimostra evidentemente, che il vuoto perfetto, anche per la elettricità dinamica, è coibente.

Il fatto che la presenza di un altro corpo, vicino a quello elettrizzato, accresce la elettrica dispersione di questo, nell'aria rarefatta, rispetto quella nell'aria densa, deve spiegarsi come siegue. Dalle mie sperienze (48) si conclude, manifestarsi la induzione più forte nel vuoto, che nell'aria. Ciò posto, si vede che anche l' attrazione fra l' elettrico indotto e l' inducente, debba essere maggiore nel vuoto che nell'aria. Ma la elettrica dispersione, prodotta dal corpo vicino all' inducente, dipende ad evidenza da due cause, cioè dalla conducibilità dell'aria, e dall'attrazione fra le due elettricità, una inducente, l'altra idotta. Chiaro adunque apparisce come di queste due cause, la seconda crescer debba col diminuire la densità dell'aria. Le indicate mie sperienze per provare, che la induzione, tanto rettilinea, quanto curvilinea, si accresce nel vuoto, sono anteriori a quelle dal sig. Gaugain, fatte molto dopo, cioè nel 1864, colle quali questo distinto fisico, non dimostrò l' indicato aumento della induzione, sia rettilinea sia curvilinea; ma soltanto che la rettilinea non diminuiva, rarefacendo l'aria, contenuta nella campana, ove il fenomeno stesso veniva prodotto (*b*). Quindi credo aver dimostrato, molto prima del sig. Gaugain, che

(*) Repertorium der Physik, t. 2, p. 14, li. 2, salendo.

(*a*) Poggendorf, Annalen, vol. 112, p. 156.

(48) Comptes Rendus, t. 43, an. 1856, pag. 721, 8.°

(*b*) Cosmos, vol. 24, pag. 680. — Les mondes, t; 5.°, p. 542.

la induzione elettrostatica, od influenza elettrica, si trasmette più energicamente per mezzo dell'etere, sostanza coibente, non potendosi trasmettere affatto per mezzo della materia conduttrice.

Secondo il ch. fisico Matteucci (49), la dispersione diminuisce nell'aria *secca* tanto più, quanto più decresce la densità dell'aria. Ma quando si tratta della scarica disruptiva fra due corpi, uno inducente, l'altro indotto, la dispersione viene favorita dall'aria rarefatta, perchè in questo caso la induzione diviene più forte; ed il citato autore trovò, che il residuo dopo la scarica, è proporzionale alla densità dell'aria: però non crediamo potersi confondere la scarica disruptiva colla dispersione, perchè la prima è una neutralizzazione, mentre la seconda è una comunicazione.

Nè possiamo esclusivamente ammettere, doversi negare (50) che « le molecole gassose vengano attratte dai corpi elettrizzati, li tocchino, e ne sieno in seguito respinti per cedere il posto loro alle altre.» Perciò dissentiamo eziandio che possa esclusivamente supporsi « accadere (51) per le molecole dei gas, ciò che accade per quelle dei solidi e dei liquidi; cioè che queste molecole sono attirate dai corpi elettrizzati, restano aderenti ai medesimi, attirando altre molecole gassose attorno esse, in guisa da propagare la elettricità da molecola a molecola, come nei solidi; e che solo nel caso delle forti cariche elettriche avvenga, che le molecole gassose possano essere poste in moto, come pei solidi, e pei liquidi avviene ».

Non possiamo in tutto ciò convenire; poichè ammettendo esclusivamente questo concetto, si dovrebbe ritenere, che la comunicazione dell'elettrico, trattandosi di cariche non molto forti, ha luogo soltanto per mera conducibilità, e non per trasporto. Non vogliamo negare che nei gas, in certe circostanze, quando specialmente la mobilità delle molecole loro non è perfetta, abbia luogo la comunicazione dell'elettrico anche per effetto di conducibilità: ciò può verificarsi nelle precedenti sperienze, istituite colla punta elettrizzata, e chiusa in un inviluppo coibente, ovvero in una punta, poco sporgente dal centro di un disco pur esso coibente, nelle quali disposizioni, viene in tutto, od in parte impedita la mobilità delle molecole. Dobbiamo però ammettere, che, tolto l'impedimento alla mobilità, la propagazione dell'elettrico nei gas, avvenga in generale, tanto per conducibilità, quanto per trasporto,

(49) Ann. de chim. et de phys., 3.e sèrie 1850, t. 27, p. 415.

(50) Becquerel, Traité d'électricité et de magnetisme, t. 1.°, Paris 1855, p. 48, li. 7.

(51) Luogo citato.

ma più in questo secondo modo. In fatti vediamo che un corpo elettrizzato, attira corpi leggieri, e poi li respinge, anche allorchè la sua carica è debole, nè la repulsione manca mai. Perciò le molecole dell'aria, che sono tanto più mobili di ogni altro corpo, debbono a *fortiori* subire la elettrica repulsione, quando la mobilità loro non è impedita. Inoltre il molinello elettrico, ed il venticello elettrico, sono fenomeni che riescono sensibili, anche per piccole cariche; e sono una prova evidente, che la elettricità nei gas, viene comunicata dalle molecole loro per trasporto, quando la mobilità delle medesime non abbia verun impedimento. L' indicato trasporto si vede anche meglio nelle sperienze, fatte (52) immergendo nell'olio di Colza due corpi, uno inducente, l'altro indotto.

Per tanto due sono i modi coi quali l' elettrico in un luogo passa nell'altro, cioè: 1.° per trasporto, simile a quello col quale il calorico principalmente si distribuisce nei liquidi , e nei fluidi elastici: 2.° per conducibilità , modo simile a quello col quale il calorico si distribuisce nei solidi , e contro questa distribuzione agisce, tanto per l'elettrico, quanto pel calorico la coibenza , per la quale viene più o meno impedita la distribuzione stessa. Un terzo modo avvi, non identico in ambedue questi agenti, ma simile nei medesimi, col quale l'uno e l'altro manifestano a distanza i loro effetti; ed è per l'elettrico la elettrostatica induzione, mentre pel calorico, è il suo raggiamento. La differenza fra la induzione stessa, ed il raggiamento calorifico, risiede in questo, che la influenza elettrica nè toglie, nè aggiunge all' indotto isolato la benchè minima dose di elettricità; però il raggiamento calorifico, accresce nel corpo che lo subisce la sua temperatura. Dunque se consideriamo il passaggio dell' azione di questi due agenti da un luogo all' altro, vediamo che per ognuno dei due si manifesta in tre modi ; e ciò costituisce una correlazione fisica fra l'elettrico, ed il calorico. Inoltre dal vedere che tanto la elettricità, quanto il calorico sono trattenuti sui conduttori, non dalla pressione contro i medesimi del mezzo che li circonda, ma dalla mancanza di conducibilità del mezzo stesso, troviamo in questo fatto un' altra correlazione fisica fra questi due agenti, elettricità, e calorico.

Abbiamo trattato della elettrica dispersione, relativamente alla densità dell'aria, nella quale succede la dispersione medesima; ed abbiamo veduto che gli autori tutti ritengono, contro le citate sperienze (§ 6, e § 10), che questa dispersione decresce col diminuire della densità dell'aria secca, cioè coll'avvicinarsi al vuoto. Però

---

(52) Comptes Rendus, t. 62, an. 1866, p. 232, e seg.

avvi ancora un altra causa, che modifica essenzialmente la elettrica dispersione, avvi cioè la umidità, della quale non si tenne conto affatto nelle citate sperienze (§ 4, 5, 6, 7). L'effetto della umidità fu sperimentato da più fisici, ed in particolare da Coulomb, e dal ch. Matteucci. L'effetto medesimo è sensibilissimo; cosicchè trattandosi dell'atmosfera, in cui la densità varia fra limiti angusti, la elettrica dispersione a causa della umidità, varia fra limiti molto fra loro distanti: cioè si trovò in quattro giorni di sperimenti, essere il suo minimo ed il suo massimo effetto, nel rapporto di 1:5, come risulta dalle sperienze di Coulomb (53).

Da tutte le osservazioni che abbiamo fatto precedere, si vede quanto sia mal fondato il concludere (54) « allorchè dunque si traggono, dal conduttore di » una potente macchina elettrica, delle scintille di 500 millimetri di lunghezza, » il fluido elettrico accumulato alle punte collettrici, esercita sull'aria ambiente » ad un'atmosfera, e senza vincere la sua resistenza, una pressione di 1000 » atmosfere. »

§. 11.

In una nota contro i riferiti sperimenti (§. 5), di cui le conseguenze furono evidentemente da noi riconosciute false colle precedenti osservazioni, fu detto (55). « È da osservare che lo stato di elettrica tensione alla punta di un » cono, risulta non solamente dallo stato del fluido in questo medesimo luogo, » ma eziandio dall'azione repulsiva, esercitata dall' insieme dello stato elettrico » distribuito alla superficie del cono medesimo, che noi supponiamo in libera » comunicazione col suo vertice. Quando s' interpone fra questo, ed il resto » della superficie, un disco molto largo, cattivo conduttore, come la gomma » elastica, e sul quale la punta del cono emerga pochissimo, le azioni reci- » proche, fra gli strati elettrici verso la punta, e sul resto del cono, separate in » tal guisa, non sono più nelle condizioni degli strati elettrici, che la teorica » matematica suppone assolutamente liberi. La differenza delle condizioni » è sopra tutto manifesta dalla sperienza (56), nella quale un disco largo, » e cattivo conduttore, forma ostacolo allo scorrere libero e continuo, » del fluido, dalla base al vertice della conica superficie, che questo disco

(53) Riess Elettrostatica, vol. 1.° p. 115, — Mém. de l'Acad. de Paris, 1785, pag. 616, nelle ultime due linee.

(54) Comptes Rendus, an. 1866, t. 62, pag. 451, li. 20.

(55) Comptes Rendus, an. 1865, t. 60, p. 412, li 20.

(56) Comptes Rendus, an. 1865, t. 60, pag. 180, li. 2 salendo.

» serra presso il vertice stesso. Egli è presumibile che, se invece di tro-
» varsi a contatto immediato con questo largo collaro isolante, la punta
» passasse liberamente a traverso un' apertura piccola, praticata nel centro
» del disco, d'altronde convenientemente sostenuto, ma senza che la punta
» fosse a contatto coi bordi del disco medesimo, il potere della punta, non sa-
» rebbe affatto diminuito, e l'escita del fluido, presso a poco si effettuerebbe,
» come se la medesima fosse del tutto isolata nell'aria. » . . .

Osserviamo relativamente al riferito brano: 1.° Che lo stato elettrico di una punta, cioè la elettrica sua tensione, risulta principalmente dalla curvatura, la quale nella punta essendo infinita, rende anche infinita la sua tensione. L' altezza del cono può variare, crescendo e diminuendo, quanto si vuole, che l' insieme degli strati elettrici, sottoposti al vertice del cono stesso, non avranno influenza tale, da impedire che nel vertice medesimo, la tensione sia sempre teoricamente infinita. 2.° Che sebbene il collaro di coibente stringa il cono, la elettricicità passerà sempre a traverso tale strettura, percorrendo la superficie conducente del cono, e si accumulerà sulla punta. 3.° La dispersione del fluido elettrico dalla punta del cono, si effettuerà molto più, se questo sia collocato in aria libera, di quello che se il medesimo traversi un largo foro, praticato in un disco non conduttore senza toccarlo. 4.° Che la causa primaria, per la quale il disco non conduttore, impedisce in parte la dispersione dalla punta del cono, è la induzione, da cui viene vincolata in parte la elettricità della punta stessa, come già fu dichiarato (§ 5). Questa è anche la causa da cui la elettrica corrente dei telegrafi sottomarini, corre meno veloce, di quella nei fili telegrafici, che sono immersi nell'aria, come Faraday osservò pel primo.

Sembrò evidente a taluno (57), che il disco non conduttore, traversato nel centro dalla punta « non potesse avere alcuna influenza, che attenuasse
» la forza repulsiva del fluido elettrico della punta medesima; poichè dalla
» relativa sperienza, il disco non altramente che l'aria circostante, sono l'una
» e l' altra coibenti. » Questo asserto è inammissibile, a motivo dell' attrazione fra l' elettrico della punta ed il disco di gomma elastica, per lo che non può negarsi, esistere un' influenza per parte del disco, sulla forza repulsiva del fluido elettrico della punta, come tanto esplicitamente già fu esposto (§. 5); cosicchè non crediamo necessario con altre parole su ciò trattenerci.

---

(57) Comptes Rendus, t. 60, an. 1865, pag. 181, li. 3.

§ 12.

Gli sperimenti che abbiamo analizzato (§ 4, 5, 6, 7), hanno per iscopo negare la esistenza della forza elettro-repulsiva ; e noi dimostrammo , che non valgono essi punto a negare la esistenza della indicata forza. Ora vogliamo , a compimento del nostro assunto , in questo paragrafo , e nel seguente § 15 , dimostrare , tanto razionalmente , quanto sperimentalmente la esistenza stessa.

Dimostrazione razionale. Dietro l'osservazione del solo fatto generale, che l'elettricità libera portasi dall' interno, alla esterna superficie dei corpi conduttori, che ivi per modo si distribuisce , da cresce o decresce colla curvatura, e che la inducente respinge la omologa sull' indotto isolato, si dimostra *a priori* la esistenza della forza ripulsiva elettrica. Da ciò si dimostra eziandio col calcolo, che questa forza è in ragione inversa del quadrato della distanza (58) : due fatti che hanno ricevuto il suffragio della sperienza. Inoltre le conseguenze dedotte dall'analisi di Poisson, relative alla distribuzione dell'elettrico equilibrato sui conduttori, suppongono la esistenza della forza elettrica repulsiva, e sono convalidate dagli sperimenti ; ciò costituisce un'altra prova che la repulsione indicata esiste.

Facciamoci da ultimo a riflettere sull'analisi, che conduce alla formula, valore della repulsione risultante fra due corpi elettrizzati omologamente, per es. fra due sfere , nel qual caso il calcolo giunge facile a determinare la formula indicata. L'analisi per questo fine, tutta consiste nella ipotesi, che la repulsione fra due elementi, uno appartenente alla prima sfera, l'altro alla seconda, non sia già soltanto un'apparenza, ma bensì una realtà. Inoltre l'analisi medesima è anche basata sul fatto sperimentale, che cioè la forza elettrica si eserciti nella ragione inversa del quadrato della distanza. E per giungere alla indicata formula , si considerano senz' altro la estensione superficiale dei due citati elementi , la distanza fra loro , e le densità elettriche di essi.

In primo luogo consideriamo una sola sfera, che, per evitare ogni difficoltà, supporremo essere di un perfetto coibente, dentro un ambiente pur esso

---

(58) Plana, sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices, Extrait des mémoires de l'acad. des sciences. T. VII, série 2, an. 1844 - Turin 1845, p. 325.

tale. Dicasi r il raggio qualunque della sfera medesima, rappresentiamo con C la sua carica elettrica, che supporremo sempre uniformemente distribuita sulla superficie della sfera stessa. Rappresentiamo con a la distanza fra il centro di questa sfera, ed il punto sul quale agisce per mezzo di reciproca repulsione: la carica elettrica, omonoma di quella del punto medesimo, si esprima con c; finalmente δ esprima la densità dell'elettrico, in ogni punto della sfera. Immaginiamo la superficie sferica divisa in tante zone, di altezza infinitesima, prodotte da sezioni, ognuna perpendicolare alla retta che indicammo con a. Pel teorema di Archimede, l'area di una qualunque di queste zone, sarà espressa con

$$2\pi r dx,$$

e la massa elettrica distribuita sulla zona medesima sarà

$$2\pi r\delta dx .$$

Per avere l'elemento differenziale di questa massa, corrispondente alle coordinate ortogonali x, y, che hanno la origine loro nel centro dalla sfera, intendiamo divisa nuovamente la sfera medesima, con tanti piani vicinissimi fra loro, e tutti passanti per la distanza a; cosicchè l'angolo fra due consecutivi dei medesimi sia $d\varphi$. Chiamando e la massa elettrica, contenuta in uno qualunque degli elementi della zona indicata, la troveremo per mezzo della seguente proporzione

$$e : 2\pi\delta r dx = d\varphi : 2\pi ,$$

donde

$$e = \delta r dx d\varphi .$$

Dicasi d la variabile distanza fra questo elemento della massa elettrica, ossia della carica sopra una qualunque delle indicate zone, ed il punto attratto: la forza repulsiva ρ fra l'elemento stesso, ed il punto medesimo, sarà espressa da

$$\rho = \frac{\delta r c dx d\varphi}{d^2} .$$

È poi facile vedere, mediante il triangolo rettangolo, formato dalla ipotenusa d, e dai cateti y ed $a - x$, che avremo

$$d^2 = (a - x)^2 + y^2 = (a - x)^2 + (r^2 - x^2) = a^2 - 2ax + r^2 ,$$

quindi sarà

$$\rho = \frac{\delta r c dx d\varphi}{a^2 - 2ax + r^2} .$$

Si decomponga questa repulsione elementare in due, una secondo l'asse delle y, l'altra secondo quello delle x: la prima, poichè il sistema è simmetrico attorno l'asse delle stesse x, sarà distrutta da un'altra opposta ed eguale; perciò non dovrà essa entrare nel calcolo che facciamo. In quanto alla seconda elementare componente dq, la quale agisce sempre parallelamente all'asse delle x, questa sarà pel triangolo sopra indicato, espressa da $\rho\cos.\omega$, essendo ω l'angolo variabile da una zona all'altra, formato dalla risultante ρ coll'asse delle ascisse; quindi avremo

$$dq = \frac{\delta rc \cos.\omega \, dx d\varphi}{a^2 - 2ax + r^2}.$$

Ma nel triangolo medesimo abbiamo

$$\cos.\omega = \frac{a-x}{d} = \frac{a-x}{\sqrt{(a^2-2ax+r^2)}},$$

dunque sarà

$$dq = \frac{\delta rc(a-x)dx d\varphi}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ed integrando rispetto alla variabile φ, fra i limiti e o, 2π, avremo

$$q = \int_0^{2\pi} \frac{\delta rc(a-x)dx d\varphi}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi\delta rc(a-x)dx}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi\delta rc \left[\frac{adx}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{xdx}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Chiamando Q la repulsione totale, fra l'intera sfera ed il punto, integrando fra i limiti r, e $-r$, avremo

$$Q = 2\pi\delta rca \left[\int_{-r}^{+r} \frac{dx}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a}\int_{-r}^{+r} \frac{xdx}{(a^2-2ax+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= 2\pi\delta rca \left[\left[\frac{-2}{-2a\sqrt{(a^2+r^2-2ax)}}\right]_{-r}^{+r} - \frac{1}{a}\left[\frac{2(a^2+r^2-2ax+a^2+r^2)}{4a^2\sqrt{(a^2+r^2-2ax)}}\right]_{-r}^{+r}\right]$$

$$= 2\pi\delta rca \left[\frac{1}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ax)}} - \frac{(a^2+r^2-ax)}{a^3\sqrt{(a^2+r^2-2ax)}}\right]_{-r}^{+r}$$

$$= 2\pi\delta rca \left[\frac{ax-r^2}{a^3\sqrt{(a^2+r^2-2ax)}}\right]_{-r}^{+r}$$

$$= 2\pi\delta rca \left[\frac{ar-r^2}{a^3\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}} + \frac{ar+r^2}{a^3\sqrt{(a^2+r^2+2ar)}}\right]$$

$$= 2\pi\delta rca\left[\frac{ar - r^2}{a^3(a - r)} + \frac{ar + r^2}{a^3(a + r)}\right] = 2\pi\delta rca\left(\frac{r}{a^3} + \frac{r}{a^3}\right);$$

dunque finalmente, avremo

$$(1) \qquad Q = \frac{4\pi\delta r^2 c}{a^2} = \frac{C \cdot c}{a^2}.$$

Da questa formula concludiamo, che la repulsione di una sfera sopra un punto, ambedue carichi di elettricità omologhe, si esercita come se tutta la carica elettrica della sfera fosse raccolta nel suo centro; e reciprocamente la repulsione di un punto sopra una sfera si esercita, come se la carica di questa, fosse ridotta nel suo centro. Dicasi lo stesso dell'attrazione, quando la sfera ed il punto sieno elettrici per cariche di contraria natura fra loro. Sostituendo al punto una sfera, colla stessa carica elettrica di questo, ed avente per centro il punto stesso, è chiaro per la (1), che l'azione repulsiva della seconda sfera, sopra ogni punto della prima, dovrà esercitarsi come si esercitava quella del punto; ma la prima sfera essa pure agiva come se fosse stata ridotta nel suo centro: dunque le due sfere si respingeranno, come se le cariche loro si fossero accumulate nei rispettivi centri. Per conseguenza la formola (1), assegnerà eziandio la elettrica repulsione, pel caso di due sfere omologamente elettrizzate. Ma la formula (1) fu riconosciuta vera dalle sperienze (59) di Coulomb, inoltre il processo analitico, mediante il quale noi la deducemmo, essenzialmente include la esistenza di una reale forza repulsiva, e non apparente: dunque non può negarsi questa esistenza.

Ora se la repulsione di cui parliamo non fosse reale, ma invece fosse l'effetto unicamente delle azioni attrattive di tutto l'ambiente; certo è che il calcolo per giungere alla risultante di queste supposte attrazioni, si dovrebbe istituire in modo assai diverso, da quello sopra indicato. Si dovrebbe 1.° trovare la induzione integrale di ciascuna sfera sopra un elemento qualunque dell' ambiente; quindi si dovrebbero queste sommare, al qual fine occorrono due integrazioni, una per ogni sfera. 2.° Trovato così l'effetto induttivo totale delle due sfere, sopra un elemento qualunque dell' ambiente, si dovrebbe decomporre secondo la retta che congiunge i due centri; quindi per mezzo di una integrazione, si dovrebbe trovare la componente dell'elemento medesimo relativo a tutta la sfera. In fine integrando una seconda volta relativamente a

(59) Hist. de l'acad. royale des sciences, Paris, année 1785, p. 572, e p. 611 (1.°).

tutti gli elementi dell'ambiente, si otterrebbe l'azione attrattiva totale; vale a dire si troverebbe la forza, secondo la quale una qualunque delle due sfere si allontana dall'altra, per l'attrazione reciproca dell'ambiente sulla sfera stessa.

Ma la formula (1) ottenuta colla prima di queste due analisi, è universalmente riconosciuta vera, ed è confermata dalla sperienza per la prima volta da Coulomb (60). Laonde se per mezzo della seconda fra le indicate analisi, potesse giungersi a trovare la stessa formula , sarebbe la ipotesi della sola attrazione, soddisfacente quanto la repulsione, a spiegare l'allontanamento fra loro di due sfere cariche di elettricità omologhe. Noi per tanto proponiamo, a quelli che negano la esistenza della elettro-repulsione, dimostrare colla seconda analisi, come si possa giungere alla formula indicata: ciò nulla ostante sarà sempre vera la esistenza della elettrica repulsione, giacchè questa viene ad evidenza dimostrata dal precedente analitico ragionamento, confermato dalla sperienza.

§. 13.

Abbiamo tacitamente supposto nell'analisi precedente, che quel punto il quale subisce l'azione elettrica, si trovi al di fuori della sfera; perchè ciò soltanto era necessario, pel caso nostro, cioè per dimostrare vera, e non apparente, la elettro-repulsione. Ma l'analisi medesima risponde ancora per l'altro caso, nel quale il punto si trovi nell' interno della detta sfera. Riprendiamo a tal fine la

$$q = \frac{2\pi\delta rc(a - x)dx}{(a^2 - 2cx + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

esprimente l'azione sul punto, tanto attrattiva quanto repulsiva, dell'elemento anulare, cui corrisponde l'ascissa x. Se questo punto si trovi al di fuori della sfera, tutte le azioni degli elementi, per essere $a > x$, posseggono il medesimo segno algebrico; quindi è chiaro che per determinarne l' azione totale, possiamo integrare il precedente valore di q fra i limiti $-r$ ed r, come di fatto abbiamo eseguito precedentemente.

Ma trovandosi quel punto nell' interno della sfera, le azioni degli elementi anulari di essa non conserveranno il medesimo segno, quando la x percorre i suoi valori da $+r$, sino all'altro $-r$, ed essi passeranno dal positivo al negativo, quando $x = a$. Da ciò si vede che in tale caso, debbonsi trovare se-

(60) Histoire de l'acad. royale des sciences, an. 1785, p. 572, e pag. 611, (1.°).

paratamente le azioni delle due calotte sul punto compreso da esse. Le due calotte medesime, vengono prodotte da una sezione della sfera, passante pel punto, e perpendicolare alla retta che congiunge questo, col centro della sfera stessa. Il valore numerico di queste azioni , sottratto uno dall'altro , darà il valore della risultante loro sul punto dato.

Ora considerando la calotta, per la quale tutte le ascisse hanno il medesimo segno, si trova

$$Q = 2\pi\delta rc \int_a^r \frac{(a - x)dx}{(a^2 - 2cx + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ovvero

$$Q = 2\pi\delta rca \left[\frac{ax - r^2}{a^3\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ax)}}\right]_a^{+r}$$

$$= 2\pi\delta rca \left[\frac{ar - r^2}{a^3\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar)}} - \frac{a^2 - r^2}{a^3\sqrt{(r^2 - a^2)}}\right]$$

$$= 2\pi\delta rca \left[\frac{- r + \sqrt{(r^2 - a^2)}}{a^3}\right] = 2\pi\delta rc \left[\frac{- r + \sqrt{(r^2 - a^2)}}{a^2}\right].$$

Questa è l'azione, fra il punto in proposito e la calotta indicata, di cui la base dista di a dal centro della sfera.

Per avere l'azione della seconda calotta, sul punto medesimo, dovremo integrare il valore simbolico di Q fra i nuovi limiti a, e $-r$, appartenenti all' azione stessa. Ma eseguendo questa integrazione , si ottiene lo stesso risultamento, già ottenuto per la prima calotta, ma di segno contrario. Dunque dobbiamo concludere , che ognuna delle due calotte agisce ugualmente , sul punto compreso dalle medesime; perciò queste azioni sono eguali e di segno contrario fra loro: di quì discende che quel punto, subisce un azione totale zero, quando è dentro una sfera.

§ 14.

Dimostrammo analiticamente , che l' azione tanto attrattiva quanto repulsiva di una sfera, sopra un punto interno alla medesima, è nulla. Però trattandosi di materia elettrica, si osservi bene che questa, non solo agisce *meccanicamente* sul punto, sia dentro, sia fuori del corpo elettrizzato; ma vi agisce anche *fisicamente*, cioè decomponendo il fluido naturale del punto stesso. Questa azione *fisica* non è considerata nel precedente calcolo, come neppure

nell'analisi più volte citata di Poisson, ed in quella di ogni altro fisico geometra, che abbia trattato la elettrostatica col calcolo; ed è un'omissione vera il non averla mai considerata.

Per tanto, se la sfera sia di coibente, ognuno vede che l'azione fisica dell'elettrico distribuito uniformemente sulla sfera stessa, potrà esercitarsi sul punto interno, senza che ne nasca verun assurdo: questo punto perciò rimarrà in equilibrio, perchè l'azione meccanica sul medesimo è nulla; ma subirà esso ad un tempo la induzione: cioè il suo fluido naturale sarà decomposto; però, mediante la coibenza, non potrà l' omologo dell' inducente dipartirsi dal medesimo punto. Se poi la sfera, sia di materia conduttrice, in tal caso, quante volte si ammettesse che l' azione elettrica possa traversare anche i conduttori, ne verrebbe che il punto, come nel caso precedente, non potrà concepire verun moto; ma dovendo subire anch'esso la decomposizione del suo fluido naturale, l'omologo dell' inducente, per essere la materia conduttrice, si dovrà portare alla superficie della sfera, ed aumentarne la carica. Laonde si dovrebbe verificare una maggiore induzione sul punto stesso, per la quale nuovamente la carica superficiale della sfera si accrescerà: e così all' infinito. Quindi è chiaro che, supponendo essere la materia conduttrice, permeabile dall'azione elettrica induttiva, dovrebbe verificarsi un assurdo; cioè un moto perpetuo dell'elettrico, dal punto supposto nell' interno della conducente sfera, sino alla superficie di essa, lo che non può ammettersi. Dunque rimane dimostrato, che le azioni elettriche non traversano i corpi conduttori. Come dunque salvare tutte quelle analisi, nelle quali, essendo supposto che le azioni elettriche traversano l' interno dei conducenti, tuttavia sono i risultamenti loro in accordo colla sperienza?

A me sembra che si debbano salvare, facendo avvertire, che sebbene la materia conduttrice non venga traversata realmente dalle azioni elettriche, tuttavia, per comodo del calcolo, si può supporre che la traversi; ma devesi riguardare nell' interno dei corpi stessi per nulla, tanto la risultante delle azioni meccaniche, quanto la risultante, cioè l'effetto, delle azioni decomponenti. Noi crediamo indispensabile questa rettificazione in tutte le analisi di elettrostatica, relative ai corpi conduttori.

§. 15.

Dimostrazione sperimentale. Sopra un disco di carta dorata, del diametro di tre decimetri circa, se ne applichi un altro concentrico, formato da più strati di vernice di cera lacca, ed avente per diametro un decimetro circa.

Sopra questo secondo disco, se ne applichi un terzo di carta dorata, del diametro di tre centimetri. All'estremo di un sottile stelo ben rettilineo, quanto fa d'uopo lungo, passante pel comune centro dei nominati dischi, si fissi questo triplice disco , e lo stelo medesimo controbilanciato , si renda oscillante , intorno ad un sottile asse orizzontale , che lo traversi un poco al disopra del centro di gravità del sistema. Si avrà per tal guisa un pendolo, mobilissimo attorno il suo asse orizzontale. Un altro disco di latta, del diametro di cinque decimetri, avente nel mezzo un foro del diametro di un decimetro, sia stabilito in modo, che il pendolo, nello stato di equilibrio, chiuda esattamente col disco di cera lacca il foro indicato. Quindi apparisce, che tutto comunicherà col suolo, salvo il minore disco di carta dorata, e che il disco di latta, servirà per impedire le induzioni curvilinee dietro il pendolo.

Caricata di elettrico, sia positivo, sia negativo, la interna superficie di una piccolissima bottiglia di Leida, il suo bottone si porti a toccare il centro del minore disco di carta dorata, mentre un piano di prova, comunicante col suolo , si tiene vicinissimo alla *opposta* superficie del disco maggiore di carta dorata. Appena ricevutasi dal disco minore la elettricità dal bottone della bottiglia , tosto si vedrà il pendolo allontanarsi dal bottone medesimo. Si tolga dalla comunicazione col suolo il piano di prova, ed isolato si porti sul bottone di un elettroscopio a pile secche: non si avrà indizio veruno di elettrica influenza. Perciò dovremo concludere dal seguito allontanamento del pendolo, che la forza repulsiva elettrica esiste. Poichè questo allontanamento non può essere stato prodotto d'attrazione veruna, come dimostra il piano di prova, trovato allo stato neutrale. Questa sperienza, escludendo l'attrazione dei corpi circostanti dietro al corpo elettrizzato, escludendo cioè la induzione del disco di cera lacca sull'aria dietro al medesimo, dimostra evidentemente che la forza elettrica repulsiva esiste di fatto.

Se mai volesse taluno, contro questa ultima sperienza obbiettare, che la repulsione del disco pendolo , proviene dall' aria spinta contro il medesimo ; risponderemo che se questa spinta deriva dall' elettrico della bottiglia , già sarebbe ammessa la repulsione dell'elettrico per se medesimo. Se poi si volesse, che provenga quella repulsione dall'aria, la quale attratta dal bottone, va contro il disco, dovrebbe questa produrre l' allontanamento del disco dal bottone, anche prima che sia comunicata da questo al disco la elettricità, ed eziandio dovrebbe la elettricità stessa manifestarsi al piano di prova , posto dietro al disco allontanato dal bottone ; ma questi effetti non si verificano punto.

§ 16.

Dicemmo (§ 2), che il p. Pianciani, a convalidare la opinione sua, favorevole alla non esistenza della elettrica repulsione, riferiva lo sperimento di Volta, consistente nell'osservare, che due dischi elettrizzati omologamente, e posti fra loro a piccola distanza, si allontanano l' uno dall'altro con debole forza ; pel contrario, caricati con elettricità di natura contrarie, si attraggono assai fortemente. Promettemmo ivi, dare in appresso la spiegazione di questo fatto, a dimostrare , che il medesimo non è punto favorevole alla mancanza della elettrica repulsione. Per soddisfare alla promessa, riflettiamo che Volta riferisce l' indicato fatto dicendo , che nel medesimo l' aria circostante si elettrizza , lo che richiede un certo tempo , e perciò si ha il ritardo del movimento , quando si tratta di repulsione , la quale , secondo lo stesso fisico , sarebbe apparente, ma in realtà sarebbe l'effetto della circostante attrazione. Contro questa conseguenza osserviamo , che la induzione succede in istante; inoltre che, trattandosi di forze molto deboli, come quelle del caso in proposito, la resistenza dell' aria si fa sentire fortemente, e tanto più quanto è minore la distanza fra i due piattelli; poichè un rapido allontanamento fra i medesimi, produrrebbe di necessità una rarefazione dell'aria frapposta. Perciò questa resistenza, non può trascurarsi nella spiegazione dell' indicato fenomeno; ed il Belli esso pure in ciò si accorda (54). Questo fisico poi , nel citato luogo , assegna una seconda causa della indicata lentezza di allontanamento, dicendo « Io osservo però, che in questa lentezza, molta parte vi doveva al» tresì avere la circostanza , che toccando al piccolo peso di un grano o » poco più , a far muovere una massa di più migliaia di grani , qual' era » la massa di tutta la bilancia col disco appeso, doveva il moto riuscire per » necessità di gran lunga più lento, che quello dei gravi liberamente caden» ti ». Noi crediamo che , non è a proposito la seconda causa dal Belli quì riferita ; perchè la medesima , deve appartenere anche al caso dell' attrazione : per la qual cosa, Volta confrontò la velocità della repulsione, non già con quella dei corpi liberamente cadenti , ma con quella dell' attrazione. Il Volta , riportato da Pianciani (55) , asserisce come indicammo , che l' attrazione dei due dischi si effettua sempre con molta più energia, di quello avvenga della ripulsione loro (56). Ciò facilmente si spiega, eziandio perchè i due

(54) Corso elem. di fis. sperim. Vol. 3.° Milano 1838, p, 459, lin. 8 salendo.
(55) Istituzioni citate, t. 3.°, pag. 80, li. 3.
(56) Collezione citata, pag. 76, e 77.

dischi trovandosi caricati di elettricità opposte, queste si porteranno in maggior copia nelle superficie dei dischi le quali si riguardano; cosicchè tanto la carica, quanto la reciproca loro attrazione, crescerà ivi col diminuire la distanza fra i medesimi dischi. Se questi sieno invece caricati di elettricità omonoma, in tal caso le cariche, si accumuleranno in maggior copia nelle superficie loro che non si riguardano, lo che contribuisce a diminuire la repulsione reciproca fra essi; cioè a renderla torpida, e minore dell'attrazione, a parità di circostanze. Avviene ciò, non perchè manchi la elettrica repulsione, come pretenderebbe il Pianciani nel citato luogo; poichè la repulsione dell' elettrico per se stesso, non cessa mai, salvo nell'unico caso della elettricità *indotta*, la quale cessa onninamente di tendere, ossia di repellere se stessa, finchè rimane indotta : bensì avviene per le altre cagioni ora indicate. Non risulta se Volta prendesse in questi due casi cariche uguali : se ciò non fosse, i risultamenti delle sue sperienze, non sarebbero concludenti secondo la opinione di questo fisico. Ma per ottenere in pratica la uguaglianza delle cariche , si esiggono molte cautele.

Il fatto adunque che, nel citato sperimento, la elettrica repulsione riesce debole rispetto l' attrazione , dipende *principalmente* dall' essere la elettricità omonoma dei due piattelli, posti uno contro l'altro, distribuita in maggior copia sull' esterne superficie dei medesimi ; mentre nel caso dell'attrazione, le due elettricità eteronome, sono distribuite in maggior copia sulle interne superficie dei piattelli stessi; non già dipende il fatto medesimo dalla mancanza della elettrica repulsione: perchè questa, nell'elettrico libero, esiste realmente, come già fu dimostrato (§ 12, e § 13).

Osserveremo da ultimo, che l'aderenza fra i due piattelli, quando fossero in contatto fra loro, deve potentemente diminuire la elettrica repulsione fra essi, e sopra tutto purchè i dischi sono di metallo. Egli è vero che la forza di aderenza, si fa sentire soltanto nel contatto fisico ; ma siccome a questa posizione corrisponde anche il maggior effetto repulsivo (*); così rilevasi che l'azione prodotta dall'aderenza indicata , non è trascurabile punto riguardo alla *totale* repulsione. Supponiamo che abbiansi due sfere di coibente , caricate l'una e l' altra , una volta con elettricità omonome , un' altra con elettricità eteronome. Le cariche non potendo in questo caso cangiare per influsso la distribuzione loro , ed essendo l'una , e l' altra dello stesso valore numerico , se avvenisse, come Volta pretende, che la repulsione, propria del primo caso,

(*) Belli, Corso elem. di fis. sper. t. 3, pag. 458. — Collezione delle opere di Volta, t. 1.°, parte 2.ª, p. 68.

fosse minore dell' attrazione propria del secondo , un tal fatto sarebbe in aperta contraddizione , con una delle più fondamentali elettrostatiche leggi. Cioè il fatto supposto , si opporrebbe al principio , che tanto la repulsione fra elettricità omonome , quanto l' attrazione fra elettricità eteronome , dev' essere proporzionale al prodotto delle rispettive cariche , da cui provengono le indicate azioni. Ora siccome questa legge fu da molti, ed in particolare da Coulomb (*), verificata sperimentalmente: perciò se da una parte le nostre osservazioni convalidano il riferito fatto, da Volta osservato nei *conduttori*; dall'altra non possiamo punto dubitare, che il fatto medesimo debba spiegarsi diversamente, da come fu spiegato, prima dal Volta, e poi dal Pianciani; ma bensì debba spiegarsi, nel modo che abbiamo riferito.

L' ultima sperienza del Volta (57) , per mostrare la non esistenza della elettrica repulsione, consiste « in un filo di ferro, guarnito in ciascuna estre-
» mità da un paio di pendolini leggerissimi, che mette capo in due campane
» di vetro; l'aria di una delle quali sia stata previamente impregnata di elet-
» tricità. Osserverassi come sulla prima i pendolini involti da tal aria elet-
» trizzata, divergeranno (qual se appunto si ripellessero) e viemmaggiormente
» divergeranno, e più a lungo , ove venga a toccarsi col dito il fil di ferro
» medesimo; perciò che si dà allora maggior luogo al fluido elettrico di ri-
» tirarsi da detti pendolini; come intanto i pendolini, che stanno nell'aria non
» elettrizzata dell'altro recipiente, penderanno paralleli senza ombra di repul-
» sione; e come poi ritirato il dito, a misura che la elettricità dall'aria im-
» pregnatane si comunica ai pendolini che involge, e per essi a tutto il con-
» duttore ora isolato , i medesimi si abbasseranno sino al totale loro deca-
» dimento , mentre acquisteranno divergenza , e s' alzeranno d' altrettanto i
» pendolini dell'aria non elettrizzata. »

La sperienza ora descritta , riferita eziandio dal Pianciani (58) , per lo stesso fine, consiste in sostanza, nell'altra cognitissima di un corpo elettrizzato, che induce sopra un altro, fornito agli estremi suoi di un elettrometro. Il corpo inducente viene rappresentato dall'aria elettrizzata, contenuta nella prima campana, che chiameremo A, ed anche sulle interne pareti di essa. Toccando il corpo o filo di ferro indotto, che congiunge gli elettrometri, quello dei medesimi contenuto in A , che potrebbe ancora essere restato chiuso , quando

(*) Histoire de l'acad. roy. des scien. année 1785. p. 611, (1.°), li. 11.

(57) Collezione citata, p. 81, lin. 3 salendo.

(58) Istituzioni citate, t. 3.°, parte 1.ª, p. 80, li. 2 salendo.

esso pure avesse partecipato alla interna elettrizzazione della campana, divergerà maggiormente; poichè la elettricità libera contenuta dal filo di ferro, si sarà dispersa nel suolo, e sarà cresciuta sui fili di questo elettrometro la induzione dell'elettrico contenuto nella campana A; quindi l'elettrometro stesso, in questo particolar caso, divergerà unicamente per attrazione. Avvenuta la indicata dispersione, i pendolini dell' elettrometro, contenuto nella seconda campana B, si abbasseranno; ma in seguito, se rimarrà il filo di ferro bene isolato, i pendolini stessi dovranno col tempo, tornare a divergere, per la comunicazione della elettricità, che dalla campana A si porterà, lungo il filo di ferro, nell'altra B. Quindi continuando la sperienza, dovranno i pendolini, contenuti nella A, diminuire la loro divergenza, mentre dovranno accrescerla, sino ad un certo limite, quelli contenuti, nella B; e questi divergeranno tanto per attrazione, quanto per effetto di repulsione, ma molto più per questa. Non si vede adunque, come la sperienza indicata, possa escludere la esistenza della forza elettro–repulsiva nei pendolini, contenuti nella campana B.

Il Pianciani (61), vorrebbe conciliare la opinione di coloro, che negano la elettrica repulsione, con quelli che l'ammettono, dicendo « Senza dar tutto » e neppure le prime parti alla repulsione, anzi dando bando alla repulsione » elettrostatica in vero e stretto senso, altri fisici spiegano felicemente i vari » fenomeni, e tra questi il vicendevole allontanarsi di due corpi similmente » elettrizzati. Non si nega che l' elettrico soprabbondante (positivo), eserciti » una *pressione*, un *impulso* qual egli sia (e si chiami, se così piace, *repul-* » *sione*), sull'elettrico dagli altri corpi e lo allontani. Non si nega che le mo- » lecole dell'elettrico, allorchè sono libere, tendono a spandersi, e sembrino eser- » citar fra di loro una repulsione alla foggia dei fluidi elastici. Si pensa sol- » tanto da questi fisici, che l'attrazione fra l'elettrico, e i corpi negativi, che » tende a ristabilir l'equilibrio, basti a dare ragione di quella che dicesi re- » pulsione fra i corpi similmente elettrizzati, e che quei moti tribuiti ad un » principio repellente, provengan solo dall'attrazione verso i corpi esterni, con- » trariamente elettrizzati per iuflusso, e non avendovene altri, verso l'aria » che sta ai lati ».

In questo ragionamento si manifesta una contraddizione, perchè in esso non si vuole negare la esistenza della elettrica repulsione, cioè che l'elettrico respinga se stesso; ma in pari tempo, non si vuogliono spiegare anche con questa, gli

(61) Istituzioni fisico chimichè citate, p. 78, § 106.

allontanamenti fra loro dei corpi elettrizzati omologamente. Ciò vuol dire, che si esclude nella spiegazione di simili fatti una forza, che quantunque si ammetta, ciò nulla ostante non si vuole farla concorrere nella produzione di essi. Del resto non è vero, che tutti gli allontanamenti di cui parliamo, si possono spiegare colla sola attrazione dei corpi circostanti; poichè la sperienza da noi riportata (§ 15), offre un caso di allontanamento, senza che abbiavi attrazione veruna. E se pure tutti quei fatti, nei quali avvi allontanamento, si potessero spiegare per mezzo della sola influenza od attrazione sui corpi circostanti; già il seguire questa spiegazione, sarebbe quanto sopprimere una delle cause, che *realmente* contribuiscono a produrre l' indicato allontanamento. Qualunque fenomeno può sempre in più modi spiegarsi, ma uno solo fra questi modi è il vero, ed esso deve seguirsi esclusivamente, quando si conosca. Ora nel caso in proposito, noi conosciamo essere due le cause dell' indicato allontanamento, cioè la elettrica repulsione e la elettrica attrazione: queste cause, tranne qualche raro caso eccezionale, ambedue concorrono a produrre le divergenze, cioè gli allontanamenti fra loro, dei corpi elettrizzati omologamente; dunque ambedue si debbono far concorrere nella spiegazione dei fatti stessi, riguardando però sempre come causa principale la repulsione. Perciò sarebbe un tradire la verità naturale, far conto soltanto dell'attrazione, per ispiegare i fatti medesimi, trascurando la repulsione, di cui la esistenza reale, fu in più guise già dimostrata evidentemente.

(*Continuerà*).

COMUNICAZIONI

Dalla sig. contesssa Fiorini, fu presentata in dono la necrologia, da lei compilata, del defunto chiarissimo botanico, sig. cav. Gio. Francesco Camillo Montagne, già membro dell'accademia delle scienze dell' imperiale istituto di Francia.

CORRISPONDENZE

L' Emo. e Rmo. sig. Cardinale Altieri, protettore dell'accademia, col onorevole suo dispaccio del 9 marzo 1866, comunica l'approvazione sovrana, per la nomina dei signori De Saint-Venant, B. Dausse, e A. Le Joli a corrispondenti stranieri Lincei.

Il prof. Volpicelli, comunica una lettera del sig. De Saint-Venant, colla quale questo scienziato ringrazia l'accademia, per la nomina da esso ricevuta di corrispondente straniero linceo.

Il sig. prof. Axel Erdmann, direttore in capo degli studi geologici della Svezia, con una sua lettera, fa giungere in dono all'accademia, le prime 18 tavole della carta geologica di quel regno, accompagnate da diciotto fascicoli di schiarimenti , ed il tutto pubblicato a spese del governo svedese. Il medesimo sig. direttore fa noto il desiderio, di ricevere per l'officio delle indicate ricerche geologiche, le pubblicazioni dell'accademia nostra.

Il sig. dott. Kirschbaum, segretario della società dei Naturalisti nel ducato di Nassau, fa giungere, accompagnati da una sua lettera, gli annuari XVII e XVIII della società stessa.

COMITATO SEGRETO

Dal comitato accademico fu proposta la terna seguente :

Signori { Principe B. Boncompagni,
R. P. prof. Chelini,
Canonico D. B. prof. Tortolini.

a fine di eleggere un membro della commissione di censura, in sostituzione al prof. D. Ignazio Calandrelli defunto. I votanti essendo dieciotto, si ebbe, mediante lo squittino segreto, il risultamento che siegue :

	Voti	
	Bianchi	Neri
Boncompagni	15	3
Chelini	15	3
Tortolini	9	9

Ripetuta la votazione pei signori Chelini , e Boncompagni , quest'ultimo risultò eletto a membro della commissione di censura, colla previa approvazione sovrana.

Dal comitato accademico fu proposta, per la nomina di uno o più corrispondenti stranieri, la terna seguente :

Signori { Gius-Luigi-Fran. Bertrand,
Gio-Maria-Cost. Duhamel,
Arm-Ipo-Luigi Fizeau.

L'accademia elesse unanimemente ognuno dei tre proposti a suo corrispondente straniero, colla previa approvazione sovrana.

L'accademia riunita in numero legale a un'ora pomeridiana, si sciolse dopo due ore di seduta.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

A. cav. Coppi. — P. Sanguinetti. — E. Fiorini. — A. comm. Cialdi. — P. Volpicelli. — S. Cadet. — M. cav. Azzarelli. — G. cav. Ponzi. — B. Tortolini. — E. Rolli. — P. A. Secchi. — V. cav. Diorio. — B. Boncompagni. — D. Chelini. — F. Nardi. — M. Massimo. — L. Respighi. — C. Sereni. — L. Jacobini. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo.

Pubblicato nel 15 di novembre del 1866.
P. V.

			ERRORI	CORREZIONI
Pag. 299	lin.	3	fuoehi	fuochi
300	»	20	triangalo	triangolo
302	»	12	52°	53°
304	»	6	*salendo,* Enunciazione	— Enunciazione
312	»	12	*salendo,* dei dei	dei
314	»	5	riferisce	riferisce ivi

IMPRIMATUR

Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae
Vicesgerens.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE VI.ª DEL 6 MAGGIO 1866

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

COMUNICAZIONI

Monsignor Nardi, rese conto all'accademia, dei lavori geografici, eseguiti dall'impero russo.

Il prof. cav. Diorio, presentò un organo osseo dell'udito, appartenente alla Balenottera Roqual di Laupède, che il chiaro nostro collega dichiarò non analizzato ancora.

Il sig. principe D. Baldassarre Boncompagni, presentò in dono all'accademia, da parte del sig. Poudra, otto pubblicazioni del medesimo autore, registrate tra le opere venute in dono.

Il R. P. Chelini, presentò in dono all'accademia, da parte dell'autore sig. Hirst, una memoria di geometria superiore, tradotta in italiano dal sig. prof. Luigi Cremona.

Il prof. Volpicelli, lesse la duodecima sua comunicazione sulla elettrostatica influenza, nella quale prese ad analizzare le ricerche, fatte su questo argomento, dal fisico di Torino, sig. cav. Gilberto Govi.

CORRISPONDENZE

L' Emo. e Rmo. sig. Cardinale Altieri, protettore dell'accademia, coll' onorevole suo dispaccio del 18 aprile 1866, n.° 4312, fa noto alla medesima, che Sua Santità degnossi approvare la elezione dei signori Gius. Bertrand, Gio. Duhamel, e Armando Fizeau a suoi corrispondenti stranieri lincei.

Il medesimo Porporato, col suo pregevole dispaccio del 21 aprile 1866, n.° 4314, comunicò all'accademia l'approvazione sovrana, per la elezione del sig. principe D. Baldassarre Boncompagni, a membro della commissione di censura.

Lo stesso Eminentissimo, coll'onorevole suo dispaccio del 9 maggio 1866, n.° 4318, rende consapevole l'accademia, che la S. Congregazione degli studi, trovò regolare la gestione amministrativa dei Lincei pel 1865, e che la munì della sua superioriore approvazione.

Il sig. prof. Antonio Villa, fa conoscere all'accademia, di avere ricevuto regolarmente i suoi atti, e nel tempo stesso fa giungere in dono alla medesima parecchie sue scientifiche pubblicazioni, registrate nell'elenco delle opere venute in dono.

Il sig. B. Dausse ringrazia l' accademia per averlo nominato fra i settanta suoi corrispondenti stranieri.

La R. accademia di Amsterdam, invia due copie del programma di concorso ad un premio, per un componimento poetico in latino.

La R. università di Norvegia in Cristiania, invia parecchie sue pubblicazioni, le quali si trovano registrate nell'elenco delle opere venute in dono, e ringrazia per gli Atti de' Nuovi Lincei da essa ricevuti.

L'accademia delle scienze dell' istituto di Bologna, mediante il suo segretario perpetuo, sig. cav. D. Piani, ringrazia per lo stesso motivo.

La R. Società delle scienze di Danimarca, fa giungere un esemplare del programma delle quistioni, da essa proposte nell'anno 1866, con promessa di premio, relative alla matematica, alla fisica, ed alla storia.

L'accademia riunita in numero legale a un'ora pomeridiana, si sciolse dopo due ore di seduta.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

G. cav. Ponzi. — A. Coppi. — P. Sanguinetti. — B. monsignor Tortolini. — M. cav. Azzarelli. — V. cav. Diorio. — E. Rolli. — P. A. Secchi. — M. duca Massimo. — D. Chelini. — L. Jacobini. — F. monsignor Nardi. — L. cav. Respighi. — P. Volpicelli. — C. comm. Sereni. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo.

Pubblicato nel 15 di dicembre del 1866.
P. V.

OPERE VENUTE IN DONO

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. — Serie II.ª Tomo V, fasc. 2.°

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. — Serie 2.ª Tomo XXI. Torino 1865; un vol. in 4.° gr.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, pubblicati dagli accademici segretari delle due classi. Vol. 1.°; disp. 1.ª e 2.ª 1866.

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Anno V, fasc. 2.° e 3.°, del 1866.

Sulle linee iseoriche della penisola italiana, e su taluni altri problemi, risguardanti la distribuzione della temperatura in Italia. Memoria del prof. Domenico Ragona. Modena 1866.

Sulla latitudine del R. Osservatorio di Modena, del prof. suddetto. Modena 1866.

Bullettino Meteorologico del R. OSSERVATORIO DI MODENA, *con corrispondenze, e notizie, risguardanti la Provincia.* Anno 1.° n. 1, 2, 3, 1865-66.

Sui Curculioniti dell'Agro Pavese, enumerati dal dott. Prada. Relazione letta nella seduta 18 *dicembre* 1859, *della Società Geologica di Milano, dal socio fondatore* ANTONIO VILLA. Milano, 1860.

Le Zanzare. Articolo del MEDESIMO. Milano 1860.

Gli Inocerami o Catilli della Brienza; del MEDESIMO. Milano 1860.

Intorno alle stelle filanti periodiche del 10 *agosto* 1863. *Lettera di Caterina Scarpellini al sig. prof.* ANTONIO VILLA *di Milano.* — Milano 1863.

Sulla originaria formazione delle acque oceaniche, e loro salsedine. Memoria di Roberto Sara, dedicata agli egregi naturalisti fratelli ANTONIO, *e* GIO. BATTISTA VILLA *di Milano.* — Milano 1864.

Il Congresso dei naturalisti svizzeri in Samaden, nell'agosto 1863. *Relazione di A.* VILLA. Milano 1864.

Prima riunione straordinaria della Società di scienze naturali, tenutasi in Biela nel settembre 1864. *Relazione del* MEDESIMO. Milano 1864.

Le Farfalle. Memoria del MEDESIMO. Milano 1865.

Le Cantaridi. Nota del MEDESIMO. Milano 1864.

Circolare della gerenza della Società Nazionale di miniere in Lombardia, ed altrove ec. del MEDESIMO. Lecco 1865.

Notizie sulle torbe della Brianza di G. B. VILLA. Milano 1864.

Psicologia empirica ad uso de' ginnasi superiori del dott. R. Zimmermann, ridotta ad uso degli italiani, per cura del dott. L. C. PAVISSICH. Trieste 1864.

Il Ricoglitore triestino. Annuario pedagogico pel 1864, *del* MEDESIMO.

La morte di Monsig. Dionigi-Augusto Affre, arcivescovo di Parigi. Carme di Adolfo René, volgarizzato dal MEDESIMO. 1850.

Cinque Salmi Davidici, volgarizzati e commentati dal MEDESIMO. 1850.

Della vita del Generale Nicolò Mastrovich dalmata. Cenni del MEDESIMO. Vienna 1852.

Prologo di Federico Halm, declamato nel teatro di corte, la sera del 20 *agosto, allorchè l'auspicatissimo nascimento si celebrava di Sua Altezza Imperiale l'Arciduca Rodolfo, Principe ereditario di Austria. Versione dal tedesco del* MEDESIMO. Vienna 1858.

Milly — Armonia d' Alfonso De Lamartine. Versione del MEDESIMO. Trieste 1866.

Catalogo di Diatomee, raccolte nella Val Intrasca, dall'abb. Francesco Castracane *degli* Antelminelli. Genova, 1866.

Iahrbücher . . . . *Annuario della* Societa' *di* Storia naturale nel Ducato di Nassau, dell'Anno 1862-63.

Kärntnerischer . . . . *Calendario popolare di Kärnten, pel* 1861.

Beiträge . . . . *Nota sopra la Grammatica latina di L. C. M.* Aubert *di Cristiania*; 1856.

Observations . . . . . *Osservazioni sui fenomeni di erosione in Norvegia, per J. C.* Hörbye. Cristiania 1857.

Quelques . . . . . *Alcune osservazioni di Morfologia vegetale al Giardino botanico di Cristiania, per I. M.* Norman. Cristiania 1857.

Inversio Vesicae urinariae, luxationes femorum congenitae etc. of Lektor *Voss*. Cristiania 1857.

Studio dell'azione assorbente, che i corpi diafani colorati esercitano sui raggi dello spettro luminoso; del cav. prof. G. Govi. Torino 1864.

Intorno agli specchi magici dei Cinesi; del medesimo. Torino 1864.

Nuovo metodo sperimentale, atto a dimostrare i fenomeni della induzione elettrica; del med. Torino 1865.

Sull' efficacia delle grandi aperture nei microscopi composti. Considerazioni del medesimo. Torino 1865.

Studi di elettrostatica, e condensazione delle armature liquide nei coibenti armati; del medesimo. Torino 1866.

Ricerche d'elettrostatica; del medesimo. Torino 1866.

Sveriges . . . . *Prime* 18 *Tavole della carta geologica di Svezia; del dott. A.* Erdemann. Stockholm 1865.

Sveriges . . . . *Fascicoli* 18 *di schiarimenti alle Tavole suddette.*

Proceedings . . . . *Bullettino della* Societa' filosofica americana in Filadelfia. Vol. X, num. 73.

American. . . . . . . *Rivista letteraria americana, ed orientale di Trübner*; Num. 9, 1865.

Comptes. . . . . *Conti resi dell'*Accademia delle Scienze dell' Imperiale Istituto di Francia, in corrente.

*Bullettino Meteorologico dell'*Osservatorio del Collegio Romano, in corrente.

Bidrag . . . . . *Supplemento alla cognizione sulla fauna littorale del mediterraneo. Osservazioni fatte in Italia, da M.* Sars *nel* 1852 *e* 53.

Norges . . . . *Storia della Norvegia di P. A.* Munch. Cristiania 1858.

Forhandlinger . . . . . *Atti della settima adunanza dei naturalisti scandinavi in Cristiania del 12-18 luglio 1856.*

Oeuvres . . . . *Opere di Desargues, riunite ed analizzate dal sig.* POUDRA, *con biografia.* Tom. 2, Parigi.

Histoire . . . . *Istoria della prospettiva antica e moderna; del sig.* POUDRA. Parigi, 1864, un vol. in 8.°

Examen . . . . *Esame critico del trattato di prospettiva lineare del sig. De la Gournerie, per il sig.* POUDRA. Parigi 1859.

Perspective . . . . *Prospettiva-rilievo, del sig.* POUDRA. Parigi 1866.

Théorie . . . . *Teorica generale dei fasci e delle involuzioni, con le applicazioni alle tracce delle curve di differenti ordini; del* MEDESIMO. Parigi 1865.

Memoire . . . . *Memoria su i trigoni, tetragoni, esagoni; del* MEDESIMO. Parigi 1865.

Des réticules . . . . *Delle reticelle; del* MEDESIMO. Parigi 1865.

Construction . . . . *Nuova costruzione delle sezioni coniche, per la prospettiva di un circolo, dando di seguito il centro, i diametri coniugati, gli assi della curva; del* MEDESIMO.

Almanacco marittimo per l' anno bisestile 1848 , *pubblicato in Ancona dal Capitano* GIOVANNI GIACCHETTI. Anno I.

Il Piloto in altura , o sia la teorica, e la pratica della navigazione , esposta dal MEDESIMO. Vol. 2. Roma 1855.

Ricordi di un viaggio in Oriente di monsig. Francesco Nardi, pubblicati per le felici nozze del Conte Cesare Meniconi Bracceschi , guardia nobile di SUA SANTITA', *colla Contessa Maddalena Savorgnan di Brazzà.* Roma 1866.

Notions . . . . . *Nozioni degli antichi sulle maree, ed i canali, pel sig. F-H.* MARTIN. Caen, 1866; un fasc. in 8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

SESSIONE VII.ª DEL 3 GIUGNO 1866

PRESIDENZA DEL SIG. COM. N. PROF. CAVALIERI SAN BERTOLO

MEMORIE E COMUNICAZIONI

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

INTRODUCTION AU CALCUL GÔBARÎ ET HAWÂÏ — Traité d' arithmétique traduit de l' arabe par FRANÇOIS WOEPCKE, et précédé d'une notice de M. ARISTIDE MARRE sur un manuscrit possédé par M. CHASLES membre de l' Institut impérial de France (Académie des sciences), et contenant le texte arabe de ce traité.

AVVERTIMENTO

Nelle carte 86ª, *verso* — 96ª, *verso*, numerate ne'margini superiori de'*recto* coi numeri 86—96, d'un codice manoscritto ora posseduto dal Sig. Michele Chasles, membro dell'Istituto Imperiale di Francia (Accademia delle Scienze), e da lui conservato in Parigi nella sua abitazione (3, rue du Bac, Passage Sainte-Marie), trovasi un esemplare d'un trattato d'aritmetica in lingua araba, che nella prima linea del *recto* della prima di tali carte è intitolato

« مُقَدِّمَةٌ فِى ٱلْحِسَابِ ٱلْغُبَارِي وَٱلْهَوَاي »,

cioè:

« Introduzione al calcolo Gobari e Hawai ». (1)

Nelle carte 5ª—21ª, numerate ne'margini superiori de'*recto* coi numeri 5—21, d'un manoscritto ora da me posseduto, e contrassegnato «n.° 389», trovansi 1.° una traduzione del trattato medesimo fatta dall'illustre e compianto Francesco Woepcke, la qual traduzione nel *recto* della carta 4ª, numerata 4, del manoscritto stesso è intitolata: « Traduction faite par M.r Woepcke || et revue par lui, d'après un » MS. Arabe || de l'*Introduction au Calcul Gobârî || et Hawâï* »; 2.° 75 note del medesimo traduttore a questa versione; 3.° una sua giunta intitolata « ADDITION » alla traduzione stessa. Questa traduzione, queste note e questa giunta sono stampate più oltre nelle pagine 365—383 del presente volume (2).

Il suddetto codice del Sig. Chasles è un volume, in 4.° piccolo, alto 178 millimetri, largo 135, composto di 129 carte cartacee, numerate ne'margini superiori de'*recto* coi numeri 1—129. Questo codice è legato in cuoio scuro, con ornati a secco sulla parte esterna di ciascuna coperta. Sul dorso del codice stesso è incollato un cartellino rettangolare nel quale è scritto a penna:

« Traités d'Astro-||nomie || f.° 97 Calendrier || Egyptien || 117. les cent || regents ».

In un cartellino rettangolare incollato nella parte interna del primo de'due cartoni della legatura di questo codice, cioè in quello de'due cartoni medesimi ch'è a destra del lettore, è scritto

« Plusieurs traités relatifs à l'astronomie, le || 1.er manière de placer le fil d'aplomb sur || la ligne méridienne. || Le der-» nier, calendrier Egyptien. »

In un cartellino incollato sulla parte esterna del secondo cartone della legatura del codice stesso, è stampato ciò che si riporta più oltre nelle linee 50—54 della presente pagina 360. Nel codice medesimo sono inserite tre strisce di carta, in una delle quali è scritto « 419 », in un'altra « 379 », e nella terza «74». Importanti notizie intorno a questo codice sono date dal Sig. Aristide Marre in un suo scritto stampato più oltre nelle pagine 362—364 del presente volume (3).

Il mio precitato manoscritto, contrassegnato « n.° 389 », è composto di 349 carte, in 4.°, numerate col *lapis* ne' margini superiori de' *recto* coi numeri 1—349. Questo manoscritto, alto 329 millimetri, e largo 215, è legato in cartone coperto internamente di carta bianca ed esternamente di carta colorita a marmo, con dorso e punte di marrocchino rosso. Sul dorso di questa legatura è impresso in oro: « SCRITTI || VARI || DI F. WOEPCKE ».

La Biblioteca Corsiniana di Roma possiede un esemplare contrassegnato « T. A. 119 », cioè « Ban-» cone T, Sezione A, numero 119 progressivo dei volumi ora collocati in questa sezione », d'un catalogo. in 8.°, intitolato « CATALOGUE || DES || LIVRES ORIENTAUX || IMPRIMÉS ET MANUSCRITS || PROVE-» NANT DE LA BIBLIOTHÈQUE || DE M. LE MARQUIS DE L. F. S. || Membre de la Société asiatique; || Dont » la vente se fera le lundi 20 février 1854 et jours || suivants, à 7 heures précises de relevée, || RUE » DES BONS-ENFANTS, 28, || Par le ministère de Me FOURNEL, commissaire-priseur, || rue de la Chaise, » S. || PARIS || J. F. DELION, LIBRAIRE || Quai des Augustins, 47. || BENJ. DUPRAT, LIBRAIRE, || Rue du Cloî-» tre — St — Benoît, 7. || 1854 ». Questo catalogo è composto di 92 pagine, in 8.°, delle quali le 1ª—5ª, 8ª, 9ª, 89ª non sono numerate, e le 6ª, 7ª, 10ª—88ª, 90ª—92ª sono numerate coi numeri VI, VII, 2—80, 82—84. Nelle linee 10—14 della 74ª di queste 92 pagine, numerata col numero 66, si legge:

« 419. Plusieurs traités relatifs à l'astronomie; Ma-
» nière de placer le fil à plomb sur la ligne méri-
» dienne ; Calendrier égyptien ; Traité d'arithmé-
» tique. In-8, cart.
» 129 feuillets. »

In questo passo del suddetto catalogo intitolato « CATALOGUE || DES || LIVRES ORIENTAUX », ecc. è descritto il precitato codice del Sig. Chasles; il che è dimostrato 1.° dal trovarsi stampato, come si è detto di sopra (linee 30—31 della presente pagina 360), il passo medesimo in un cartellino incollato sulla parte esterna del primo cartone di questo codice; 2.° dall'essere scritto il numero 419 nella prima delle tre strisce di carta citate di sopra (linea 32 della pagina medesima).

15 Decembre 1866.

B. BONCOMPAGNI

(1) Vedi più oltre, pag. 365, lin. 1—3.

(2) In una lettera a me diretta dal Sig. Francesco Woepcke, in data di «Paris, rue Notre Dame des Champs, 30 ce 14 décembre 1854», egli dice che la traduzione suddetta era stata da lui offerta al Sig. Chasles, e che il Sig. Chasles erasi compiaciuto di accettarla.

(3) Debbo dichiararmi gratissimo ai detti Signori Marre e Chasles della compiacenza che il primo ha avuto di comporre il precitato suo scritto, ed il secondo di rimettere il precitato codice da lui posseduto allo stesso Sig. Marre, affinchè nello scritto medesimo potesse darne una esatta descrizione.

AVERTISSEMENT

Dans les feuillets 86e, *verso* — 96e, *verso*, numérotés dans les marges supérieures des *rectos* avec les numéros 86—96, d' un manuscrit actuellement possédé par M. Michel Chasles, membre de l'Institut Impérial de France (Académie des Sciences), et qu'il conserve chez lui à Paris (3, rue du Bac, Passage Sainte-Marie), se trouve un exemplaire d'un traité d'arithmétique en langue arabe, qui dans la première ligne du *recto* du premier de ces feuillets est intitulé

« مقدمة فى الحساب الغباري والهواي »

c'est-à-dire :

« Introduction au calcul Gobârî et Hawâî ». (1)

Dans les feuillets 5e—21e, numérotés dans les marges supérieures des *recto* avec les chiffres 5—21, d' un manuscrit actuellement possédé par moi, et coté « n.° 389 », se trouvent 1.° une traduction du même traité, faite par l'illustre et regrettable M.r François Woepcke, traduction qui dans le *recto* du 4e feuillet, numéroté 4, du même manuscrit est intitulée: « Traduction faite par M.r Woepcke || et revue par » lui, d'après un MS. Arabe || de l'*Introduction au Calcul Gobârî* || *et Hawâï* »; 2.° 75 notes du même traducteur à cette version: 3.° une addition faite aussi par lui à la même traduction. Cette traduction, ces notes et cette addition sont imprimées ci-après dans les pages 365—383 de ce volume (2).

Le manuscrit ci-dessus mentionné de M. Chasles est un volume, petit in-4to, de 178 millimètres de hauteur, et 135 de largeur, composé de 129 feuillets en papier, numérotés dans les marges supérieures des *rectos* avec le numéros 1—129. Ce manuscrit est relié en cuir brun acajou, avec des gaufrures sur les plats. Sur le dos de manuscrit est collé un carré de papier qui porte le titre suivant écrit à la plume :

« Traités d'Astro-||nomie || f.° 97 Calendrier || Égyptien || 117. les cent || regents ».

Sur un carré de papier collé la partie intérieure du premier des deux cartons de la reliure de ce manuscrit, c'est-à-dire de celui de ces deux cartons qui est à la droite du lecteur, on trouve écrit:

« Plusieurs traités relatifs à l'astronomie, le || 1.er manière de placer le fil d'aplomb sur || la ligne méridienne. || Le » dernier, calendrier Egyptien. »

Sur un carré de papier collé sur la partie extérieure du second carton de la reliure de ce manuscrit, se trouve imprimé ce qu'on rapporte, ci-après dans les lignes 47—51 de la présente page 361. Dans le même manuscrit sont insérées trois fiches volantes, sur l' une desquelles est écrit « 419 », sur une autre « 379 », et sur la troisième « 74 ». Des renseignements importants sur ce manuscrit sont donnés par M. Aristide Marre dans un écrit imprimé ci-après dans les pages 362—364 de ce volume (3).

Le manuscrit cité ci-dessus, coté « n.° 389 », se compose de 349 feuillets, numérotés au crayon dans les marges supérieures des *rectos* avec les numéros 1—349. Ce manuscrit, ayant 329 millimètres de hauteur et 215 de largeur, est relié en carton couvert intérieurement en papier blanc, et extérieurement en papier marbré, avec dos et pointes en maroquin rouge. Sur le dos de cette reliure est imprimé en or: « SCRITTI || VARI || DI F. WOEPCKE ».

La Bibliothèque Corsinienne de Rome possède un exemplaire coté « T. A. 119 », c'est-à-dire « Banc T, Section A, numéro 119 progressif des volumes actuellement placés dans cette section », d'un catalogue, in-8vo, intitulé « CATALOGUE || DES || LIVRES ORIENTAUX || IMPRIMÉS ET MANUSCRITS || » PROVENANT DE LA BIBLIOTHÈQUE || DE M. LE MARQUIS DE L. F. S. || Membre da la Société asiati » que; || Dont la vente se fera le lundi 20 février 1854 et jours || suivants, à 7 heures précises de re» levée, || RUE DES BONS-ENFANTS, 28, || Par le ministère de Me FOURNEL, commissaire-priseur, || rue » de la Chaise, 8. || PARIS || J. F. DELION, LIBRAIRE || Quai des Augustins, 47. || BENJ. DUPRAT, LIBRAI» RE, || Rue du Cloître—St—Benoît, 7. || 1854 ». Ce catalogue est composé de 92 pages, in-8.°, dont les 1e—5e, 8e, 9e, 89e ne sont pas numérotées, et les 6e, 7e, 10e—88e, 90e—92e sont numérotées avec les numéros VI, VII, 2—80, 82—84. Dans les lignes 10—14 de la 74e de ces 92 pages, numérotée avec le numéro 66, on lit :

« 419. Plusieurs traités relatifs à l'astronomie ; Ma» nière de placer le fil à plomb sur la ligne méri» dienne; Calendrier égyptien; Traité d' arithmé» tique. In-8, cart.

« 129 feuillets. »

Dans ce passage du catalogue ci-dessus mentionné intitulé « CATALOGUE || DES || LIVRES ORIENTAUX », ecc. est décrit le manuscrit cité ci-dessus de M. Chasles. Cela résulte 1.° de ce que le même passage se trouve imprimé, comme on l'a dit ci-dessus (lignes 26—27 de la présente page 361) dans un carré de papier collé sur le premier carton de la reliure de ce manuscrit; 2.° de ce que l'on trouve écrit le numéro 419 dans la première des trois fiches volantes citées ci-dessus (ligne 28 de la même page).

15 Décembre 1866.

B. BONCOMPAGNI

---

(1) Voyez ci-après, page 365, lig. 1—3.

(2) Dans une lettre adressée à moi par M. Woepcke en date de « Paris, rue Notre Dame des Champs, 30 ce 14 décem» cembre 1854 » il dit qu'il avait offert à M. Chasles la traduction citée ci-dessus, et que M. Chasles avait bien voulu l'accepter.

(3) Je doi me déclarer très obligé à MM.rs Marre et Chasles de la complaisance que le premier a eu de rédiger son écrit cité ci-dessus, et le second de remettre le manuscrit ci-dessus mentionné possédé par lui à M. Marre, afin qu'il pût en donner dans le même écrit une description exacte.

SUR UN MANUSCRIT ARABE

POSSÉDÉ PAR M. CHASLES

MEMBRE DE L' INSTITUT IMPÉRIAL (ACADÉMIE DES SCIENCES) DE FRANCE,

ET CONTENANT

PLUSIEURS TRAITÉS D'ASTRONOMIE ET UN TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE,

NOTICE

DE M. ARISTIDE MARRE.

Le petit traité d' arithmétique traduit par M. Woepcke d'illustre et régrettable mémoire , fait partie d'un manuscrit arabe qui appartient présentement au savant géomètre, M. Chasles de l'Institut de France. Ce manuscrit figurait sous le N.° 419 au catalogue de la vente des livres et manuscrits orientaux du marquis de La Ferté-Senneterre, (Paris, 16 février 1854), et son contenu était sommairement indiqué dans les termes suivants : « Plusieurs traités relatifs à l'astronomie; Manière de pla- » cer le fil à plomb sur le ligne méridienne; Calendrier égyptien; Traité d' arithmétique. In-8, cart. » 129 feuillets. » Nous allons tâcher d'en donner une description plus détaillée et plus complète.

Ce manuscrit est relié en carton, recouvert d' un cuir brun-acajou , avec encadrement et rosace au centre. Le volume est en assez mauvais état de conservation , il renferme 129 feuillets longs de 18 centimètres sur 13 de largeur, en partie décousus, d'un papier épais, dont la couleur varie du blanc-grisâtre au jaune-brun le plus foncé. Sur le dos se trouve collé un petit morceau de papier sur lequel on lit : « Traités d'astro|nomie f.° 97 Calendrier | égyptien | f.° 117 les cent | régents. | » Il n'y a pas de feuillet de garde.

Du 1.er feuillet, première ligne du *verso,* au milieu du *verso* du 30.e feuillet se développe le premier traité. Il est intitulé : *Ressâleh fy ma'refeh ouadda' el kheytt aala' khatt nousf-én-nahâr ou 'l issemmey kheytt el messâ tereh* (?) — (Dissertation sur la connaissance de la manière de placer sur la ligne méridienne, le fil qui est nommé fil à plomb). Au haut du *recto* du 1.er feuillet, dans l'angle à gauche, on lit *: Min Kâtib el fakir Khalil el Kâmali,* (par l'écrivain, le pauvre Khalil el Kâmali). Au feuillet 22, *recto,* on remarque un chapitre intitulé : *Bâb fy ma'refeh nassb el Kheytt oua ressem Khettout fadhel el dâir by târyk sahel min ghayr hissâb* — (Chapitre sur la connaissance de l' érection de la ligne (fil à plomb), et tracé des lignes *fadhel el dâir* par un procédé facile et sans calcul) — lequel a été transcrit de la dissertation de notre seigneur le cheykh, le docteur Bedr' ed-din el Mardiny.

Avec le feuillet 31, commence un second traité écrit d' une autre main que le premier, sur un papier de couleur différente, avec 15 lignes à la page au lieu de 13, et entre des marges plus étroites. — *Bism'illah al rahman al rahim. El hamd Allah ou salouât aâlä Mohammed kheyr khalqah ou âhl-ho ou Saheb-ho edjmaïn.* — (Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! Louange à Dieu et prière à Dieu pour Mohammed, la meilleure de ses créatures, pour sa famille et tous ses compagnons!) L'auteur continue ainsi : *Ammâ-baad fé hadeh ressâleh mokhtesseréh semmeyt-hâ tahfet el aâmîl bi'l rouba el kâmel.* — (Ensuite cela est une dissertation abrégée que j'ai nommée le don précieux de l'opérateur par le quadrant.) Il finit à la cinquième ligne du *recto* du feuillet 34, et porte la date de 888 de l'hégire.

Du feuillet 34, *verso,* au feuillet 44 , c'est le même Kâtib qui a dû tenir le Kalam. Le feuillet 34 commence par ces mots : « *Kâl el cheykh Chehâb Eddin Ahmed ben Al Mohdy rahmet Allah taala ou' el Moslemin sellam. Bism 'illah al rahman al rahim. El hamd li-Llah oudhed ou selâ Allah si-*

dnâ Mohammed ou ahl-ho ou saheb-ho. — (Le Cheykh Chehâb Eddin Ahmed ben Al Mohdy a dit: Que la miséricorde du Dieu très-haut et le salut soient sur les enfants de l'Islâm! Au nom de Dieu clément et miséricordieux! Louange à Dieu l'unique! Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons!) — Ce petit traité astronomique débute par une section sur le calendrier du Soleil, *Fasl fy tekouym ec'chems*, il va jusqu'au feuillet 43 inclusivement.

Au feuillet 44, c'est un autre petit traité, moins bien écrit que les précédents. La première ligne contient l'invocation ordinaire : *Bism'illah al rhaman al rahim ou selâ Allah aalä Sidnâ Mohammed!* — (Au nom de Dieu clément et miséricordieux! que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed!) — La deuxième ligne nous donne les titres et qualités de l'auteur : *Kâl el cheykh el imâm el ââlem elalâmah* — (Le cheykh, l'imâm, le savant docteur) — la troisième ligne nous donne son nom : *Bedr 'eddin Hassan el Thaïby. Loutf' Allah bi ho âmin.* (Que la bénignité de Dieu soit sur lui! Ainsi soit-il!) — A la sixième ligne on lit : *Ou-baad fé hadeh ressâleh fy âmel elahelleh bi târyk el djedaoul ou el hissâb mokhtessereh.* — (Et ensuite ceci est une dissertation sur l'opération du croissant de la lune, au moyen des tables et d'un calcul abrégé.) Un peu plus loin Bedr'eddin Hassan el Thaïby, parlant de son œuvre, la qualifie d'élégant abrégé propre à ceux qui débutent dans la carrière astronomique; il dit qu'il l'a faite pour donner satisfaction aux désirs de ses amis, et qu'elle ne renferme aucun développement inutile. Le *verso* du feuillet 47 est entièrement rempli par une double table ou djedoul; la première est intitulée: *Djedoul a'rdd el Kamara fy el chemal* (Table de la latitude de la lune dans le nord), et la seconde : *Djedoul a'rdd el Kamara fy el djenoub* (Table de la latitude de la lune dans le Sud.) Par inadvertance le Kâtib ou copiste a écrit cette table à l'envers. La page suivante qui forme le *recto* du feuillet 48, et intitulée : *Djedoul el menazel el qamaryyeh* (Table des habitations ou mansions lunaires). Ces tables finissent avec le 49.e feuillet.

Au feuillet 50, *recto*, l'on rencontre, écrite par une autre main, une courte notice sur la connaissance des éclipses de soleil, par El Ilkhâny. Voici les termes mêmes du texte: « *Fassl fy ma'refeh Koussouf éch-chems min el Ilkhâny meschrou'h bi'l araby.* » (Section sur la connaissance des éclipses de soleil par El Ilkhâny, célèbre chez les Arabes). Cette brève notice se termine au bas du *verso* du feuillet 51.

Au feuillet 52, *verso*, nouvelle petite dissertation en douze chapitres, de quelques lignes seulement chacun. *Bism'illah el rhaman el rahim. El ressâleh el âfâqyeh fy el a'mel bi'lchebet el sittinyeh* (Au nom de Dieu clément et miséricordieux! Dissertation séparée sur l'opération par les rapports sexagésimaux). *El bab el aouel, fy et dharb ou'el qesmeh.* (Le chapitre premier, sur la multiplication et la division.) Les deux dernières lignes du *verso* du feuillet 54 et la première ligne du feuillet 55 nous offrent un nom et une date, le nom du Kâtib et la date de la fin de son travail : « *Ou Allah tamt el ressâleh el mobârekeh aalä yd el fakyr Mohammed el Kateby nehâr el ethneïn khams achryn chahar ssafar el kheyr senet* 955 *li hedjrah.* (Et Dieu a mis fin à la dissertation bénie par la main du fakyr Mohammed el Kateby le lundi, 25.e jour du mois de safar l'heureux en l'année 955 de l'hégire.)

Feuillet 56, *recto*; cette page porte en marge la date 911 de l'hégire. C'est le commencement d'un autre petit traité astronomique, bien calligraphié, en caractères nets, fermes, d'une écriture fine et serrée. Le titre : *Faouâyd hissâbieh* (avantages du calcul) est écrit à l'encre bleue « *Bâb fy mareféh irtifâ semitt el Kabaléh bi'lhissâb* (Chapitre sur la connaissance de la hauteur du zénith par le calcul). Le mot *bâb* est écrit à l'encre rouge, le reste à l'encre noire. Cet opuscule finit avec le feuillet 65.

Le feuillet 66, *recto*, comprend une table ou djedoul, écrite en caractères rouges, jaunes et verts, divisée en douze colonnes, dont huit ont été laissées en blanc, et quatre ont été remplies. Ces dernières sont celles ayant pour en-tête le mot *el a'ded* (le nombre). Au *verso* de ce même feuillet, on lit : « *Bism'illah al rahman al rahim ou'selâ Allah aalä sidnâ Mohammed ou ahl-ho ou saheb-ho edjmaïn* — *Fy ma'refeh târyk el a'mel bi hada el-djedaoul.* » (Au nom de Dieu clément et miséricordieux! Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Mohammed, sur sa famille et sur tous ses compagnons! Sur la connaissance de la marche à suivre pour opérer avec ces tables.) L'explication de l'emploi de cette première table est suivie d'autres tableaux synoptiques, relatifs au Cancer, au Bélier et au Capricorne, qui comprennent deux pages en regard l'une de l'autre, *verso* du feuillet 67 et *recto* du feuillet 68, contenant chacune douze colonnes; les trois pages de texte explicatif qui viennent après ces tables sont couvertes de notes marginales.

Du feuillet 70 au feuillet 85, on ne compte pas moins de 8 pages de tables astronomiques, *Dicdaoul el bessaïtt*. Les tables des feuillets 78 et 79 sont sur papier brun. Au *verso* du feuillet 77, on retrouve le nom déjà connu de l'auteur : le cheykh Bedr'eddin el Mardiny. La première section du texte qui accompagne ces table est intitulée : *Fassl fy ressem qous el a'ssr* (Section sur le tracé de l'arc de 3 heures après-midi). Le texte s'arrête avec la 13.e ligne du *recto* du feuillet 78, puis viennent trois pages des tables; la première table est divisée en onze colonnes, la seconde en dix, quant à la troisième elle est divisée en trois parties principales, qui sont subdivisées chacune en cinq colonnes. La première tranche ou partie principale à droite, est affectée an Cancer; la tranche du milieu au Bélier, et celle de gauche au Capricorne. Les tables des feuillets 81, 82, 83 *recto*, sont relatives aux mêmes signes du zodiaque, elle sont divisées chacune en douze colonnes verticales. La partie du texte qui suit, fournit le nom de l'auteur : *le cheykh, l'imâm, le savant docteur Moheb Eddin Mohammed ben Mohammed ben Ahmed ben Ahmed ben Al Attar* , et le dernier mot fait connaître la date : 905 de l'hégire. Ce mot est à la 4.e ligne du *verso* du feuillet 85; car ce qui vient à la suite est une addition faite par quelque tâleb, possesseur du manuscrit ou tout au moins de cette portion du manuscrit, propriété actuelle de M. Chasles.

Nous arrivons au feuillet 86, c'est-à-dire au petit traité d'arithmétique traduit en français par M. Woepcke, et en le parcourant rapidement nous parvenons à la fin du feuillet 96.

Du feuillet 97 au feuillet 101, c' est une notice sur l'année et les douze mois Cophtes, que l'auteur passe successivement en revue à partir de Septembre (*toutt*), après l'invocation : Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Louange à Dieu, créateur de le nuit et du jour ! On serait tenté de croire que ce mince cahier a appartenu primitivement à un autre Recueil de traités que celui dont il se trouve faire partie maintenant. Il finit avec le feuillet 101.

Feuillet 102. — La première ligne de ce nouveau traité débute ainsi : « Et si tu veux, multiplie le sinus *el ârdh* par le sinus *fadhl el daïreh*, et ce qui en résulte, divise-le par le sinus tout entier. » Il y a là évidemment une lacune, et si l'on considère que ce traité, qui se termine avec le feuillet 113, renferme trois chapitres dont le 3.e ne compte pas moins de 12 pages et le second 11, on peut admettre qu'il manque ici environ 10 pages, car du 1.er chapitre le manuscrit ne contient qu'une page, et c'est la dernière. Le 2.e chapitre renferme deux petites tables intercalées dans le texte; la 1.ère est intitulée : *Djedoul el semitt ou qous el a'ssr* (Table du zénith et de l'arc de 3 heures après-midi); la 2.e est relative au Cancer, au Bélier et au Capricorne. Plus loin, feuillet 107 , l'auteur donne le moyen de trouver par le calcul la hauteur méridienne du Soleil. Le 3.e chapitre, f.° 108, traite des déclinaisons du soleil; il renferme un petit djedoul intercalé dans le texte, divisé en quatre colonnes, en regard duquel, entre autres mentions, on rencontre celle de la hauteur du pôle.

Feillets 114 et 115. Le *recto* du f.° 114 est consacré par Amed ben Omar ben Ismaïl ben Mohammed ben Abou Beqr El Ssoufy à l'explication de deux djedaoul ou tables du Cancer, du Bélier et du Capricorne. Le *verso* du f.° 115 a été laissé en blanc.

Le f.° 116 est en blanc, c'est le feuillet de garde d'un mince cahier, l'unique *sui generis* dans tout le volume; ce n' est plus en effet un traité sur une branche quelconque de l'astronomie ou des mathématiques, c'est un opuscule grammatical du cheykh Abd el Kâhir ben Mohammed ben Abd el Rahman ben Mohammed El Djardjâny. Il a pour titre : *Ketâb aouâmil el mayeh el Djardjâny*. (Livre des cent régissants (termes on locutions qui en régissent ou gouvernent d'autres) de El Djardjâny). Il finit avec le *recto* du feuillet 120.

Au *verso* de ce même feuillet 120, c'est encore une nouvelle et dernière pièce astronomique, écrite par le savant, le vertueux Ibn Machouyeh sur les quatre saisons de l'année et leurs divisions d'après la constellations correspondantes. Elle se termine au feuillet 128.

Le f.° 129 peut être considéré comme le feuillet de garde de clôture du volume tout entier; on y trouve griffonnés onze noms avec onze dates au-dessous de chacun d'eux. Il est supposable que ce sont les noms des étudiants qui, des premiers, ont mis à profit les diverses pièces contenues dans ce manuscrit. Voici quels ils sont : Ahmed Efendi, 1040 — Ahmed Haleby Efendi, 1041 — Sa'deh Sayd Efendi, 1042 — Mohammed Efendi Salemy, 1042 — Abderrhamân Efendi, 1043 — Ahmed Efendi Zâdeh, 1044 — Chehâb Efendi, 1045 — Mohammed Efendi, 1048 — Hasmaty Mohammed Efendi , 1049 — Abderrahman Efendi, 1050, et enfin Daoud Efendi, 1051 de l'hégire.

INTRODUCTION

AU

CALCUL GOBÂRÎ ET HAWÂÏ *)

fol. 86 r.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! fol. 86 v.

Louange à Dieu, maître de l'univers ; qui sa bénédiction repose sur notre seigneur Mohammed, sa famille et tous ses compagnons.

Pour en venir au fait, ceci sont quelques feuilles traitant de ce dont ont besoin les personnes versées dans la connaissance des lois réligieuses **) en fait de calcul, d'après les méthodes les plus faciles, (savoir la methode) gobârî, et (la methode) hawâï.

Sachez que les figures qui représentent les nombres sont (au nombre de) neuf, et qu'il n'y en a pas de dixième. L'augmentation n'y devient manifeste (ne s'exprime) qu'au moyen des rangs (ou ordres). En voici la forme à la manière indienne 9 8 7 6 5 4 3 2 1; et à la manière gobârî (elle est) ainsi: ٩٨٧٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١. La première de ces figures est celle de l' unité, la seconde est celle de deux, et ainsi de suite successivement jusqu'à neuf. Ceci c'est l'ordre des unités.

Mais si elles sont élevées à la place (ou dignité) des dizaines, alors placez-les ainsi : 10, c'est-à-dire mettez un zéro (« cifron » ***)) et ensuite après lui une unité. Ou (si deux est élevé) à la place (ou dignité) de vingt, alors (écrivez) ainsi : 20; et trente ainsi : 30; jusqu'à quatre-vingt-dix, savoir ainsi : 90.

Et les centaines ainsi : 100, parce qu'elles sont dans le troisième rang (ordre);

---

*) « *gobâr* » = *pulvis*; « *hawâ* » = *aër*. Je crois que l'expression « Calcul Hawâï » que je rencontre ici pour la première fois ne désigne pas autre chose que ce qu'on appelle en français « calcul » de tête ».

**) Ces lois comprennent notamment aussi les préceptes concernant le partage des héritages.

***) « *cifr.* » = *vacuus*.

et les mille ainsi : 1000; et les dizaines de mille ainsi 10000, parce qu'elles sont dans le cinquième ordre.

Et les composés, comme onze, ainsi : 11, ou douze ainsi : 12, et quatre-vingt-dix-neuf ainsi : 99 , et mille-cent-dix ainsi: 1110.

Toujours la place du nombre indique son espèce, s'il est des unités ou de ce qui vient après elles (des ordres supérieurs aux unités), tandis que sa figure indique sa quantité, c'est-à-dire de combien est son nombre (combien d'unités de cette espèce il comprend).

Donc l'unité est la première (occupe la première place) dans chaque premier fol. 87 r. nœud (c'est-à-dire dans les nombres 11, 21, 31, 41, etc. jusqu'a 91 *)), et la seconde des figures ci-dessus) est la première de chaque second nœud, et ainsi de suite.

Si vous voulez ajouter un nombre à un nombre pareil, mais trop grand pour que vous puissiez énoncer la somme d'un seul mot, écrivez-les sur deux rangées de manière à se correspondre, les unités au-dessous des unités, et de même ce qui vient après les unités, en mettant au-dessus des deux rangées une ligne, de même qu'au-dessous d'elles, afin de marquer la somme sur la première, et ce que vous obtenez en fait de dizaines (les dizaines qu'on retient comme unités pour la colonne suivante, si la somme d'une colonne est plus grande que neuf) sur la seconde; ainsi : $\begin{array}{c}\overline{542}\\ \underline{231}\end{array}$. Puis ajoutez l'unité au deux qui est au-dessus

---

*) On pourrait penser qu'il faut traduire ce passage de la manière suivante : « Donc l'unité est » la première (occupe la première place) dans toute la première serie (c'est-à-dire dans les nombres » depuis dix jusqu'à dix-neuf,) et la seconde (des figures ci-dessus) est la première de la seconde série » (c'est-à-dire des nombres depuis vingt jusqu'à vingt-neuf), et ainsi de suite ».

Mais dans cette seconde version on considérerait comme le premier chiffre d'un nombre le premier chiffre à gauche, ce qui est contraire à tout le reste du traité où c'est constamment le premier chiffre à droite qui est appelé le premier, conformément d'ailleurs au sens qu'on suit dans l'écriture arabe, savoir en allant de droite à gauche.

Cette circonstance servira en même temps à fixer la signification du mot arabe « *ikd* » que je rends dans la version du texte par « *nœud* », et dans celle de la note par « *série* ». Ce mot « *ikd* », pluriel « *okoûd* », signifie « *collier* » (par exemple de perles) et est dérivé du verbe « *akada* » qui signifie « *nouer* ».

M. de Sacy, dans sa grammaire arabe (Tom. I, pag. 417, 2.e édit.) en parlant des nombres cardinaux, s'exprime ainsi : « d'autres sont nommés « *okoûd* » *nœuds*, ce sont les noms des dizaines, depuis *vingt* jusqu'à *quatre-vingt-dix* ». Mais la présence, dans le passage actuel du mot « *koull* » qui signifie *chaque* (premier nœud) ou *toute* (la première série) est un argument direct contre l' opinion formulée par l'illustre orientaliste, qui, d'un autre côté, en ne comprenant pas parmi les *okoûd* le nombre *dix*, est en contradiction manifeste avec un passage du grand dictionnaire arabe connu sous le nom du *Kâmoûs*, où on lit à l'article « *acharah* » : « *alacharah awwalou'l-okoûd* », c' est-à-dire « le dix est la premier des *okoûd* » ou « le commencement des *okoûd*. »

Mohammed Ben Moûçâ, dans le chapitre de son traité d'algèbre qui traite de la multiplication, emploie le mot *okoûd* par opposition aux *unités*, il prend pour exemple *dix*. Donc chez lui, les *okoûd* paraissent être les multiples de dix, depuis dix jusqu'à quatre-vingt-dix (à moins qu'il n'y comprenne aussi les centaines, etc., ce qui ne résulte pas clairement du passage). La traduction latine rend *okoûd* par *articuli*, terme qui sert à designer, dans l'arithmétique du moyen âge les multiples des neuf unités par *dix*, *cent*, etc. (Voir le mémoire de M. *Chasles* sur l'explication des traités de l'Abacus et particulièrement du traité de Gerbert. *Comptes rendus de séances de l'Académie des sciences*, séance du 23 janvier 1843, pag. 167.) Le passage actuel me semble confirmer l'explication donnée par M. Freytag dans son grand dictionnaire, savoir que le nom de « nœud » se donne à des nombres dans les noms desquels deux autres noms de nombre sont réunis ou « noués » ensemble. Conséquemment le « premier nœud » est le nombre dans lequel le nom d'une dizaine est joint pour la première fois à un autre nombre, comme onze (en arabe « dix et un »), vingt et un, etc. Puis le « second nœud » celui où le nom de la dizaine est joint pour la seconde fois à un autre nombre, comme douze (en arabe « dix et deux »), vingt-deux, etc.

d'elle, il résulte trois; ensuite le trois au quatre, il résulte sept; ensuite le deux au cinq, il résulte sept; ainsi : 773, sept cent soixante-treize.

Et si l' on dit : ajoutez quatre-vingt-deux mille sept cent à quatre-vingt-dix-huit mille deux cent cinquante, alors écrivez-les ainsi : $\begin{matrix}98250\\82700\end{matrix}$. Ensuite additionnez (et écrivez) au-dessus des deux zéros : zéro *). Puis cinq au-dessus du zéro. Puis additionnez ce qui est dans le troisième (rang), ce qui fait neuf; posez-le au-dessus du deux, après le cinq. Puis après cela il résulte dix, donc posez zéro sur la ligne et descendez l'unité, qui représente dix, au-dessous du rang suivant, et ajoutez-la à ce qui se trouve dans ce rang; il résulte dix-huit. Donc posez le huit sur la ligne et ensuite le dix (*sic* !). Il (le résultat de toute l'opération) sera ainsi .

$$\begin{array}{r} 180950 \\ \hline 98250 \\ 82700 \\ \hline 1 \end{array}$$

Si vous voulez retrancher un petit nombre d'un grand afin de connaître ce qui reste après la soustraction du plus petit, écrivez cela ainsi $\frac{597}{276}$. Puis retranchez le six du sept qui lui correspond; il reste un. Placez-le sur la ligne vis-à-vis du sept. Puis sept de neuf; reste deux. Placez-le sur la ligne. Puis deux de cinq; reste trois. Placez-le sur la ligne vis-à-vis de cinq. Il (le résultat de l'opération) sera ainsi : $\begin{array}{c}321\\ \hline 597\\ \hline 276\end{array}$. Et cela est le reste : Trois cent vingt-un.

fol. 87 v.

Ceci (est la manière de procéder) si le nombre retranché se trouve dans un rang moindre que celui dans lequel se trouve le nombre dont on retranche **). Mais si le contraire a lieu, alors retranchez le supérieur de l'inférieur et (retranchez) ce qui reste de dix, ou bien ajoutez à ce (nombre) qui se trouve dans la rangée supérieure, dix que vous prenez ***) sur le (rang) suivant; parce que celui-ci est au (rang, chiffre) précédent dans le rapport de dix (à un), et retranchez le (nombre) inférieur de la somme. Puis posez ce qui reste du dix (*sic* !) sur la ligne. Et de même lorsque la (place, ou rangée) supérieure est vide et que vous avez retranché le (nombre) inférieur de dix et marqué le dix ajouté dans chaque (rang) par une unité (posée) au-dessous du rang suivant par compensation à l'emprunt fait ****) , alors ajoutez-la au nombre à retrancher et retranchez la somme du nombre dont en retranche, et posez le reste au-dessus de celui-ci. Et ainsi de suite. Alors ce qui est (le résultat) c'est le (nombre) cherché.

*) صفر الخلوهما? le zéro correspondant au (ou provenant du) vide de ces deux zéros, c'est-à-dire que représentent ces deux zéros ?

**) C'est-à-dire: si le nombre retranché est plus petit que celui dont on retranche.

***) Textuellement : « donnez-le vous (en le prenant) du (rang) suivant »; le verbe arabe employé dans le texte est le même qui sert aussi à former le terme qui désigne les *quantités données* des problèmes d'algèbre. En latin le verbe *sumere* réunit les deux nuances d'une manière semblable.

****) Textuellement: « à l'action de vous donner »; le texte porte le nom d'action du même verbe dont il est question dans la note précédente.

Et lorsqu'on dit : retranchez quatre cent soixante cinq de six cent quatre, alors écrivez cela ainsi : $\begin{smallmatrix}604\\465\end{smallmatrix}$. Puis retranchez le cinq de quatorze. Et, si vous voulez, retranchez le quatre de cinq, reste un, que vous retranchez de dix. De l'une ou de l'autre manière il reste neuf. Placez-le sur la ligne, descendez le dix (*sic* !) au-dessous du (rang) suivant, et ajoutez-le au six. Il résulte sept. Retranchez-le de dix, reste trois. Placez-le sur la ligne, descendez le dix au-dessous du (rang) suivant, et ajoutez-le au nombre à retrancher qui est quatre. Il résulte cinq. Retranchez-le de six, reste un. Placez-le au-dessus de ce (nombre, du six). Le reste sera cent trente neuf, ainsi : 139, et c'est le (nombre) cherché.

fol. 88 r.

La preuve de la justesse de la soustraction c'est que vous ajoutez le nombre retranché au résultat, il résulte le nombre dont on a retranché. Ou vous retranchez le résultat du nombre dont on a retranché, il reste le nombre retranché; attendu que le résultat (*sic* !) est composé des deux.

Et si vous voulez retrancher un nombre d'un autre nombre, mais (que ces nombres soient) trop grands pour que vous puissiez reconnaître (immédiatement) si les opérations du calcul sont justes, alors la méthode consiste à faire la preuve *) par neuf, ou **) par huit, ou par sept.

Quant à la réduction (ou preuve) par le premier, vous additionnez les figures (c'est-à-dire chiffres) du nombre comme si c'étaient des unités. Puis vous réduisez la somme par neuf jusqu'à ce qu'il reste neuf ou ***) quelque chose qui est au-dessous de neuf.

(Quant à la preuve ou réduction) par le second (c'est-à-dire, par huit), vous rejetez les centaines paires et ce qui vient après (c'est-à-dire, les mille, les dix-mille etc.) Il reste pour les centaines impaires quatre, et pour chaque dizaine deux. Donc multipliez deux par le nombre des dizaines , ajoutez au résultat quatre pour les centaines impaires, et puis le nombre des unités. Reduisez la somme par huit, comme (vous l'avez fait pour) le neuf. S'il y a ce qu'on vient de dire ****) (alors procédez comme on vient de l'énoncer *****). Si non, le nombre est déjà tout réduit; ou si (il manque) un seulement ******), alors additionnez

---

*) Textuellement: «*réduire* par la *balance* du neuf ». Le mot « *mîzân* » qui signifie proprement « *balance* » (ou « lévier »), désigne aussi par extension « poids » ou « mesure » en général. L'aetion de déterminer le résidu d'un nombre par rapport à un module donné, ressemble en effet à eelle de déterminer par le pésage, eombien de fois une certaine unité de poids est contenu dans un eorps pésant, plus un excédant moindre que eette unité. — Le verbe que je traduis ici par « *réduire* » est le même qui désigne, dans ce qui préeède, l'opération de la soustraetion simplement. Il signifie proprement « rejeter », et de là « retrancher ». Mais dans le paragraphe aetuel, où il s'agit de la preuve par neuf, ete., il a une aceeption plus particulière et signifie : « rejeter ou retrancher d'un nombre proposé un module donné autant de fois que possible »; pour exprimer cela d'un seul mot, et pour pouvoir serrer de près, dans ma traduction, les tournures que l'auteur fait prendre au verbe arabe dans eette nouvelle aceeption, j'ai choisi les mots « réduire » et « réduction ».

**) Ici, et plus évidemment eneore dans plusieurs autres passages suivants, la partieule arabe « *fa* », qui indique proprement un rapport de eonséquenee, signifie « ou » tout simplement. On eomprend très-bien eomment elle a pu passer à cette nuance. Mais M. de Sacy (voir *Gramm. arabe* 2.e éd. Vol. I, § 1201. et suiv., et particulièrement § 1205) n'en fait pas mention; et elle constitue ici une partieularité de style qu'il est intéressant de eonstater.

***) Comparer la note préeédente.

****) C'est-à-dire si le nombre eontient des eentaines impaires, des dizaines et des unités.

*****) Voir sur ee genre d'éllipse la *Grammaire arabe* de M. de Saey. 2e éd. Vol. II., § 836.

******) C'est-à-dire: si, par exemple, le nombre ne eontient pas de eentaines impaires, alors addi-

(les quantités que donnent) les deux autres; ou (s'il en manque) deux, alors traitez celui qui reste comme il a été dit.

(Quant à la preuve ou réduction) par le troisième (c'est-à-dire par sept), dont Ibu Albannâ *) a dit qu'elle est la plus exacte de toutes; on réduit le dernier**) (chiffre) de la série (de chiffres qui représente le nombre proposé) par ce nombre (sept) si ce chiffre est égal (à sept) ou plus grand. Puis considérez l'excès ou le défaut ***) comme des dizaines par rapport au (chiffre) précédent et celui-ci comme des unités. Puis réduisez par sept. (Continuez) ainsi jusqu'à ce que vous arriviez au premier (chiffre).

fol. 88 r.

Et si vous voulez, multipliez le dernier (chiffre) par trois, réduisez le produit par sept, et ajoutez le reste au nombre précédent. Multipliez (la somme) par trois et réduisez comme auparavant. Ajoutez l'excédent au (chiffre) précédent, s'il y en a; si non (c'est-à-dire si se chiffre est zéro) multipliez le reste par trois et réduisez comme auparavant. Et ainsi de suite jusqu'aux unités.

Le résultat est que par suite de la réduction il reste de chaque dizaine trois, de chaque centaine deux, du mille six, du dix-mille quatre, du cent-mille cinq, du mille-mille (million) un. On a réuni la série des six nombres, pour les retenir plus facilement, dans les six lettres ا ج ب و د ه (A, C, B, F, D, E d'après l'ordre alphabétique; A, Dj, B, W, D, H d'après la prononciation), dont *le premier* signifie un, *le second* trois, *le troisième* deux, *le quatrième* six, *le cinquième* quatre, et *le sixième* cinq.

Or, écrivez le nombre (proposé) comme rangée de chiffres au-dessus de laquelle vous tirez une ligne. Puis écrivez au-dessous de ce nombre ces lettres: l'un sous les unités, le trois sous les dizaines, le deux sous les centaines, le six sous les mille, le quatre sous les dizaines de mille, et le cinq sous les centaines de mille. Puis répétez exactement les mêmes six nombres sous les ordres suivants successivement. Multipliez le (chiffre) qui se trouve dans chaque ordre du nombre proposé) par celui qui est au-dessous, et réduisez le produit par sept; puis posez l'excès ou le défaut ****) au-dessus (du chiffre du nombre proposé). Quand vous avez terminé (cette opération) additionnez ce que vous avez posé (au-dessus) comme si c'étaient des unités, puis réduisez par sept, l'excès qui reste est la réponse (le résultat cherché).

fol. 89 r.

Si vous en désirez la preuve *****) alors écrivez le (nombre ou le tableau)

---

tionnez seulement les quantités provenant des dizaines et des unités, savoir deux fois le nombre des dizaines plus le nombre des unités, puis formez le résidu de cette somme par rapport au module huit. — Le passage auquel se rapportent les notes ****), *****), ******) de la page précédente est extrêmement obscur dans l'original arabe, et peut-être le texte du manuscrit est fautif.

*) Savant de Maroc, auteur de plusieurs ouvrages très-estimés sur l'arithmétique pratique, particulièrement à cause des démonstrations des opérations de cette science qu'il y donne. Voir pour de plus amples détails une: « Notice sur des notations algébriques employées par les Arabes.» *Journal asiatique,* cahier d'Octobre-Novembre 1854.

**) Le dernier chiffre est le premier chiffre à gauche comme 9 dans 94237.

***) C'est-à-dire non pas la différence entre sept et ce chiffre, mais ce chiffre même lorsqu'il est *défecteux* par rapport à sept, c'est-à-dire plus petit que sept.

****) Voir la note précédente.

*****) Le mot arabe « imtihân » qui est le terme propre pour désigner « preuve » ou « vérification », ne semble vouloir dire ici qu' « exemple ».

$\frac{6\ 3\ 0\ 4\ 1\ 1\ 2\ 5}{2\ 3\ 7\ 8\ 6\ 4\ 3\ 5}$
C A E D F B C A, comme vous venez de le voir (ou de l'apprendre). Puis multipliez le cinq en ce qui est au-dessous et posez le (résultat) au-dessus de la ligne. Ensuite le trois en ce qui est au-dessous, il résulte neuf; réduisez par sept, il reste deux; écrivez-le sur la ligne. Ensuite (faites pour) le quatre comme auparavant, il reste un qu'on écrit sur la ligne. Opérez de même jusqu'à la fin de la rangée. Puis additionnez ce qui est au-dessus de la rangée savoir: cinq, et deux, et un, et encore un, et quatre, et zéro, et trois, et six. Additionnez cela comme des unités et réduisez par sept, il reste un, et cela est le résultat, excepté que le zéro ne s'additionne pas.

Sachez que, lorsque vous avez réduit tant le nombre qu'il s'agit de retrancher, que celui dont vous retranchez, par une des réductions, il doit nécessairement se présenter (un des) six cas :

Ou bien les deux nombres sont réduits (complètement sans laisser de résidu),
Ou le nombre supérieur est réduit (complètement) et l'inférieur non,
Ou c'est le contraire qui a lieu,
Ou il reste de chacun d'eux un résidu; lesquels résidus ou bien sont égaux,
Ou le supérieur est plus grand que l'inférieur,
Ou au contraire (l'inférieur est plus grand que le supérieur).

Si les deux nombres sont (complètement) réduits, ou que les deux résidus sont égaux, alors le résultat (doit aussi être complètement) réduit.

Si dans l'addition ou la soustraction le nombre inférieur est (complètement) réduit, alors le résidu supérieur est la preuve *).

Si le résidu du supérieur excède le résidu de l'inférieur la quantité de l'excédant est la preuve.

Si c'est le résidu de l'inférieur qui excède (l'autre) alors ajoutez au résidu du supérieur la quantité (le module) de la réduction, puis retranchez le résidu de l'inférieur de la somme. Ou bien retranchez le résidu du supérieur du résidu fol. 89 v. de l'inférieur, et ce qui reste du (module) par rapport auquel vous avez réduit. Il reste la preuve.

Et si le supérieur est (complètement) réduit tandis que l'inférieur ne l'est pas, alors retranchez le résidu de l'inférieur du (module) par rapport auquel vous avez réduit. Il reste la preuve.

Lorsqu'on dit retranchez $\frac{63}{35}$, ou $\frac{64}{36}$, ou $\frac{64}{35}$, ou $\frac{94}{36}$, ou $\frac{94}{39}$, ou $\frac{63}{36}$; alors le premier couple consiste en deux réduits **), et dans le second les deux résidus sont égaux; donc le résultat de l'un et de l'autre est réduit. Dans le troisième le résidu du nombre qu'on retranche est réduit (ou nul), et le résidu du nombre dont on retranche est un, et cela est la preuve. Dans le quatrième le résidu du nombre qu'on retranche est un, et le résidu du nombre dont en retranche est trois. Donc après avoir retranché le plus petit du plus grand, il reste deux,

---

*) Voir la première note de la page 368. La « preuve » est ici le résidu du résultat.
**) Par rapport au module sept.

et cela est la preuve. Dans le cinquième le résidu du nombre qu'on retranche est quatre et le résidu du nombre dont on retranche est trois; après avoir retranché le quatre de la somme de trois et sept qui est dix, il reste six, et cela est la preuve; et si vous retranchez le trois du quatre, et l'unité qui reste de sept, il reste la même chose. Dans le sixième le résidu du nombre qu'on retranche est un, et le résidu du nombre dont on retranche est réduit; après avoir retranché l'unité de sept il reste six qui est la preuve. Ici la preuve *) (a été faite) par la réduction du sept.

Et lorsqu'on dit vérifiez par neuf (en prenant) par exemple la multiplication $\frac{4536}{\substack{72\\63}}$, ou $\frac{2232}{\substack{72\\31}}$, ou $\frac{2736}{\substack{48\\57}}$, ou $\frac{2688}{\substack{48\\56}}$, ou $\frac{4224}{\substack{48\\88}}$. Alors les deux facteurs sont réduits dans le premier (exemple), et l'un d'eux l'est dans le second, tandis que dans le troisième le résidu de chacun d'eux est trois, de sorte que le produit des deux (résidus) est neuf, qui est réduit. Conséquemment dans tous ces cas le résultat est réduit.

fol. 90 r.

Dans le quatrième le produit des deux résidus est six, qui est la preuve; et dans le cinquième il est 21, et après la réduction trois, ce qui est la preuve. Comparez la (preuve) toujours au résidu du résultat, il résultera la chose cherchée (c'est-à-dire la certitude si le calcul est juste ou faux.)

Ceci est général (et s'applique) aux entiers et aux fractions après qu'on a converti **) celles-ci, de sorte que le problème est de l'espèce d'une seule fraction (ne renferme qu'une seule espèce de fractions).

Donc si l'on dit : multipliez un tiers en quatorze et un quart, il résulte de la multiplication quatre et trois quarts, en vertu de ce qui sera exposé sur la manière d'opérer avec les fractions, si telle est la volonté de Dieu dont le nom soit exalté! Et si nous désirons éclaircir ***) cela, multiplions le tiers qui est le reste de l'un des deux facteurs, par le quart qui est le reste de l'autre facteur; il résulte un tiers d'un quart, et après la conversion (multiplication par les dénominateurs) et la réduction (par rapport au module choisi), un, ce qui est (au fait) un tiers d'un quart, et cela est la réponse. Ensuite convertissez le résultat de la multiplication, il viendra dix-neuf quarts, ce qui donne pour

---

*) Ou vérification, « imtihân » voir la note *****) de la page 369.

**) C'est-à-dire : réduit au même dénominateur, ou en général : multiplié par un nombre convenable pour se débarasser des dénominateurs, ou pour modifier ceux-ci selon les bésoins du problème.

Le verbe arabe بسط employé ici signifie ordinairement : « étendre », et en arithmétique : « multiplier », mais toujours en sousentendant que cette multiplication n'est faite qu'en vue d'une autre opération. Car le terme qui désigne proprement et spécialement la multiplication est dérivé d'une autre racine (ضرب).

) Le mot « *ikhtiyâr* » qui se trouve dans le texte, désigne ordinairement « l' action de faire un choix » et particulièrement le choix des circonstances favorables à une entreprise au moyen de l'astrologie judiciaire, ou d'une autre science occulte. Cette signification n'offre ici aucun sens satisfaisant. La traduction qui j'ai adoptée m'a été suggérée par une définition du mot « *ikhtiyâr* » qui se trouve dans l'ouvrage connu sous le nom des *Ta'rîfât*, où on lit: « *L'ikhtiyâr* » est l'action de faire ce qui sert à rendre une chose manifeste.» Peut être aussi n'est-ce qu'une erreur du copiste arabe, qui a écrit اختيار *ikhtiyâr*, au lieu de امتحان *imtihân*; comparer la note **) de la page 369.

reste *) cinq quarts ; convertissez cela en tiers **), il vient quinze, ce qui donne pour reste un, et cela est (au fait) un tiers d'un quart et égal à la réponse (ci-dessus) en qualité et en quantité.

La multiplication est la détermination d'un nombre inconnu au moyen de deux connus (*sic* !). Il y en a plusieurs espèces ***).

Multiplication par déplacement ****). Elle consiste à placer le multiplicande et le multiplicateur en deux rangées, celui qui contient le moins d'ordres au-dessus de celui qui en contient davantage, de sorte que le dernier rang *****) du multiplicande soit au-dessus du premier rang du multiplicateur. Ensuite vous multi- fol. 90 v° pliez la quantité qui se trouve au dernier rang de multiplicande dans toutes les figures (chiffres) des ordres du multiplicateur (c'est-à-dire dans les chiffres de différents ordres qui composent le multiplicateur.) Et (quant a l'endroit où) vous commencez à écrire le résultat, soit qu'il consiste en des unités seulement, soit que non, son premier rang sera placé vis-à-vis du (chiffre) par lequel vous avez multiplié, *savoir au-dessus, en passant à la rangée (suivante) contigue à la rangée du multiplicande* ******). Puis vous déplacez *******) la rangée du multiplicateur de sorte que son premier (chiffre) se trouve vis-à-vis du (chiffre) qui précède le dernier (chiffre) du multiplicande ********), (et ensuite vous procédez) comme auparavant. Et toutes les fois que vous avez multiplié par un nombre vous ajoutez le résultat à ce qui se trouve au-dessus de ce nombre. De cette manière (vous continuez) jusqu'à la fin et vous placez le résultat comme il faut. On l'appelle en ce cas « l'effacé (*al-mamhoû* »).

Si vous voulez multiplier quarante trois par cinquante-quatre alors placez cela ainsi $^{43}_{54}$ *********); puis multipliez le quatre qui est au dernier rang du multiplicande, par cinq qui est le dernier rang du multiplicateur, fait vingt. Posez zéro au-dessus de cinq, et le vingt (représenté) par deux après le zéro. Puis multipliez encore le (quatre) par le quatre qui se trouve au-dessous, fait seize. Posez le six

---

*) Par rapport ou module sept.

**) C'est-à-dire convertissez cinq quarts en quinze tiers d'un quart.

***) Quelle bonne définition !

****) Pour qu'on puisse suivre plus aisément la règle de l'auteur, je donne ici dès l'abord le tableau de la multiplication de 43 par 54 d'après sa méthode (c'est l'exemple qu'il choisit ensuite lui-même, mais les tableaux qui se trouvent dans le manuscrit sont en partie incorrects) :

```
                      2    |                      2 3 2 2
                    3 4̸    |                      -------
                    4̸      |                          1 2
« L'effacé » :    2 0̸ 6̸ 2  |                        1 5
                  -------  |   « L'incliné » :      1 6
                      4 3  |                      2 0
                    5 4    |                      -------
                      5 4  |                          4 3
                           |                        5 4
                           |                          5 4
```

*****) C'est-à-dire le chiffre de l'ordre le plus élevé.

******) C'est-à-dire immédiatement au-dessus du multiplicande.

*******) De là le nom de cette espèce de multiplication.

********) Le texte porte « multiplicateur », évidemment par suite d'une erreur du copiste.

*********) Voici encore le tableau de l'opération décrite dans le texte ci-dessus.

```
     2
    34̸
    4̸
  20̸6̸2
  -----
    43
   54
    54
```

à l'endroit (au—dessus) du quatre, et le dix (représenté) par une unité en place du zéro. Ensuite reculez le multiplicateur *) d' un rang ; alors le quatre se trouvera au—dessous du trois et le cinq au—dessous du six, de la manière (suivante 21 6 3 / 6 4 **). Puis multipliez le trois par le cinq, fait quinze, et ajoutez cela au seize qui se trouve au-dessus, il résulte trente-et-un. Vous écrirez l'unité à l'endroit du six, et le trente en place du dix. Puis multipliez le (trois) encore en quatre, fait douze. Posez le deux en sa place, et le dix sous la forme d'une unité avec l'unité qui se trouve au second rang, donc deux , lequel deux vous posez en sa place. Alors l'opération est terminée, et le résultat sera deux mille trois cent vingt deux, sous la forme suivante : 2322.

fol. 91 r.

Vous pouvez aussi, dans cette opération , placer les deux facteurs en deux rangées, et tirer une ligne au—dessus des deux rangées. Ensuite vous opérez comme auparavant, excepté que vous écrivez les résultats tels qu'ils se présentent, de la manière (c'est-à-dire à la place, relativement aux ordres des chiffres) qu'il faut, jusqu'à la fin. Ensuite vous joignez tout cela ensemble par l'addition. Cette (manière de procéder) est meilleure et s'appelle « l'incliné » (« *al-moudjnah* »).

1 6
5
2 1 1 2
En voici la figure /4 | 3 4 ***). Puis on joint ensemble (tout cela) par l'ad-
5
dition, il résulte 2322, comme auparavant.

Si vous voulez (faire) la *multiplication à Tableau*, tracez un rectangle divisé en des carrés dont le nombre est égal au produit (du nombre des chiffres) de l'un des deux (facteurs) par la somme (le nombre) des ordres de l'autre. Ensuite menez-y les diagonales en allant de la droite en bas à la gauche en haut. Puis écrivez le multiplicande ****) au—dessus, chaque ordre en regard des carrés qui lui correspondent, puis placez l'autre (facteur) à sa droite ou à sa gauche de la même manière (c'est-à-dire: vis-à-vis des carrés correspondants) en descendant. Ensuite multipliez les ordres (les chiffres) de l'un des deux (facteurs) l'un après l'autre par tous les ordres de l'autre, et placez le résultat de chaque multiplication dans le carré où se croisent les (colonnes du tableau correspondant aux) deux (ordres c'est-à-dire: chiffres) multipliés, en écrivant les unités au—dessus de la diagonale et les dizaines au—dessous. Après cela commencez l'addition par la

---

*) Le texte porte « multiplicande ». Il suffit de comparer page 372, lig. 16, pour voir que c' est une erreur du copiste, d'ailleurs ces deux termes prêtent en arabe autant à la confusion comme en français. Le multiplicande s'appelle « *madroûb* » et le multiplicateur « *madroûb fîh* »; il suffit donc que le copiste ajoute ou omette par méprise le « *fîh* » pour confondre l'un des deux termes avec l'autre.

**) C'est ainsi que les chiffres sont placés dans le texte, mais il serait plus exact de les placer ainsi 216 / 3 / 54 .

) Ceci est la réproduction exacte du tableau qui se trouve dans le texte. Comparer la note * de la page 372.

****) Le texte porte « *al-madroûbaïni* » « les deux multipliés » c'est-à-dire : les deux facteurs. Par ce qui suit immédiatement on voit qu'il faut lire « *al-madroûb* » « le multiplicande » ou «*ahadou'l-*» *madroûbaïni* » « l'un des deux facteurs ».

fol. 91 *v*. colonne *) la plus élevée à droite en montant entre les diagonales, et placez chaque nombre dans son rang, en portant les dizaines de chaque somme dans la (colonne) diagonale suivante, et en l'ajoutant à ce qui se trouve dans celle-ci (on continue) ainsi jusqu'à la fin, ce qui en résulte est la réponse.

Exemple. Quatre cent trente deux (à multiplier) par sept cent soixante cinq. Posez le tableau et divisez-le en longueur en trois parties égales, d'après le nombre des ordres du multiplicande; divisez de même la largeur, et tracez-le ainsi **)

4	3	2	
1 \ 4	1 \ 2	1 \ 0	5
2 \ 1	1 \ 8	1 \ 5	6
2 \ 8	2 \ 4	2 \ 0	7

Ensuite multipliez cinq en deux, fait dix; posez zéro dans la première partie de la case au-dessus de la diagonale, et le dix sous la forme d'une unité au-dessous. Puis multipliez le (cinq) en trois, fait quinze. Posez le cinq sous le trois au-dessus de la diagonale et le dix (représenté) par une unité au-dessous. Ensuite (multipliez cinq) en quatre, fait vingt; donc (placez) zéro sur la diagonale sous le quatre, et vingt (représenté) par deux au-dessous. Puis multipliez six en deux, fait douze; posez deux vis-à-vis du six, et le dix sous la forme d'une unité à gauche du deux sous la ligne (diagonale). (Continuez) ainsi jusqu'à la fin (de la rangée correspondante au six). Ensuite multipliez sept en deux, puis en trois, enfin en quatre. Après cela additionnez en inclinant le tableau à gauche. Le fol. 92 *r*. résultat sera comme il suit : 330480, ce qui est trois-cent trente mille quatre cent quatre vingt.

Si vous multipliez un nombre qui contient des zéros par un nombre semblable, ou qui n'en contient pas, alors multipliez ces nombres l'un par l'autre, et posez ensuite les (zéros) devant le résultat, en les prenant des deux bouts (des deux nombres proposés) ou de l'un d'eux (si l'un seulement contient des zéros).

Donc si l'on dit : Deux mille et cent en trente mille, alors multipliez vingt et un en trois; il résulte soixante trois; puis posez avant ceci six zéros: 63 000 000, ce qui est soixante trois mille mille (millions).

Et si vous multipliez le second (nombre) en vingt et un, alors posez quatre

---

*) Le mot arabe « *rokn* » qui est employé ici, est le mot propre pour désigner un « pilier », au propre et au figuré, ce qui pourra être d'un certain intérêt pour des rapprochements historiques.

**) Je donne ici le tableau tel qu'il se trouve dans le manuscrit. Mais comme plusieurs des tableaux précédents, il est encore incorrect. Car il ne cadre pas avec la description du procédé donnée par l'auteur, laquelle description est, pour le dire en passant, d'une clarté exceptionnelle, et comme on les trouve rarement en arabe, où l'abus des pronoms produit ordinairement, dans des descriptions de ce genre, une confusion extrême. Je crois, d'après les explications données par l'auteur, qu'il faut tracer le tableau comme ci-contre.

	4	3	2	
5	2 \ 0	1 \ 5	1 \ 6	0
6	2 \ 4	1 \ 8	1 \ 2	8
7	2 \ 8	2 \ 1	1 \ 4	4
	3	3	0	

zéros avant le soixante trois; le résultat sera ainsi: 63 0000, et cela est six cent trente mille.

De la division. C' est la manière de connaître un nombre qui se comporte comme l'unité *). La méthode consiste à placer le dividende dans une rangée, et au-dessous de son dernier rang (chiffre) le diviseur, si celui-ci est égal à, ou plus petit que, ce (dernier chiffre du dividende). Si non placez-le sous le (chiffre) précédent en considérant le dernier (chiffre du dividende) comme des dizaines par rapport à ce (chiffre) dont il est précédé. Ensuite tirez au-dessous du diviseur une ligne qui s'étend jusque sous le premier (chiffre) de la rangée du dividende. Puis cherchez parmi les unités un nombre tel que lorsque vous le multipliez par le diviseur, il détruise (la partie du dividende) qui se trouve au-dessus (du diviseur), ou (du moins), qu'il en reste (seulement) un nombre plus petit que le diviseur. Puis posez ce nombre là (c'est-à-dire: le quotient du dernier chiffre, ou des derniers chiffres du dividende par le diviseur) sous la rangée du diviseur; et l'on sait que le nombre supérieur (c'est-à-dire le partie du dividende dont il s'agit) doit être égal à ce que donne sa division (multiplié par le diviseur). S'il reste un reste plus petit que le diviseur, alors posez-le dans son rang au-dessus des (chiffres du dividende) qui se trouvent dans ce rang. Faites la même chose (par la suite) pour tous les rangs. Ensuite reculez le diviseur d'un rang, cherchez un nombre et procédez comme auparavant. (Continuez) ainsi jusqu'à la fin de la rangée; si la division se trouve alors parfaite et qu'il n'y a aucun excédent, alors le résultat est entier et sera ce qui se trouve sous la ligne; et s'il reste un nombre plus petit que le diviseur, alors ce sera une fraction du diviseur (c'est-a-dire: une fraction ayant le diviseur pour dénominateur), qu'il faudra ajouter au nombre entier, puis il résultera le (quotient) cherché. Si, en déplaçant le diviseur vous arrivez sous un zéro, ou sous un nombre plus petit que le (diviseur) déplacé, alors mettez en bas un zéro vis-à-vis (du rang où vous vous trouvez) et au-dessous de la ligne.

fol. 92 v.

Donc si l'on dit : neuf cent trente six (à diviser) par neuf alors placez cela ainsi $\frac{936}{9}$. Puis cherchez un nombre tel que multiplié par neuf il détruise ce qui est au-dessus du (neuf); ce sera un. Ensuite transportez le neuf sous le trois, et écrivez en bas zéro. Puis transportez le (neuf) sous le six, de sorte qu'il se trouvera au-dessus du (neuf), trente six. Cherchez un nombre tel que multiplié par le diviseur le produit soit égal à ce qui est au-dessus du (neuf); ce sera quatre. Multipliez-le en neuf, le résultat de la division sera cent quatre; ainsi: 104.

*) Cette définition est aussi obscure que la phrase arabe dont elle est la traduction. D' ailleurs la définition de la multiplication donnée-ci-dessus (page 372) par l'auteur, ne brille pas non plus par l'exactitude. Lorqu'on divise le dividende en autant de parties égales que l' indique le diviseur, ces parties qui sont toutes égales au quotient, peuvent être considérées comme les unités constitutives qui composent le dividende. Telle me semble être la pensée que l'auteur a voulu exprimer. Mais on trouve dans d'autres traités d'arithmétique arabes, par exemple dans celui de Behâ-eddin, la définition exacte et explicite de la division, savoir que c'est la recherche d'un nombre qui est à l'unité comme le dividende est au diviseur. Au reste ce qu'il nous importe ici de connaître, ce ne sont pas les définitions de l'auteur, mais ses procédés, et la description de ceux-ci est d'une clarté satisfaisante.

Pour tout nombre qu'il s'agit de diviser par dix, si son premier (chiffre) est formé par des unités (c'est-à-dire: n'est pas zéro) mettez ce qui se trouve dans les unités sur dix, et ce qui vient après sera le nombre cherché. Pour diviser par exemple 743 par dix. Donc écrivez dix et posez au-dessus de dix les unités, ce qui fait trois dixièmes *), donc le résultat sera 74 et trois dixièmes.

Si le premier (chiffre) du nombre est zéro, et que vous voulez diviser ce (nombre) par (dix), alors réjetez le (zéro); il restera le (nombre) cherché. S'il s' agit par exemple de diviser 5360 (par dix) réjetez le zéro, le résultat de la division sera ainsi 536.

fol. 93 r.

Telle (est la manière de procéder) si le diviseur n' est formé que d'un seul rang (chiffre.)

Mais s'il est formé de deux rangs (c'est-à-dire: de deux chiffres), comme si l'on dit : divisez deux mille six cent quarante par vingt-quatre, alors écrivez cela ainsi : 2640. Puis (on remarque que) vingt-quatre est composé de trois et huit, donc mettez-le en deux rangées, le plus grand côté **) le premier, puis après celui-ci le plus petit, ainsi: 3 8 ***). Ensuite divisez le dividende entier par trois, puisque ceci (trois) est plus petit que (le nombre huit) dont il est précédé. Il résulte huit cent quatre-vingt, et puis (quant au reste de la division) zéro sur trois, parce que la (quantité produite par la) division est entière. Après cela divisez le résultat par huit, il résulte cent dix.

Et si l'on dit : divisez mille par vingt-quatre, alor résolvez (décomposez) le diviseur en six et quatre, et posez cela ainsi : 4 6. Puis divisez mille par quatre, il résulte deux cent cinquante et pas de fraction. Donc posez zéro au-dessus du quatre. Puis divisez le résultat par six; il vient quarante et un, et il reste quatre au-dessus du six, donc formez le rapport de quatre à six, parce que toujours ce qui se trouve au-dessus du plus grand diviseur (« *imâm* ») ****) sera rapporté (simplement) à ce qui se trouve au-dessous (c'est-à-dire: aura pour dénominateur cet *imâm* ou diviseur seul); puis ce qui se trouve au-dessus du second (en grandeur) sera rapporté à ce qui est au-dessous (c'est-à-dire : à cet *imâm*) et à l'*imâm* suivant, et ainsi de suite, s'il y a lieu.

Ici le résultat est quarante et un et quatre sixièmes, c'est-à-dire deux tiers, ce qui est le nombre cherché.

---

*) Ceci est la manière connue des Arabes d'écrire les fractions, semblable à la nôtre (tant qu'il s'agit de fractions simples), mais en omettant le trait de division.

**) C'est-à-dire: le plus grand facteur, le produit des deux facteurs étant représenté géometriquement par la surface d'un rectangle.

***) C'est ainsi que les deux chiffres se suivent dans le manuscrit, par ce qu'en arabe on écrit de droite à gauche.

****) L'auteur désigne ici par le terme « *imâm* » (qui signifie proprement: chef, directeur, et puis: modèle, règle, canon) les diviseurs simples dans lesquels on a décomposé le diviseur proposé. Comme on a vu l'auteur divise par ces facteurs successivement, suivant l'ordre de leur grandeur, le plus grand étant le dernier. Conséquemment le reste de la dernière division aura pour dénominateur le plus grand facteur (ou « le premier *imâm* ») seul; le reste de l'avant dernière division aura pour dénominateur le produit de l'avant dernier facteur (« du second *imâm* ») par « le suivant » c'est-à-dire : par le plus grand facteur qui sert à la dernière division; et ainsi de suite.

Si vous avez décomposé le diviseur en huit et trois, le résultat serait quarante et un et cinq huitièmes et un tiers d'un huitième, ainsi : $\frac{5}{3}\frac{1}{41}$ (*sic* !) *). (fol. 93 v.)

La raison de cela c'est que la division d'un nombre par un autre nombre et puis du résultat par un troisième nombre est exactement la même chose que la division du même nombre par le rectangle formé des deux nombres par lesquels vous avez divisé (successivement).

La preuve que la division est juste, c'est que si l'on multiplie le résultat par le diviseur on doit obtenir de nouveau le dividende.

On reconnaît par là que la division d'un nombre par un autre nombre est la même chose que si l'on divise le dividende en décomposant (le diviseur) dans (les nombres) dont il est composé. Donc la connaissance de la décomposition des nombres est une chose importante qu'il faut conserver dans sa mémoire. Voici comment on y procède.

Si le premier (chiffre) du nombre qu'on cherche à décomposer est zéro, il aura une moitié **), ce qui est une propriété naturelle de tous les nombres pairs; il aura aussi un cinquième attendu que le (zéro) est suivi (d'autres chiffres); il aura enfin un dixième.

Ou (si le premier chiffre est) cinq, (le nombre) aura un cinquième, mais il aura aussi d'autres fractions ***) par exemple un quinzième.

Ou (si le premier chiffre est) un nombre pair, reduisez ****) le (nombre proposé) par neuf. S'il est (complètement) réduit, il aura une moitié, un tiers, un sixième, et un neuvième comme trente six, qui est composé de quatre et neuf, donc pourra être (complètement) réduit par neuf qui est multiple de trois, et toutes les neuvaines paires sont des multiples de six.

S'il reste du nombre (proposé) trois (après la réduction par neuf, comme (c'est le cas pour), quatre-vingt-seize, alors le (nombre proposé) aura les fractions de quatre dans lesquelles il n'entre pas le neuvième *****).

S'il (c'est-à-dire: si le nombre proposé) n'est pas réduit par lui (c'est-à-dire : per neuf) et qu'il n'en reste pas non plus trois, ni six, alors réduisez-le par huit. S'il est (complètement) réduit, il aura une moitié, et un quart, et un huitième, parce que (le huit) est multiple de quatre, et que chaque nombre qui a un huitième a aussi un quart; comme par exemple seize. (fol. 94 r.)

S'il n'est pas réduit (par huit) et qu'il ne laisse pas non plus quatre pour reste, alors réduisez-le par sept. S'il est (complètement) réduit, il aura, outre la moitié, le septième; comme quatre-vingt dix-huit, vu que ce nombre est com-

---

*) La vraie manière de figurer cette quantité selon l'usage de arithméticiens arabes est comme il suit : $\frac{1\ 5}{3\ 8}\ 41$.

**) C'est-à-dire: il sera divisible par deux.

***) C'est-à-dire: il pourra aussi être divisible par d'autres nombres.

****) Comparer pag. 368, 1ère note, et les pages suivantes.

*****) C'est-à-dire les nombres de la forme $\{2m+1\}9+3$ ou $2m9+6$ peuvent être de la forme $4.n$, mais ne seront jamais de la forme $4.\ 9.\ n$. Il faut se rappeler qu'il s'agit dans tout ceci d'un nombre proposé dont le premier chiffre est pair, donc d'un nombre pair.

posé d'un nombre pair de septaines, puisque c'est le résultat de la multiplication $1\frac{7}{4}$ (*sic* !) *).

S'il n'est pas réduit (par sept non plus) il n'aura d'autre fraction rationnelle **) que la moitié, et la moitié de celle-ci sera sourde ***), comme (c'est le cas pour) quarante six.

Si (le nombre proposé) est impair, réduisez-le par neuf s'il est réduit (complètement) il aura un neuvième et un tiers, comme soixante trois.

S'il n'est pas réduit et qu'il ne laisse pas non plus trois pour reste, réduisez-le par sept. S'il est (complètement) réduit, il aura un septième. Si non, il est sourd ****), et alors cherchez (ses facteurs) parmi les premiers nombres sourds qui se succèdent, à partir de onze et treize suivant l'ordre.

On se rend compte de la justesse de l'opération, en multipliant les côtés (c'est-à-dire, les facteurs) les uns dans les autres; s'il en résulte le (nombre) décomposé lui-même, (la décomposition) est juste, si non non.

Par exemple vingt-quatre laisse, après la réduction par neuf, 6 pour reste. Conséquemment il aura une moitié, un tiers, et un sixième. Considérez maintenant un quelconque de ceux-ci. Si vous considérez le sixième, son dénominateur est 6; donc ce sera un des deux cotés; divisez 24 par ce (nombre), il résulte 4, ce qui est l'autre coté. Si vous considérez le tiers, les deux côtés seront trois et huit. Si vous considérez la moitié, les deux côtés sont 2 et 12, et il faudra décomposer de nouveau douze. fol. 94 v.

Le plus convenable c'est qu'on considère la fraction la plus petite, aussi quand c'est une fraction autre que le dixième, parce que c'est la plus importante *****).

Ce qui précède sur la division de grands nombres forme un genre de procédé auquel il en est opposé un autre ******).

Or, quant à la méthode de l'opération contraire, elle consiste à décomposer le dénominateur dans ses côtés (facteurs) dont il est composé, en le divisant par le dénominateur d'une des fractions qu'il présente *******), et de diviser le résultat

---

*) C'est à dire la multiplication de 14 par 7.

**) Les arithméticiens arabes appellent « fractions rationnelles » les dix premières fractions: un demi, un tiers, etc. jusqu'à un dixième, pour désigner lesquelles leur langue a des formes propres; toutes les autres fractions ne peuvent s'énoncer en arabe que par des circonlocutions. Mais ailleurs les géomètres arabes emploient les termes « rationnel » et « sourd » dans le même sens que les géomètres grecs.

***) « La moitié de celle-ci sera sourde » veut dire : la moitié de celle-ci n'aura pour diviseurs que des nombres dont les valeurs réciproques sont des fractions sourdes ; en d'autres termes : la moitié de celle-ci ne sera divisible pas aucun des nombres depuis deux jusqu'à dix.

****) C'est-à-dire il aura pour facteurs des nombres qui sont des dénominateurs de fractions sourdes. Il ne faut pas croire que l'auteur veuille parler ici des nombres *premiers*. Ceux-ci s'appellent en arabe comme chez nous, leur nom arabe étant, comme leur nom moderne, la traduction du terme grec.

*****) La mesure de cette importance paraît consister ici dans les facilités qu'un nombre offre comme diviseur; or dix en présente de toutes particulières que l' auteur a exposées plus haut ; mais en général ce sera toujours le plus petit nombre qui donnera lieu à la division la plus facile à exécuter.

******) L'opposition entre ce qui précède et ce qui suit consiste en ce que dans ce qui précède il s'agit de la division d'un nombre par un nombre plus petit, et dans ce qui suit de la division par un nombre plus grand; donc dans ce qui précède de la division proprement dite, dans ce qui suit de la réduction des fractions à leur forme la plus convenable.

*******) Comme 24 par exemple présente les fractions un quart et un sixième.

de la même manière, jusqu'à ce que ses côtés (facteurs) soient amenés à un état qui donne lieu à une énonciation facile (de la fraction proposée).

Donc si l'on dit : énoncez une unité de soixante douze, résolvez ce (dernier nombre) en huit et neuf, ensuite dénommez l'unité d'après huit, ce sera un huitième, et d'après neuf, ce qui sera un neuvième; puis mettez l'un des deux noms en rapport de dépendance avec l'autre, ce sera un huitième d'un neuvième, et tel est le rapport de l'unité à soixante douze.

Si l'on avait quatre (au lieu de l'unité), alors dénommez quatre d'après huit, ce sera un demi, et dénommez l'unité d'après neuf, ce sera un neuvième, (et l'on aura finalement la moitié d'un neuvième).

Si c'était neuf, alors dites : un huitième.

Ou si c'était seize, divisez (seize) par huit; il résulte deux; dénommez-le d'après neuf, ce sera deux neuvièmes.

Ou si c'est dix, divisez (dix) par huit si vous voulez, il résulte un et il reste deux; dénommez l'unité d'après neuf, ce sera un neuvième, et dénommez le deux qui restait, d'après huit, ce qui sera un quart; et puis mettez l'un des deux noms en rapport de dépendance avec ce résultat, vous aurez un neuvième et un quart d'un neuvième.

Et si vous voulez diviser l'unité par vingt-quatre, décomposez ce (dernier nombre) ainsi : 32. Posez l'unité au-dessus du trois comme vous l'avez vu, et prenez le rapport de l'un à l'autre, ce sera un tiers, puis mettez cette dénomination en rapport de dépendance avec le nom de l'unité par rapport à huit; ce sera un tiers d'un huitième. fol. 95 r.

Procédez conformément à cela.

Et (comme) il faut viser à mettre la signification (d'une théorie) autant que possible à la portée des intelligences (j'ajouterai encore les observations suivantes).

On dit, pour (énoncer le rapport de) 25 à 80, « un quart et la moitié d'un huitième », parce que cela est plus clair *) que « trois dixièmes et le huitième d'un dixième ».

Et « la moitié d'un huitième » est plus convenable que : « un quart d' un quart »; de même « la moitié d'un sixième » est plus convenable que: « un tiers d'un quart »; et « un tiers d'un huitième » est plus convenable que: « un quart d'un sixième ».

Il est plus convenable aussi de faire précéder la plus grande des deux (fractions) mises en rapport de dépendance, comme « un quart d'un septième », au lieu de « un septième d'un quart ».

En outre « un sixième » est plus convenable que « la moitié d'un tiers »; et « un huitième » est plus convenable que « la moitié d'un quart », « un dixième » plus convenable que « la moitié d'un cinquième », et « un neuvième » plus

---

*) C'est-à-dire plus immédiatement compréhensible, ou, comme nous dirions actuellement, plus élégant. Le texte porte أوضع ce qui signifierait « plus posé » ou « plus humble »; mais je crois que ce n' est qu' une faute d' écriture pour أوضح qui se traduit comme je l'ai fait. Cette faute était, comme on voit, très facile à commettre.

convenable que « un tiers d'un tiers »; enfin « un sixième d'un dixième » est plus convenable que « un tiers d'un quart d'un cinquième ».

Il existe aussi un genre de division qu'on appelle la « *Mohâssah* » (distribution de portions). La manière de procéder dans cette opération consiste à additionner les parties, à les rapporter à un *imâm* (c'est-à-dire à un dénominateur commun *), puis à multiplier la portion de chacun par la quantité **) qu'il s'agit de diviser, et à diviser le produit par l'*imâm*, e

Ou bien ***) à donner à la portion l'*imâm* pour dénominatur et à multiplier la (fraction) résultante par la quantité qu'il s'agit de diviser,

Ou bien à diviser l'*imâm* par la portion, et à diviser par le résultat la quantité qu'il s'agit de diviser,

Ou bien à diviser la quantité qu'il s'agit de diviser, par l'*imâm*, et à multiplier le résultat par la portion de chacun,

Ou bien à diviser l'*imâm* par la quantité qu'il s'agit de diviser et la partie de chacun par le résultat.

Ce qu'on obtient sont les (portions) cherchées.

Donc si l'on dit : divisez dix entre trois personnes (en donnant à l'une d'elles la moitié, à la seconde un tiers, et à la troisième un sixième, alors le dénominateur (commun) sera six; convertissez ****) (les fractions qui expriment les portions) par rapport à ce (nombre) qui est l'*imâm*. Puis multipliez pour la personne qui a la moitié, trois en dix et divisez le produit par l'*imâm*. Ou bien donnez à trois l'*imâm* pour dénominateur et multipliez le résultat, qui est un demi, par dix. Ou bien divisez l'*imâm* par trois, et dix par le résultat (de cette division) qui est deux. On bien (divisez) dix par l'*imâm*, et multipliez le résultat, qui est un et deux tiers, après l'avoir converti en tiers *****), par trois. On bien donnez à l'*imâm* dix pour dénominateur, et divisez trois par le résultat après avoir converti celui-ci en cinquièmes. Il résulte (toujours) cinq. Procédez de la même manière pour les deux personnes qui ont le tiers et le sixième.

fol. 95 v.

Si parmi les (portions) il s'en trouve de fractionnaires ******), multipliez toutes les parties proportionnelles *******) par le plus petit nombre divisible par leurs dénominateurs (« *imâms* »).

Par exemple, un homme possède dix dinars, et il (en) doit à une personne

---

*) Comparer la note****) de la page 376, où ce mot désignait les diviseurs partiels en lesquel on avait décomposé un diviseur proposé.

**) Le mot arabe est « *mâl* » qui signifie proprement « possessions », « biens »; en effet les quantités qu'il s'agit de diviser dans les problèmes de partage sont ordinairement de l' argent, des terres, ou des troupeaux, etc. « *Mâl* » est aussi, comme on sait, le terme technique employé par les algébristes arabes pour désigner la seconde puissance de l'inconnue.

***) Tous ces « autrement » n'expriment autre chose que l'identité suivante :

$$(p.\,q) : i = \frac{p}{i} \cdot q = q : (i : p) = (q : i) \cdot p = p : (i : q).$$

****) Voir page 371, note **.

*****) C'est-à-dire après avoir converti $1\,\frac{2}{3}$ en $\frac{5}{3}$.

******) Ce qui suit immediatement explique ce que l'auteur veut exprimer par cette locution, impropre en ce sens que, sous un centain point de vue, les portions doivent toujours être fractionnaires.

*******) C'est-à-dire. Les fractions ou nombres mixtes exprimant la grandeur des portions.

trois et un tiers, à une autre personne quatre et un tiers, à une autre deux et un quart, à une autre cinq et un sixième, et à une autre un et un huitième. Posez les dénominateurs (« *imâms* ») des fractions ainsi : 8 6 4 3 3, savoir trois et trois et quatre et six et huit. Ceci fait, vous pouvez obtenir de deux manières un nombre qui contienne ces fractions.

La première methode consiste à les examiner deux à deux relativement aux quatre rapports *). Vous trouverez donc entre les deux trois l'égalité, donc vous vous contenterez de l'un d'eux. Puis examinez trois et quatre; ils sont incommensurables (premiers entre eux); donc formez leur rectangle, il résulte douze. Fol. 96 r. Puis examinez le produit et six; celui-ci est contenu dans celui-là; donc on se contentera du premier. Puis on examinera celui-ci relativement à huit. Ils s'accordent par le quart (c'est-à-dire ils ont quatre pour plus grand commun diviseur). Donc multipliez l'(ancien) produit par deux, ce qui fait vingt-quatre, et cela est le (nombre) contenant (toutes) les fractions du problème.

La seconde méthode consiste à décomposer **) les (dénominateurs) proposés en leurs côtés (facteurs) premiers, donc ainsi : 2 2 2 3 2 22 33. (Quant aux deux premiers nombres ***)) contentez-vous du premier, attendu qu'il est égal à celui qui le suit. Puis entre ce (nombre) et le troisième ****) il y a différence d'espèce par rapport à tous ses côtés (facteurs). Donc joignez-le à l'autre. Ce sera ainsi: 2 2 3. Ensuite entre celui-là *****) et le quatrième il y à la relation que l'un est contenu dans l'autre; donc contentez-vous du produit. Entre celui-ci et le cinquième il y a identité par rapport à deux côtés (facteurs), mais le nombre de ces côtés égaux est plus grand d'une unité. Donc joignez ce côté au produit. Ce sera ainsi : 2 2 2 3. Multipliez ces (nombres) l'un par l'autre, il résulte vingt-quatre comme auparavant.

Ensuite convertissez les parties proportionnelles ******) relativement à cette espèce, de sorte que l'unité deviendra vingt-quatre, et les fractions (se changeront) proportionnellement. Conséquemment celui qui avait trois et un tiers aura quatre-vingt, celui qui avait quatre et un tiers aura cent quatre, celui qui avait deux et un quart aura cinquante quatre, celui qui avait cinq et un sixième aura cent vingt quatre, et celui qui avait un et un huitième aura vingt-sept.

Additionnez ces (nombres) et posez-les comme parties proportionnelles. Il résulte trois cent quatre-vingt neuf.

---

*) Les quatre rapports dont l'auteur entend parler, sont les rapports qui existent entre deux nombres suivant que :
1° les deux nombres sont égaux:
2° l'un est multiple de l'autre;
3° ils sont multiples différents d'un même nombre;
4° ils sont premiers entre eux.

**) Le texte porte تحصل erreur de copiste pour تحل. En outre il se trouve sur cette dernière feuille, qui est d'une autre écriture que les dix feuilles précédentes occupées par ce traité, plusieurs fautes de copie assez grossières. Je n'indiquerai pas particulièrement les suivantes en les corrigeant dans ma traduction.

***) Ce sont le deux premiers nombres à droite, savoir les deux 3.

****) C'est-à-dire entre trois et quatre.

*****) C'est-à-dire le produit des facteurs 2, 2, 3, donc le nombre 12.

******) Voir page 380, note *******.

fol. 96 v. Un nombre tel qu'un nombre sourd *) ne se décompose pas. On opère en ce cas comme auparavant. Excepté qu'on ne convertit pas la quantité qu'il s'agit de partager en portions, mais qu'on la multiplie ou la divise, ce qui revient au même.

L'opération *à tableau* pour le même (problème) consiste à additionner toutes les parties. Puis décomposez ce qui est (c'est-à-dire le résultat de l'addition), dans les facteurs (« *imâms* ») dont il est composé, et mettez-les à part dans la troisième **) table (colonne). Puis mettez la quantité qu'il s'agit de diviser dans une seconde table (colonne) après la table (colonne) où se trouve la somme des (nombres qui expriment les) portions. Ensuite multipliez la portion de chacun par le nombre qu'il s'agit de diviser, et divisez les résultats par les facteurs (« *imâms* ») sus-mentionnés que l'on avait mis à part. Il résultera ce qu'on avait cherché.

Donc si l'on dit : l'un de trois hommes à vingt-deux *dînârs*, le second dix-neuf, et le le troisième sept; ils font le commerce et gagnent douze *dînârs*. Alors additionnez ces portions; il résulte 48, ce qui est composé de huit et de six. Donc posez ces (nombres) après la colonne de la possession (« *mâl* ») ***) et du gain. Puis multipliez la propriété de chacun par le gain, qui est douze, et divisez le produit par six, et ce qui en résulte par huit. Alors le premier recevra cinq et quatre huitièmes, le second quatre et six huitièmes, et le troisième un et six huitièmes.

Ensuite additionnez les huitièmes, il vient deux (unités) entières. Posez-les en bas dans la colonne du douze. Ainsi :

68		12	48
04		5	22
06		4	19
06		1	07

(*sic*). ****)

On reconnaît que l'opération est juste; en additionnant ce qui revient à chachun du (gain) qu'il s'agit de diviser. S'il résulte le nombre qu'il s'agit de diviser, l'opération est exacte, sinon non. Fin.

Dieu seul connaît la vérité.

L'écriture (la copie de ce traité) a été terminée le second jour de la semaine, 22.e du mois très-saint *****) ramadhân, de l'année 980 de la Hidjrah, sur l'auteur de laquelle (Mohammed) soit la Bénédiction divine (cette date correspond au lundi, 26 Janvier de l'an 1573 de notre ère).

---

*) Voir page 378, notes **) et ****).

**) Voir le tableau rapporté entre les lignes 23 et 24 de cette page. L'auteur décrit son procédé un peu au rebours.

***) C'est-à-dire le capital que chacun apportait à l'entreprise ou le capital de la société. Comparer page 380, note**).

****) La première colonne (qui est dans le manuscrit presqu'entièrement emportée par la rognure de la marge) contient, comme on voit, le capital de la société et les parties que chacun des sociétaires en a données; la seconde colonne le gain et les parties entières de ce qui en revient à chacun; la troisième les facteurs (« *imâms* ») du nombre qui exprime le capital, et les parties fractionnaires des portions du gain.

*****) C'est le mois du grand jeûne, mois sacré pour les mahométans.

ADDITION.

Il se trouve au feuillet 116 r°. du même manuscrit, sur une de plusieurs pages blanches restées entre la fin d'un traité et le commencement d'un autre , une note détachée qui m'a paru offrir un certain intérêt.

Elle ne se compose que de deux lignes dont la première est formée par la succession des lettres arabes de l'alphabet numéral, rangées suivant l'ordre qu'on verra ci-après. La seconde ligne contient les équivalents de leurs valeurs numériques exprimés par les chiffres indiens , mais en employant pour désigner les dizaines et les centaines une notation qu'on croyait jusqu'aprésent appartenir particulièrement au chiffre gobâr. Au-dessus de la premier ligne se trouvent les mots : « *Kalam hindî* » c'est-à-dire « Écriture ou notation indienne », ce qui d'un côté tranche les doutes qu'on pourrait avoir à cet égard, et d'un autre côté établit une analogie remarquable entre les chiffres de cette note détachée et les chiffres indiens du moine Néophytos mentionnés par M. de Humboldt dans son mémoire sur les systèmes de chiffres *).

Je fais suivre ici une réproduction de ces deux (on trois) lignes en remplaçant les lettres numérales arabes par leurs équivalents en chiffres modernes:

NOTATION INDIENNE

900	90	9.	800	80	8.	700	70	7.	600	60	6.	500.	50	5.	400	40	4.	300	30	3	200.	20.	2.	1000	100	10	1.
..	.		..	.		..	.		..	.		..	.		..	.		..	.		..	.		....	..	.	
٩	٩	٩	٨	٨	٨	٧	٧	٧	٦	٦	٦	٥	٥	٥	٤	٤	٤	٣	٣	٣	٢	٢	٢	١	١	١	١

*) Journal de M. Crelle Tome IV^{e}, pag. 206 et suiv.

COMUNICAZIONI

Sulla stella variabile, osservata verso la metà del maggio 1866, *in vicinanza all'* ε *Corona Boreale. Nota del prof.* L. Respighi.

Appena avuto notizia del singolare fenomeno presentato, pochi giorni or sono, da una stella vicina all'ε Corona Boreale, la quale, dopo di avere raggiunto quasi improvvisamente lo splendore di una stella di 2.ª in 3.ª grandezza, in pochi giorni si è indebolita a modo, da rendersi invisibile all'occhio nudo , cercai di fissarne la posizione sul Globo Celeste di Cary , per mezzo della costruzione grafica in proposito indicata.

Secondo questa costruzione il luogo della stella, coincideva prossimamente colla intersezione S di due allineamenti, uno dei quali condotto per le stelle α, γ e δ della Corona Boreale, e l'altro innalzato dalla stella ε di questa costellazione, perpendicolarmente alla linea $\varepsilon\delta$, in modo da formare un triangolo $\varepsilon S\delta$ rettangolo in ε, nel quale la differenza della stella variabile S dalla ε, riesciva alquanto minore della distanza della ε alla δ.

Nella località, così determinata, avendo trovato segnata sul detto Globo una nebulosa , mi affrettai di verificarne la posizione nel Catalogo delle Nebulose di Herschel ; ma con mia sorpresa non trovai in questo indicata alcuna nebulosa in vicinanza al luogo, corrispondente a quello della nebulosa segnata sul Globo di Cary.

Esaminati allo stesso scopo altri Cataloghi, altri Globi ed Atlanti Celesti, non si è rinvenuta traccia alcuna di tale nebulosa ; ed anche le minute ricerche fatte in quella località del cielo, per mezzo dell' Equatoriale, riescirono del tutto infruttuose.

La diligenza ed accuratezza , colla quale è stato costruito questo Globo Celeste, non permettendomi di spiegare subito questo fatto, come effetto d'un errore , feci alcune indagini ne' Cataloghi ed Atlanti, sui quali è stata basata la costruzione del Globo stesso, ma non mi fu dato di scoprire donde Cary abbia cavata questa nebulosa.

Non è quindi improbabile, che la nebulosa sia stata per isbaglio segnata sul Globo; ma pure sarebbe opportuno di fare ulteriori ricerche in proposito, o per constatare questo errore, se esiste, o per rendersi ragione della scomparsa di questa nebulosa, nel caso che essa fosse stata realmente osservata.

La singolarissima circostanza poi di trovarsi indicata una nebulosa nella località stessa, dove è apparso lo straordinario fenomeno della stella variabile, rende queste ricerche tanto più importanti; in quanto che esse potrebbero forse condurre a constatare un fatto, connesso con quello della variabilità della stella; non essendo impossibile che la medesima stella, che ora ci ha fatto meravigliare con una quasi subitanea e temporaria accensione, in altri tempi vestisse invece la forma più tranquilla di una nebulosa.

Il sig. prof. N. Comm. Cavalieri S. Bertolo, dette in succinto contezza di un metodo pratico, del quale si fa particolarmente uso nella provincia di Orvieto, per misurare la intiera, o la parziale capacità delle botti, nel commercio del vino; riservandosi di farne pienamente conoscere il semplice ed ingegnoso artificio, coi singolari pregi, in altra sessione.

Il prof. cav. Diorio diede comunicazione all'accademia di qualche risultamento ottenuto, servendosi nelle osservazioni microscopiche di vetri diversamente colorati, invece dei vetri chiari attualmente in uso; ponendoli sul porta oggetti, fra il corpo da osservarsi, e la luce riflessa dal sottostante specchio.

Accennò di avere con tal metodo discoperto nelle ovicine di una tenia, cacciata di recente dal corpo umano; quelle già fecondate, e contenenti lo sviluppo primordiale del germe, dalle altre che non lo erano ancora; e traeva da ciò delle deduzioni fisiologiche, intorno al modo di fecondamento delle medesime.

Dichiarava poi di avere imaginato questo metodo dei vetri di colore, dopo i belli risultamenti, avuti fra noi dal Chmo. sig. Conte Castracane, nelle osservazioni microscopiche; mediante i raggi di diverso colore dello spettro solare, riflessi separatamente sugli oggetti, sottoposti allo studio, col mezzo di appositi congegni. Indicò finalmente che l' idea primitiva di questo metodo, venne dal nostro prof. Amici, di chiarissimo ricordanza.

Intanto per mezzo dei vetri colorati, si può avere di notte, l'effetto che di giorno si otterrebbe col prisma.

Il sig. Presidente comunicò una lettera, inviatagli dal sig. Ab. Carlo Rusconi, del 19 maggio 1866, colla quale questo geologo indicava di aver egli scoperto alcune ossa fossili umane, in un terreno che, secondo l'autore, appartiene alla serie dei postpliocenici, anteriori alla deposizione dei tufi vulcanici.

L'accademia dopo questa comunicazione, intese le obiezioni fatte dal sig. Cav. prof. Ponzi, pregò questo suo socio, perchè verificasse il fatto annunciato dal sig. Ab. Rusconi.

Il prof. Ponzi comunicò all'accademia il rinvenimento di due tombe dell'età della pietra, fatto a sinistra della via Valeria, venendo da Roma, oltre Vicovaro, sotto il paese di Cantalupo Bardella.

Qualche mese indietro dovendosi ricostruire il ponte sul fosso di Licenza (l'antico *Digentia*), i lavoranti per procacciarsi il materiale da costruzione, discuoprirono in quel travertino diluviale leggiero, che dicesi Sponga, due auguste cripte, una scolpita in alto, l'altra in basso, contenenti in tutto cinque cadaveri. Nella superiore se ne contenevano due, *Brachicefali*, od a cranio corto e rotondo, insieme a punte di freccie, ferri di lancia, e coltelli in pietra focaia, di squisito lavoro; nell'inferiore tre scheletri *Dolicocefali*, ovvero a cranio allungato, con un vaso di rozzo lavoro, e un cumulo di ossa di animali domestici, Cavallo, Bove, Porco, Cane, e Cervo (*Cervus elaphus*), che oggi non vive più nelle nostre contrade.

Questi oggetti, sebbene malmenati dal vandalismo dei contadini, pure vennero diligentemente raccolti, per essere assoggettati ad uno studio fisiologico, specialmente sui crani, che lo stesso professore va ad intraprendere, perchè faccia parte dei nostri lavori accademici.

Il R. P. Secchi, espose alcune ricerche sulle macchie solari, ed una serie di misure delle medesime, destinata a studiare il fenomeno della refrazione solare.

CORRISPONDENZE

La società dei Naturalisti di Mosca, mediante il suo primo segretario Dott. Renard, ringrazia per gli Atti dell' accademia nostra da essa ricevuti.

Il sig. principe D. Baldassare Boncompagni, presentò in dono all'accademia, da parte dell'autore sig. Casimiro Richaud, una memoria pubblicata in idioma francese, che ha per titolo «Sur la résolution des équations $x^2-Ay^2=\pm 1$, suivie d'une note sur un problème indéterminé ». Questa memoria in forma di lettera, è al nominato sig. principe diretta.

COMITATO SEGRETO

Dal comitato accademico fu proposta, per la nomina di un socio ordinario, la terna seguente :

Signori
- Rev. P. Guglielmotti, domenicano,
- Prof. Giorgi, ingegnere,
- Prof. Ab. Regnani.

Dopo ciò si procedette allo squittino segreto , mediante voti bianchi e neri, dal quale si ebbe il risultamento che siegue, i votanti essendo dieciotto

	Voti	
	Bianchi	Neri
R. P. Guglielmotti.	15	3
Prof. Giorgi.	9	9
Prof. Regnani.	7	11.

Perciò fu eletto fra i trenta soci ordinari lincei, il R. P. maestro Guglielmotti, salva l'approvazione sovrana.

L'accademia riunita in numero legale a un'ora pomeridiana, si sciolse dopo due ore di seduta.

Soci ordinari presenti a questa sessione.

C. comm. Sereni· — G. cav. Ponzi. — S. Proja. — A. Coppi. — S. Cadet. — E. Rolli. — P. Volpicelli. — E. contessa Fiorini. — P. A. Secchi. — P. Sanguinetti. — M. cav. Azzarelli. — B. principe Boncompagni. — B. monsignor Tortolini. — L. Jacobini. — L. cav. Respighi. — D. Chelini. — F. monsignor Nardi. — V. cav. Diorio. — N. comm. Cavalieri S. Bertolo.

Pubblicato nel 20 di dicembre del 1866.
P. V.

OPERE VENUTE IN DONO

De . . . . *Dell' uso delle osservazioni azimuttali per la determinazione delle ascensioni rette , e delle declinazioni delle stelle , per il sig. Emm. Liais.* Parigi 1857; un fasc. in 8.°

Influence . . . . *Influenza del mare su i climi; o risultamenti delle osservazioni meteorologiche fatte a Cherbourg nel* 1848 , 1849 , 1850 , 1851 , *del medesimo.* Parigi 1860; un fasc. in 8.°

Giornale di Scienze Naturali ed Economiche, pubblicato per cura del Consiglio di perfezionamento annesso al R. Istituto tecnico di Palermo. Vol. I. fasc. I. Palermo 1865.

Bullettino meteoralogico del R. Osservatorio di Palermo. Vol. III. — Num. 2. 1866.

Transactions . . . . *Transazioni della Societa' filosofica americana.* Parte II. Filadelfia 1865.

Smithsonian . . . . . *Contribuzioni smitsoniane.* Vol. XIV. Washington 1865; un vol. in 8.°

Hydrographie . . . . *Idrografia dell'alto S. Francesco ; e del Rio del Velhas ; ossia risultamento al punto di vista idrografica d'un viaggio effettuato nella provincia di Minas-Geracs , da Emm. Liais. (Opera pubblicata per ordine del governo imperiale del Brasile, e accompagnata da carte delineate dall'autore con la collaborazione dei sigg. Ed. José de Moraes, e Lad. de Souza Mello Netto).* Rio de Janeiro — e Parigi 1865, in foglio grande.

Comptes. . . . . *Conti resi dell'Accademia delle Scienze dell' Imperiale Istituto di Francia,* in corrente.

Bullettino Meteorologico dell'Osservatorio del Collegio Romano, in corrente.

Sull' inversione guàdrica delle curve piane. Memoria di T. A. Hirst. Roma 1865; un fasc. in 8.°

INDICE DELLE MATERIE

DEL XIX VOLUME

(1865-1866)

MEMORIE E COMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI

COMMISSIONI

CORRISPONDENZE

COMITATO SEGRETO

				ERRORI	CORREZIONI
Pag.	24	lin.	18	Fraday	Faraday
»	27	»	2	(salendo) assisa	ascissa
»	28	»	7	della	delle
»	29	»	15	(salendo) della	delle
»	30	»	2	(salendo) ricorremo	ricorreremo
»	33	»	5	(salendo) Nclla	Nella
»	»	»	11	(salendo) *eomune*	*comune*
»	39	»	15	deratta	diretta
»	»	»	17	liceo	linceo
»	65	»	21	*alle serie stesse*	*alla serie stessa*
»	76	»	17	*iberbola*	*iperbola*
»	81	»	3	a alla	~~avvicina~~ alla

N.B. La numerazione di ognuna delle pagine, comprese fra la 108 e la 153, si trova, per errore di stampa, sempre accresciuta di 100.

Pag.	247	»	1	stagioni	stazioni
»	»	»	5	avvicinava	avvicina
»	249	»	10	ed	ad
»	157	»	9	(salendo) sia o	sia
»	168	»	18	HG	H*g*
»	»	»	19	GK	*g*K
»	»	»	20	G	*g*
»	206	»	16	(salendo)	si tolga la nota (1)
»	299	»	3	fuoehi	fuochì
»	300	»	20	triangalo	triangolo
»	302	»	12	52°	53°
»	304	»	6	(salendo) Enunciazione	— Enunciazione
»	312	»	12	(salendo) parte dei	parte
»	313	»	17	Kinnersley	Kinnersley (Oeuvres de Franklin, t. 1°, pag. 303, lin. 11).
»	314	»	5	riferisce	riferisce ivi
»	»	»	8	(salendo) pag. 76	pag. 76, e 77

IMPRIMATUR

Fr. Hieronymus Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae Vicesgerens.

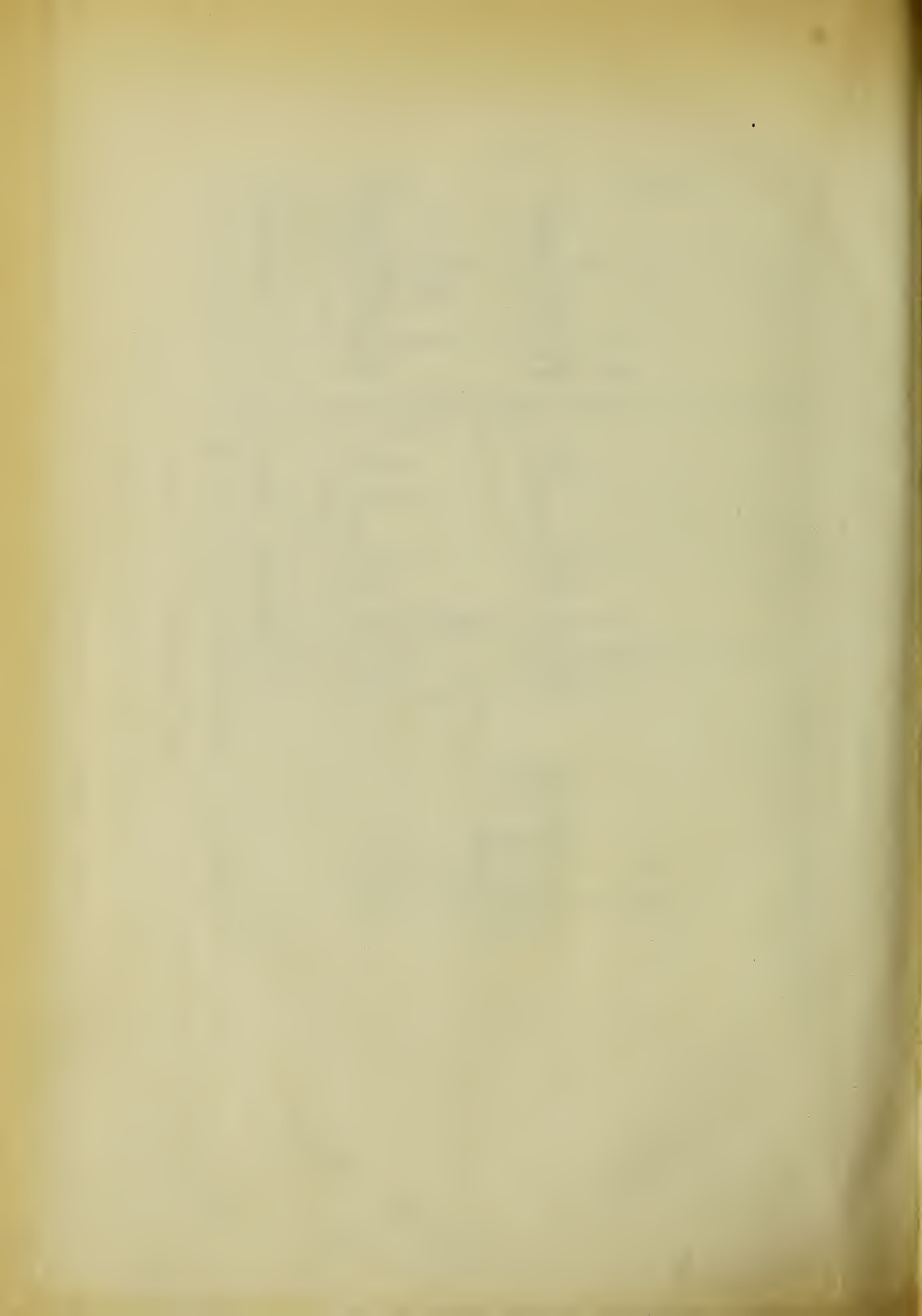
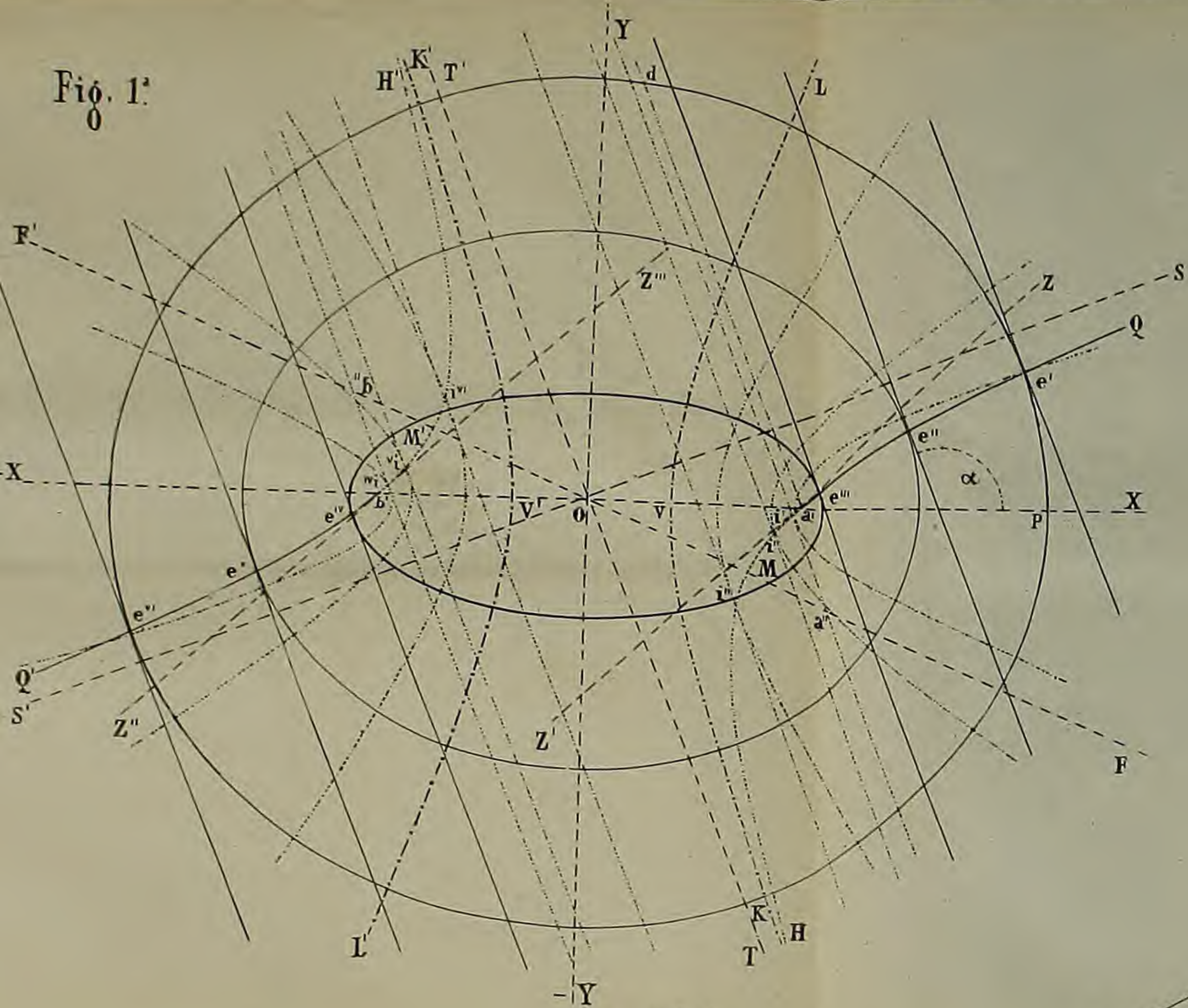
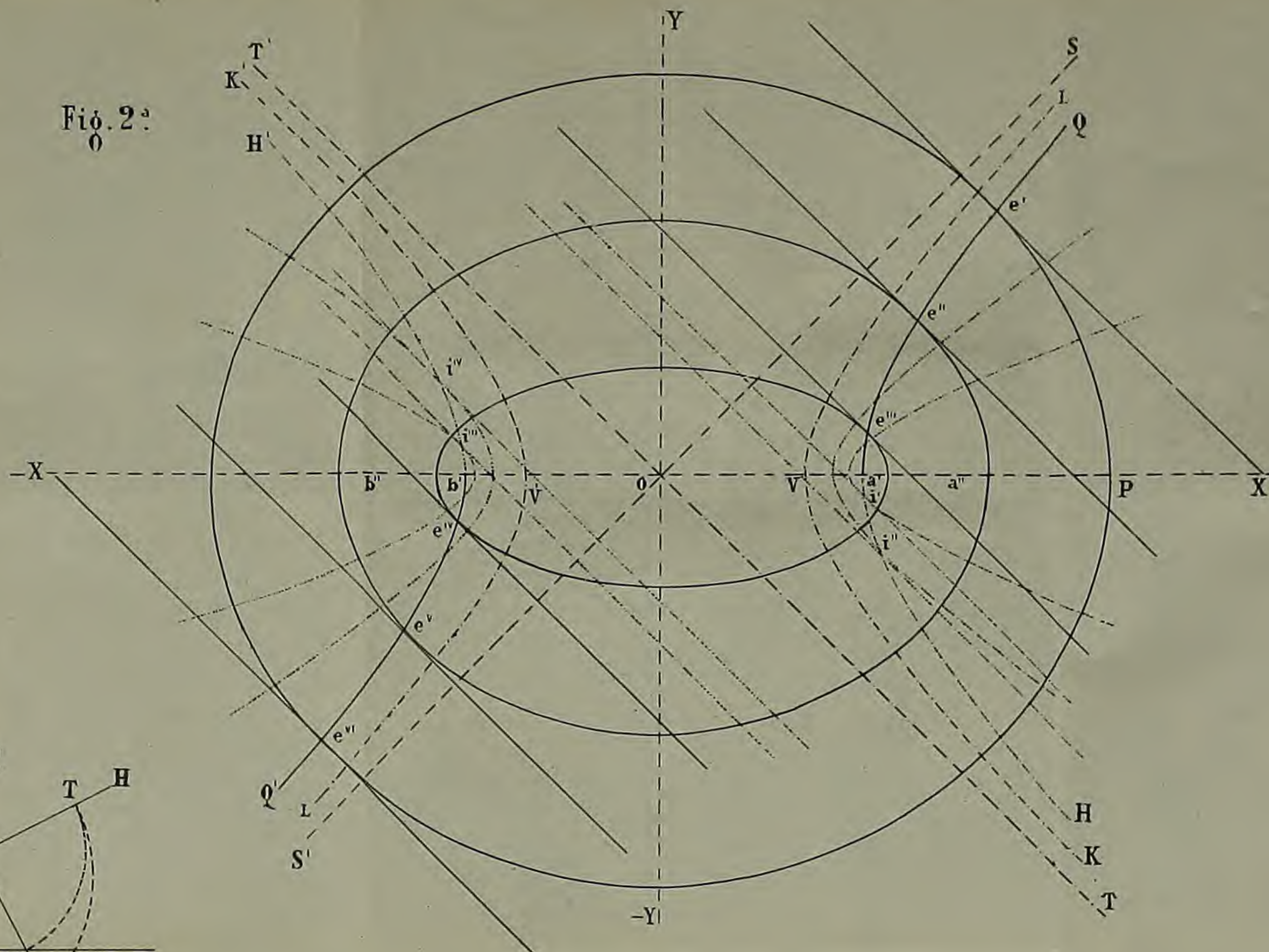



Fig. 1ª
Fig. 2ª
Fig. 3ª
Fig. 4ª
Fig. 5ª

Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Roma Lit. Danesi

Fig.ª 14.ª
Fig.ª 15.ª
Fig.ª 18.ª
Fig.ª 16.ª
Fig.ª 17.ª
Roma Lit. Danesi

Fig.ª 19.ª
Fig.ª 20.ª
Fig.ª 21.ª
Fig.ª 22.ª
Fig.ª 23.ª
Fig.ª 26.ª
Fig.ª 24.ª
Fig.ª 25.ª
Fig.ª 27.ª
Roma Lit. Danesi.

Fig.ª 28.ª
Fig.ª 29.ª
Fig.ª 30.ª
Fig.ª 31.ª
Roma Lit. Danesi